Université de Nice–Sophia Antipolis – Faculté des Sciences
Ecole Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées
Département d'Astrophysique

THESE

présentée pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences
Spécialité : Sciences de l'Univers

par

Rodolphe CONAN

Modélisation des effets de l'échelle externe de cohérence spatiale du front d'onde pour l'observation à Haute Résolution Angulaire en Astronomie

Application à l'Optique Adaptative, à l'Interférométrie et aux Très Grands Télescopes

Soutenue le 31 Octobre 2000 devant le jury composé de :

Denis Mourard	Président
Christopher Dainty	Rapporteur
Renaud Foy	Rapporteur
Jean–Marc Conan	Examinateur
Norbert Hubin	Examinateur
Andreï Tokovinin	Examinateur
Julien Borgnino	Directeur de thèse
François Martin	Directeur de thèse

à 10h30 à la Faculté des Sciences de l'Université de Nice – Sophia Antipolis

Remerciements

Mes premiers remerciements vont tout naturellement à mes directeurs de thèse Messieurs Julien Borgnino et François Martin. Ils ont su tout au long de ma thèse me faire profiter de leur grande expérience. Celle-ci ainsi que leur disponibilité et leur gentillesse ont beaucoup contribué à la réussite de ce travail. Je tiens aussi à remercier Aziz Ziad dont j'ai partagé le bureau durant ces trois années. Nos discussions enthousiastes m'ont constamment poussé vers plus de rigueur. Je dois aussi mentionner Andreï Tokovinin dont les brefs séjours au laboratoire ont été l'occasion d'un " brain storming " toujours bénéfique.

Je remercie Eric Fossat, le directoire du laboratoire pour m'avoir accueilli au sein de son unité, mais aussi pour nos discussions scientifiques impromptues et pour m'avoir initié au ski de randonnée. En ce qui concerne le ski de randonnée, je décerne une mention spéciale à Eric Aristidi, mon compagnon d'infortune qui a partagé avec moi les petites et grandes galères de ce sport exigeant. Je garderai de nos escapades alpines un souvenir mémorable. Je réserve une dédicace particulière à Jean-Michel, notre informaticien, qui a su réparé mes avatars informatiques avec diligence et efficacité caché derrière une " bougonnerie " bienveillante.

Bien sur, je remercie aussi chacun des membres du laboratoire qui, en répondant amicalement à mes sollicitations de toutes sortes, a contribué à cette ambiance conviviale et chaleureuse propice à l'épanouissement d'un jeune chercheur. Leur témoignage d'amitié restera l'un de mes grands souvenirs. Enfin, je remercie Renaud Foy et Chris Dainty d'avoir accepter de rapporter sur ma thèse et Denis Mourard pour avoir présider le jury. Je n'oublie pas non plus les examinateurs Jean-Marc Conan (aucune filiation !) et Norbert Hubin.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

La Haute Résolution Angulaire (HRA) regroupe toutes les techniques permettant d'étudier l'univers et ses composantes : galaxies, étoiles ... avec une définition élevée. Un grand précurseur est Michelson qui fut un des premiers à employer une technique interférométrique à des fins astronomiques à la fin du dix–neuvième siècle. Il put ainsi mesurer le diamètre de plusieurs étoiles [108]. Puis il a fallu attendre le début des années 1970, pour que l'ère moderne de la HRA débute réellement avec l'interférométrie des tavelures et l'interférométrie de Michelson remis au goût du jour par A. Labeyrie [80]. Ce dernier a réalisé un interféromètre stellaire avec deux sidérostats d'abord : I2T[1] puis avec deux télescopes indépendants : GI2T[2]. Depuis, l'interférométrie a constamment progressé comme le montrent les deux derniers projets d'interféromètres avec des grands télescopes que sont le "Keck interferometer" et le "Very Large Telescope Interferometer".

La HRA avec un télescope unique a longtemps été difficile du fait des limitations imposées par la turbulence atmosphérique. Babcock[12] en 1953 est le premier à suggérer l'usage d'une méthode permettant de corriger les aberrations causées par la turbulence. Mais il a fallu attendre 1986, pour qu'un premier système d'optique adaptative (OA) soit installé sur un télescope. Il s'agissait du prototype COME–ON[3] [132, 130] testé à l'Observatoire de Haute–Provence. Depuis, tous les nouveaux télescopes sont équipés ou vont être équipés d'un système d'optique adaptative. Citons par exemple, ADONIS[4] [21, 130] au télescope de 3,60 m de l'ESO à l'Observatoire de La Silla au Chili, PUEO[5] [6, 126] au CFHT[6] à l'Observatoire de Mauna Kea à Hawaii et NAOS[7] [34] à l'Observatoire du Paranal au Chili.

Le gain sur la résolution qui peut atteindre 10 msa pour un télescope avec un système d'OA et 1 msa pour un interféromètre a profité à tous les domaines de l'astrophysique comme la recherche de planètes exo–solaires, l'étude des systèmes stellaires multiples, l'étude de l'évolution stellaire, l'étude du système solaire, etc.

La HRA a aussi bénéficié des avancées de la recherche sur les effets optiques de la turbulence atmosphérique qui crée un champ aléatoire de fluctuations d'indice de

[1] Interféromètre à 2 Télescopes
[2] Grand Interféromètre à 2 Télescopes
[3] CGE Observatoire de Meudon ESO ONERA
[4] ADaptive Optics Near Infrared System
[5] Probe the Universe with Enhanced Optics
[6] Canada–France–Hawaii Telescope
[7] Nasmyth Adaptive Optics System

réfraction de l'air. La traversée d'une onde à travers ce champ aléatoire se traduit par des fluctuations aléatoires de l'amplitude et de la phase sur la pupille du télescope. La modélisation et la mesure des propriétés statistiques de ces fluctuations sont primordiales pour la spécification technique des instruments de la HRA et pour le choix d'un site astronomique susceptible d'accueillir ces instruments.

Le modèle de turbulence atmosphérique classique est issu des travaux de Kolmogorov[77, 76] et Tatarski[149, 150]. Plusieurs paramètres permettent de quantifier les effets optiques de la turbulence. Le paramètre de Fried[57] r_0 est un indicateur de la résolution limite que l'on peut obtenir sur un site donné si les aberrations introduites par la turbulence ne sont pas corrigées. L'angle d'isoplanétisme[58] θ_0 donne le domaine angulaire à l'intérieur duquel devrait se trouver la source de référence servant à la correction des effets de la turbulence. Le temps de cohérence τ_0 indique la durée pendant laquelle la turbulence reste inchangée. Sa valeur conditionne la valeur du temps d'exposition de tous les instruments effectuant des mesures pour la caractérisation des effets de la turbulence atmosphérique.

En plus de ces paramètres généraux, pour chaque technique des critères spécifiques sont utilisés afin de rendre compte des effets de la turbulence. Dans le cadre de l'OA pour laquelle la phase est reconstruite sur la base des polynômes de Zernike, on va calculer la variance des coefficients de ces polynômes, la variance des fluctuations de phase résiduelle ou encore le rapport de Strehl après correction. Pour l'interférométrie, le critère majeur est la différence de marche (ddm) aléatoire introduite par les fluctuations de phase entre deux télescopes séparés d'une distance B. Dans le modèle de Kolmogorov–Tatarski, cette ddm est proportionnelle à $B^{5/6}$. Or, il a été constaté expérimentalement que les valeurs de la ddm pour de grandes bases sont plus faibles que celles prédites par le modèle de Kolmogorov–Tatarski.

Pour comprendre cette atténuation de la ddm, il faut savoir que le modèle de Kolmogorov–Tatarski n'est valide que pour des valeurs de B incluses dans le domaine inertiel. La borne supérieure de ce domaine est fixée par l'échelle externe de turbulence. Une expression de cette grandeur géophysique a été donnée par Tatarski[150]. L'atténuation de la ddm est donc due à ce que la valeur de la base tend vers la valeur de la limite supérieure du domaine inertiel. D'autres modèles ont été proposés pour rendre compte de cet écart au modèle de Kolmogorov–Tatarski. Tous introduisent un nouveau paramètre l'échelle externe de cohérence spatiale du front d'onde $\mathcal{L}_0$ qui ne doit pas être confondue avec l'échelle externe de turbulence. Les deux paramètres sont définis selon des critères différents. Le modèle de Kolmogorov–Tatarski correspond au cas ou la valeur de $\mathcal{L}_0$ est infinie. Les effets introduits par les variations de l'échelle externe de cohérence spatiale du front d'onde sont au centre de cette thèse. Ils ont été étudiés pour certaines techniques HRA dans le cadre du modèle de Von Kármán . Ce modèle a été choisi car il est le plus souvent utilisé lorsque l'influence de $\mathcal{L}_0$ est prise en compte et parce qu'aucune preuve expérimentale n'est venue à l'heure actuelle infirmer ou confirmer un modèle précis.

La modélisation des effets de la turbulence atmosphérique pour la HRA avec le modèle de Von Kármán est plus délicate qu'avec le modèle de Kolmogorov–Tatarski. La plupart des grandeurs caractéristiques de la turbulence s'écrivent tout d'abord sous la forme d'une intégrale. Pour le modèle de Kolmogorov–Tatarski, la solution est souvent obtenue à partir des tables d'intégrales. Pour le modèle de Von Kármán , la solution n'est pas toujours dans les tables et l'intégration n'est pas triviale. Une solution est de recourir à l'intégration numérique. Une autre solution est de réaliser une simulation numérique de l'instrument pour laquelle l'effet de la turbulence atmosphérique est obtenu en générant des écrans de phase dont les propriétés statistiques obéissent au modèle de Von Kármán . L'inconvénient de ces méthodes est qu'elles nécessitent des moyens de calcul puissants et rapides qui ne sont pas toujours disponibles. De plus, il serait préférable d'obtenir une expression mathématique dont la signification physique serait plus évidente et qui pourrait être utilisée par la suite pour d'autres calculs.

La première partie de la thèse expose le formalisme mathématique qui va être utilisé tout au long du mémoire pour obtenir les expressions des différents paramètres de la HRA. Il s'agit d'une méthode d'intégration développée par R. Sasiela[137]. Cette méthode s'appuie sur les propriétés de la transformation de Mellin, des fonctions hypergéométriques et des fonctions gamma ainsi que sur le théorème des résidus. Les solutions obtenues sont des séries convergentes. Cette propriété de convergence assure un calcul rapide dont la précision est maîtrisée par le nombre de termes de la série intervenant dans la somme. Plusieurs intégrales généralisées sont calculées pour illustrer cette méthode. Les solutions de ces intégrales serviront par la suite lors du calcul de différentes grandeurs. On montrera ainsi que le calcul de quelques intégrales dépendant d'un petit nombre de paramètres permet d'obtenir la solution à plusieurs problèmes.

La modélisation des effets de la turbulence atmosphérique pour la HRA avec le modèle de Von Kármán est abordée dans la seconde partie. D'abord le modèle de Von Kármán est présenté et la différence entre l'échelle externe de cohérence spatiale et l'échelle externe de turbulence est expliquée. Les expressions de la variance, la covariance et la fonction de structure des fluctuations de phase sont données dans le cadre de ce modèle. L'influence de $\mathcal{L}_0$ sur la qualité d'une image au plan focal d'un télescope est aussi étudiée. En particulier, la largeur à mi–hauteur de la réponse impulsionnelle et le rapport de Strehl sont calculés. Pour les systèmes d'OA, on donne l'expression de la variance des coefficients des polynômes de Zernike, de la variance des fluctuations de phase résiduelle et du rapport de Strehl après correction. En interférométrie, l'expression de la ddm atmosphérique est donnée. Elle est calculée avec et sans correction par un suiveur de franges. L'ensemble de ces paramètres donne un aperçu de l'importance de $\mathcal{L}_0$ pour la HRA.

Pour évaluer les effets de $\mathcal{L}_0$ sur les performances des différentes techniques de la HRA, il fallait un instrument capable de mesurer $\mathcal{L}_0$. Le "Generalized Seeing Monitor" (GSM) a été conçu dans ce but. La troisième partie présente cet instrument et les résultats de l'analyse de la base de données qui a été constituée au cours des campagnes de mesures. Dans un premier temps, l'instrument et son principe de mesure sont décrits. Tous les traitements des données en temps réel et en temps différé sont passés en revue.

Ensuite, un résumé de chacune des missions est donné avec la présentation des valeurs de r_0, θ_0 et $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ mesurées sur chacun des sites. Les corrélations temporelles des angles d'arrivée (AA) mesurés au moyen du GSM ont fait l'objet d'une étude particulière. Les buts initiaux étaient la détermination du nombre de couches turbulentes prédominantes dans l'atmosphère et la mesure de la vitesse et de la direction du vent dans ces couches. Les objectifs n'ont pu qu'être partiellement réalisés. Les difficultés rencontrées inhérentes à l'anisotropie de la covariance spatiale des AA et les conclusions qui en ont été déduites sont exposées. Pour finir, une étude statistique des valeurs de la variance des coefficients des polynômes de Zernike, de la variance des fluctuations de phase résiduelle et du rapport de Strehl après correction a été menée. Ce sont les valeurs attendues sur le site de l'Observatoire du Paranal avec les valeurs de r_0 et $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ mesurées au moyen du GSM. Elles sont calculées à partir des résultats obtenus pour l'OA dans la seconde partie.

Première partie

Bases mathématiques et intégrales généralisées

Introduction

Les expressions mathématiques des grandeurs physiques que l'on rencontre fréquemment en Haute Résolution Angulaire peuvent s'écrire pour la plupart sous la forme d'une intégrale dont l'intégrant est le produit du spectre de la grandeur considérée par une fonction de filtrage. Souvent, cette fonction de filtrage est elle même égale au produit d'une ou de plusieurs fonctions de Bessel par une fonction élémentaire. Par exemple, la fonction de Bessel la plus courante est celle introduite par le filtrage imposé par une pupille circulaire. La solution de ces intégrales n'étant pas triviale, on a souvent recours à l'intégration numérique.

Du fait de la présence des fonctions de Bessel, l'intégrant est une fonction oscillante de la variable d'intégration. Par conséquent, l'algorithme d'intégration numérique à mettre en œuvre pour obtenir une valeur suffisament précise de l'intégrale devra adapter la dimension du pas d'intégration à la fréquence des oscillations en fonction de la valeur de la variable d'intégration. Ce genre d'algorithme est très couteux en temps de calcul ce qui peut être pénalisant pour des applications temps réel comme la boucle fermée d'un système d'optique adaptative ou d'un compensateur de différence de marche atmosphérique.

Cette partie montre de quelle manière il est possible de résoudre de telles intégrales. La méthode utilisée a été développée au début des années 1990 par R.J. Sasiela [137, 139]. Cet auteur utilise les propriétés de la transformation de Mellin, des fonctions hypergéométriques généralisées et des fonctions gamma pour exprimer la solution soit sous la forme de fonctions connues, soit sous la forme de séries. Les séries que l'on obtient ont la propriété de converger rapidement. La solution des intégrales sera donc obtenue par le calcul numérique de sommes pour lesquelles seul un petit nombre d'itérations est suffisant pour obtenir une précision du résultat équivalente à celle donnée par l'intégration numérique. Le calcul numérique d'une somme étant parmi les plus rapides des opérations de programmation, le gain en temps de calcul est considérable.

Le premier chapitre de cette partie rappelle les propriétés de la transformation de Mellin, des fonctions hypergéométriques généralisées et des fonctions gamma. La liste des transformations de Mellin dont nous aurons besoin y est aussi donnée. Le second chapitre expose les méthodes d'intégrations dans différents cas et chacun est illustré d'exemples.

Chapitre 1

Bases mathématiques

*

1.1 La transformation de Mellin

1.1.1 Définition

La transformée de Mellin de la fonction $h(x)$ est définie par

$$h(x) \to H(s) \equiv \mathcal{M}\left[h(x)\right](s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} h(x) x^s \tag{1.1}$$

où s appartient au corps des complexes $\mathbb{C}$. L'intégrale est définie si

$$|xh(x)| < 1 \text{ pour } x \to +\infty.$$

La transformation inverse s'écrit

$$h(x) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\eta - j\infty}^{\eta + j\infty} \mathrm{d}s H(s) x^{-s} \tag{1.2}$$

Cette intégrale est définie uniquement pour des valeurs de $\mathrm{Re}(s)$ contenues à l'intérieur d'un certain intervalle. η est inclus dans cet intervalle.

1.1.2 Propriétés de la transformation de Mellin

L'auto-similarité

Les propriétés d'auto–similarité de la transformation de Mellin permettent d'élargir son champ d'application. Voici celles dont nous ferons force usage :

$$\mathcal{M}\left[h(ax)\right](s) \quad = \quad a^{-s} H(s), \quad a > 0; \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left[x^{\nu}h(x)\right](s) &= H(s+\nu), \quad \nu \in \mathbb{C}; & (1.4)\\ \mathcal{M}\left[h(x^{p})\right](s) &= \frac{1}{|p|}H\left(\frac{s}{p}\right), \quad p \neq 0. & (1.5)\end{aligned}$$

La convolution multiplicative

La convolution multiplicative $h(x)$ de deux fonctions $h_0(x)$ et $h_1(x)$ est définie par

$$h(x) = h_0(x) \otimes h_1(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y} h_0(y) h_1\left(\frac{x}{y}\right) \tag{1.6}$$

On montre aisément que la transformée de Mellin $H(s)$ de $h(x)$ s'écrit

$$H(s) = H_0(s)H_1(s), \tag{1.7}$$

où $H_0(s)$ et $H_1(s)$ sont les transformées de Mellin respectives de $h_0(x)$ et $h_1(x)$. La transformation de Mellin inverse (Eq.(1.2)) nous permet de ré–écrire $h(x)$

$$h(x) = \frac{1}{(2j\pi)} \int_{\eta-j\infty}^{\eta+j\infty} \mathrm{d}s H_0(s)H_1(s)x^{-s}. \tag{1.8}$$

Cette propriété de la transformation de Mellin peut se généraliser au cas à N paramètres. Soit la fonction

$$h(x_1,\ldots,x_N) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y} h_0(y) \prod_{k=1}^{N} h_k\left(\frac{x_k}{y}\right), \tag{1.9}$$

compte tenu de l'Eq.(1.7), sa transformée de Mellin $H(s_1,\ldots,s_N)$ est donnée par

$$H(s_1,\ldots,s_N) = H_0\left(\sum_{k=1}^{N} s_k\right) \prod_{k=1}^{N} H_k(s_k) \tag{1.10}$$

Par extension de la transformation de Mellin inverse à une dimension Eq.(1.2) au plan complexe à N dimensions, on obtient finalement

$$h(x_1,\ldots,x_N) = \frac{1}{(2j\pi)^N} \int_{\eta_1-j\infty}^{\eta_1+j\infty} \cdots \int_{\eta_N-j\infty}^{\eta_N+j\infty} \mathrm{d}s_1\ldots\mathrm{d}s_N H(s_1,\ldots,s_N) \prod_{k=1}^{N} x_k^{-s_k} \tag{1.11}$$

Cette propriété remarquable de la transformation de Mellin est à la base de la méthode de résolution d'intégrale.

1.2 La fonction gamma et la fonction hypergéométrique généralisée

Deux types de fonctions vont souvent être utilisés par la suite. Il s'agit de la fonction hypergéométrique généralisée et de la fonction gamma. Nous rappelons ici certaines de leurs propriétés.

1.2.1 La fonction gamma

Définition

La fonction gamma est définie par

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \mathcal{M}\left[\exp(-x)\right](s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\,\exp(-x)x^{s-1}, \quad s \in \mathbb{C} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{s+n} + \int_1^{+\infty} \mathrm{d}x\,\exp(-x)x^{s-1}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Par application de la propriété de la convolution multiplicative, nous pourrons avoir à convertir certaines intégrales comme des intégrales dans le plan complexe de la transformée de Mellin de l'intégrant des intégrales de départ. Nous verrons dans la section suivante que la transformée de Mellin $H(s)$ est proportionnelle à un rapport de produit de fonctions gamma si $h(x)$ s'exprime comme une fonction hypergéométrique généralisée. Nous devons donc connaître les singularités de $\Gamma(s)$ et de $1/\Gamma(s)$.

Puisque la dernière intégrale de l'Eq.(1.12) est entière, les seules singularités de $\Gamma(s)$ se situent aux pôles simples $s = -n$. La valeur du résidu en un pôle est $(-1)^n/n!$. Par contre, la fonction $1/\Gamma(s)$ est parfaitement définie et ne présente aucune singularité.

Propriétés

La relation de récurrence :

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \tag{1.13}$$

Si s est un entier positif $\Gamma(s+1) = s!$.

La formule de multiplication de Gauss–Legendre :

$$\Gamma(my) = m^{my-1/2}(2\pi)^{(1-m)/2}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(y+\frac{k}{m}\right). \tag{1.14}$$

Pour $m = 2$, elle s'écrit

$$\Gamma(2y) = \frac{2^{2y-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(y\right)\Gamma\left(y+\frac{1}{2}\right). \tag{1.15}$$

La formule de duplication :

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}. \tag{1.16}$$

1.2.2 La fonction hypergéométrique généralisée

La fonction hypergéométrique généralisée est définie par

$$ {}_pF_q \left[\begin{array}{c} (a); z \\ (b) \end{array} \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\prod\limits_{n=1}^{p} (a_n)_k}{\prod\limits_{m=1}^{q} (b_m)_k} \frac{z^k}{k!} \tag{1.17}$$

où z appartient au corps des complexes, $(a) = a_1, \ldots, a_p$ et $(b) = b_1, \ldots, b_q$ et $(a_n)_k$ est défini par le symbole de Pochhammer

$$(a_n)_k = \frac{\Gamma(a_n + k)}{\Gamma(a_n)}. \tag{1.18}$$

La fonction hypergéométrique généralisée est une généralisation de la fonction hypergéométrique de Gauss $F\left[a, b; c; z\right]$ définie par

$$F\left[a, b; c; z\right] = {}_2F_1 \left[\begin{array}{c} a, b; z \\ c \end{array} \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}. \tag{1.19}$$

La fonction hypergéométrique généralisée converge pour

- $p = q + 1$ et $|z| < 1$,
- $z = 1$ et $\mathrm{Re}\left\{ \sum\limits_{n=1}^{p} a_n - \sum\limits_{m=1}^{q} b_m \right\} < 0$,
- $p < q + 1 \quad \forall z$.

Si $p > q + 1$, elle ne converge pas. Une nouvelle notation est introduite ici :

$$\Gamma \left[\begin{array}{c} (a) \\ (b) \end{array} \right] = \Gamma \left[\begin{array}{c} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{array} \right] = \frac{\prod\limits_{n=1}^{p} \Gamma(a_n)}{\prod\limits_{m=1}^{q} \Gamma(b_m)}. \tag{1.20}$$

Elle permet de ré–écrire, les fonctions hypergéométriques généralisées sous la forme

$$ {}_pF_q \left[\begin{array}{c} (a); z \\ (b) \end{array} \right] = \Gamma \left[\begin{array}{c} (a) \\ (b) \end{array} \right] \sum_{k=0}^{+\infty} \Gamma \left[\begin{array}{c} (a) + k \\ (b) + k \end{array} \right] \frac{z^k}{k!}. \tag{1.21}$$

La fonction hypergéométrique généralisée peut aussi s'exprimer sous la forme d'une intégrale dite de Mellin–Barnes

$$ {}_pF_q \left[\begin{array}{c} (a); z \\ (b) \end{array} \right] = \Gamma \left[\begin{array}{c} (a) \\ (b) \end{array} \right] \frac{1}{2j\pi} \int\limits_{\eta - j\infty}^{\eta + j\infty} \mathrm{d}s (-z)^s \Gamma \left[\begin{array}{c} (a) + s, -s \\ (b) \end{array} \right] \tag{1.22}$$

L'analogie entre cette intégrale et la transformation de Mellin inverse Eq.(1.2) est évidente. On en déduit donc que si $h(x)$ peut s'écrire sous la forme de fonctions hypergéométriques généralisées alors sa transformée de Mellin $H(s)$ sera proportionnelle à un rapport de produit de fonctions gamma. Ceci est la clef pour résoudre les intégrales qui nous intéressent.

Une très grande variété de fonctions usuelles peuvent s'écrire comme des fonctions hypergéométriques généralisées et en particulier toutes celles utiles aux problèmes étudiés ici. La transformée de Mellin de ces fonctions est donnée ci–dessous.

Fonctions élémentaires

$$\begin{aligned}
1 &\rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{s+\varepsilon}-\frac{1}{s-\varepsilon}\right], \quad -\varepsilon < \mathrm{Re}(s) < \varepsilon && (1.23)\\
\exp(-x) &\rightarrow \Gamma(s), \quad \mathrm{Re}(s) > 0 && (1.24)\\
(1+x)^{-p} &\rightarrow \Gamma\left[\begin{array}{c} s, p-s \\ p \end{array}\right], \quad 0 < \mathrm{Re}(s) < \mathrm{Re}(p) && (1.25)
\end{aligned}$$

Fonctions spéciales

$$\begin{aligned}
J_\alpha(x) &\rightarrow 2^{s-1}\Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{s}{2}+\frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2}+1-\frac{s}{2} \end{array}\right], \quad -\mathrm{Re}(\alpha) < \mathrm{Re}(s) < \frac{3}{2} && (1.26)\\
J_\alpha^2(x) &\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{s}{2}+\alpha, \frac{1}{2}-\frac{s}{2} \\ \alpha+1-\frac{s}{2}, 1-\frac{s}{2} \end{array}\right], \\
&\qquad -2\mathrm{Re}(\alpha) < \mathrm{Re}(s) < 1 && (1.27)\\
J_\alpha(x)J_\beta(x) &\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{s}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{1}{2}-\frac{s}{2}, 1-\frac{s}{2} \\ 1-\frac{s}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}, 1-\frac{s}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}, 1-\frac{s}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2} \end{array}\right], \\
&\qquad -\mathrm{Re}(\alpha+\beta) < \mathrm{Re}(s) < 1 && (1.28)\\
K_\alpha(x) &\rightarrow 2^{s-2}\Gamma\left[\frac{s}{2}+\frac{\alpha}{2}, \frac{s}{2}-\frac{\alpha}{2}\right], \quad \mathrm{Re}(s) > |\mathrm{Re}(\alpha)| && (1.29)
\end{aligned}$$

$J_\alpha(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce et $K_\alpha(x)$ est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce encore appelée fonction de McDonald [4]. Par la suite, nous aurons besoin de la représentation intégrale des fonctions de Bessel $J_\alpha(x)$ pour $\alpha = n$ entier,

$$J_n(x) = (\pm 1)^n \frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \cos(n\theta) \exp\left[\pm ix\cos(\theta)\right] \tag{1.30}$$

A partir de ces deux expressions, on en déduit aisément la relation suivante

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left\{\begin{array}{c} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{array}\right\} \exp\left[\pm ix\cos(\theta-\nu)\right] = (\pm 1)^n 2\pi i^n \left\{\begin{array}{c} \cos(n\nu) \\ \sin(n\nu) \end{array}\right\} J_n(x). \tag{1.31}$$

Nous aurons aussi à traiter plusieurs fois le cas le la transformée de Mellin de la différence entre la fonction de Bessel $J_\alpha(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}^+$) et le premier terme de son développement en série. Le développement en série de $J_\alpha(x)$ s'écrit

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{1.32}$$

Le premier terme est $\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha$. Nous devons donc déterminer la transformation

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}\left[J_\alpha(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\right](s) = \\ &\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{2^{s-1}\Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{s}{2}+\frac{\alpha}{2}\\ \frac{\alpha}{2}+1-\frac{s}{2}\end{array}\right] - \frac{2^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\frac{1}{s+\alpha+\varepsilon} - \frac{1}{s+\alpha-\varepsilon}\right]\right\}, \\ &\qquad -\alpha < \mathrm{Re}(s) < \varepsilon - \alpha. \end{aligned} \tag{1.33}$$

La transformée de Mellin de $J_\alpha(x)$ est donnée par l'Eq.(1.26) et celle de $\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha$ est obtenue avec les Eqs.(1.23) et (1.4). Les singularités de cette expression se situent aux pôles

$$s = -2n - \alpha, -\alpha - \varepsilon \text{ et } -\alpha + \varepsilon.$$

A la limite et pour $n = 0$, les résidus des pôles $s = -\alpha$ et $s = -\alpha - \varepsilon$ se compensent exactement. Ceci a pour effet de prolonger l'intervalle de $Re(s)$ au pôle suivant $s = -2 - \alpha$ puisque la singularité en $s = -\alpha$ a été levée. Le pôle $\varepsilon - \alpha$ n'apporte aucune contribution car il n'est pas inclus dans le domaine valide pour $Re(s)$. Par conséquent, la transformée de Mellin est égale à

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left[J_\alpha(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\right](s) &= \Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{s*}{2}+\frac{\alpha}{2}\\ \frac{\alpha}{2}+1-\frac{s}{2}\end{array}\right], \\ &\qquad -2-\alpha < \mathrm{Re}(s) < -\alpha. \end{aligned} \tag{1.34}$$

La notation $s*$ est introduite pour rappeler que le chemin d'intégration a été déplacé d'un pôle et donc, que la somme des résidus se fera à partir de $n = 1$.

Une autre transformation dont nous aurons besoin est

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}\left\{\left[J_\alpha(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\right]^2\right\}(s) = \\ &\quad \mathcal{M}\left[J_\alpha^2(x) + \frac{1}{\Gamma^2(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha} - \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha J_\alpha(x)\right](s) = \\ &\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{s}{2}+\alpha, \frac{1}{2}-\frac{s}{2}\\ \alpha+1-\frac{s}{2}, 1-\frac{s}{2}\end{array}\right]\right. \\ &\qquad\quad + \frac{2^{-2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)}\left[\frac{1}{s+2\alpha+\varepsilon} - \frac{1}{s+2\alpha-\varepsilon}\right] \end{aligned}$$

$$-\frac{2^s}{\Gamma(\alpha+1)}\Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{s}{2}+\alpha\\ 1-\frac{s}{2}\end{array}\right]\Bigg\},$$
$$-2\alpha < \mathrm{Re}(s) < \varepsilon - 2\alpha. \tag{1.35}$$

Les singularités de cette expression se situent aux pôles

$$s = -2n - 2\alpha, 2n+1, -\varepsilon - 2\alpha \text{ et } \varepsilon - 2\alpha.$$

A la limite et pour $n = 0$, les résidus des pôles $s = -2\alpha$ et $s = -\varepsilon - 2\alpha$ s'annulent. L'intervalle de validité pour $Re(s)$ est donc prolongé jusqu'à $-2-2\alpha$. Le pôle $s = \varepsilon - 2\alpha$ étant exclu de cet intervalle, on obtient

$$\mathcal{M}\left\{\left[J_\alpha(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\right]^2\right\}(s) =$$
$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{s*}{2}+\alpha, \frac{1}{2}-\frac{s*}{2}\\ \alpha+1-\frac{s}{2}, 1-\frac{s}{2}\end{array}\right] - \frac{2^s}{\Gamma(\alpha+1)}\Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{s}{2}+\alpha\\ 1-\frac{s}{2}\end{array}\right] \tag{1.36}$$

avec $-2-2\alpha < \mathrm{Re}(s) < -2\alpha$.

Chapitre 2

Calcul d'intégrales généralisées

Les différentes méthodes d'intégration sont classées selon le nombre de paramètres de l'intégrant. Un paramètre correspond à une variable x_k dans l'Eq.(1.9). Le nombre de paramètres est donné par la valeur de N dans cette équation. Toutes les intégrales sont calculées dans $\mathbb{R}$.

2.1 L'intégration à zéro paramètre

Dans le cas zéro paramètre, le cas le plus simple, l'intégrale à résoudre est donnée par l'Eq.(1.1). Cela revient donc à calculer la transformée de Mellin de l'intégrant. En pratique, on trouve la solution dans les tables de transformées de Mellin comme celle donnée dans la section 1.2.2 ou dans des tables plus exhaustives comme celle de Marichev [97]. La solution à beaucoup d'intégrales ainsi résolues se trouve aussi dans les tables d'intégrales comme celle de Gradshteyn & Ryzhik [67].

2.1.1 Exemple

Exemple 1

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^\mu \left[1 + (ax)^q\right]^{-p}, \quad q, p \in \mathbb{R}^+ \tag{2.1}$$

Avec la transformée de Mellin de $(1-x)^{-p}$ donnée par l'Eq.(1.25) et les relations d'auto–similarité des Eqs.(1.3) et (1.5), la solution est

$$I = \frac{a^{-\mu/q}}{q} \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{\mu}{q}, p - \frac{\mu}{q} \\ p \end{array} \right], \qquad 0 < \mathrm{Re}(s) < qp \tag{2.2}$$

2.2 L'intégration à un paramètre

2.2.1 Description de la méthode

Le cas un paramètre intervient lorsque le cas zéro paramètre a échoué c'est–à–dire lorsque aucune solution n'a été trouvée dans les tables. Pour cette situation, l'intégrale à résoudre est ré–écrite sous la forme de l'intégrale de l'Eq.(1.6). Puis en utilisant les propriétés de la convolution multiplicative, cette intégrale s'identifie à une intégrale de Mellin–Barnes

$$h(x) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\eta - j\infty}^{\eta + j\infty} \mathrm{d}s\, x^{-s} \frac{\prod_{k=1}^{A} \Gamma(a_k + \alpha_k s) \prod_{k=1}^{B} \Gamma(b_k - \beta_k s)}{\prod_{k=1}^{C} \Gamma(c_k + \gamma_k s) \prod_{k=1}^{D} \Gamma(d_k - \delta_k s)}. \tag{2.3}$$

La solution à cette intégrale est obtenue par la méthode des résidus.

En vertu des propriétés des fonctions gamma (cf. section 1.2.1), les singularités de l'intégrant sont données par les pôles simples des fonctions gamma du numérateur : $s_n = -(n + a_k)/\alpha_k$ et $s_n = (n + b_k)/\beta_k$ qui ont respectivement pour résidus

$$\frac{x^{-s_n}}{\alpha_k} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\prod_{k=1}^{B} \Gamma(b_k - \beta_k s_n)}{\prod_{k=1}^{C} \Gamma(c_k + \gamma_k s_n) \prod_{k=1}^{D} \Gamma(d_k - \delta_k s_n)} \tag{2.4}$$

et

$$\frac{x^{-s_n}}{\beta_k} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\prod_{k=1}^{A} \Gamma(a_k + \alpha_k s_n)}{\prod_{k=1}^{C} \Gamma(c_k + \gamma_k s_n) \prod_{k=1}^{D} \Gamma(d_k - \delta_k s_n)}. \tag{2.5}$$

Le résultat final est

$$h(x) = \sum_n G(s_n) \tag{2.6}$$

où $G(s_n)$ est le résidu au pôle s_n déduit de l'Eq.(2.4) ou de l'Eq.(2.5). La somme s'effectue sur tous les pôles contenus à l'intérieur du domaine d'intégration.

Posons $\mathrm{In}(s)$, l'intégrant de l'intégrale de l'Eq.(2.3) qui s'écrit alors

$$h(x) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\eta - j\infty}^{\eta + j\infty} \mathrm{d}s\, \mathrm{In}(s). \tag{2.7}$$

Le contour d'intégration peut être clos dans le demi–plan droit ou dans le demi–plan gauche comme le montre la figure 2.1 et l'intégrale sur le contour fermé est égale à la

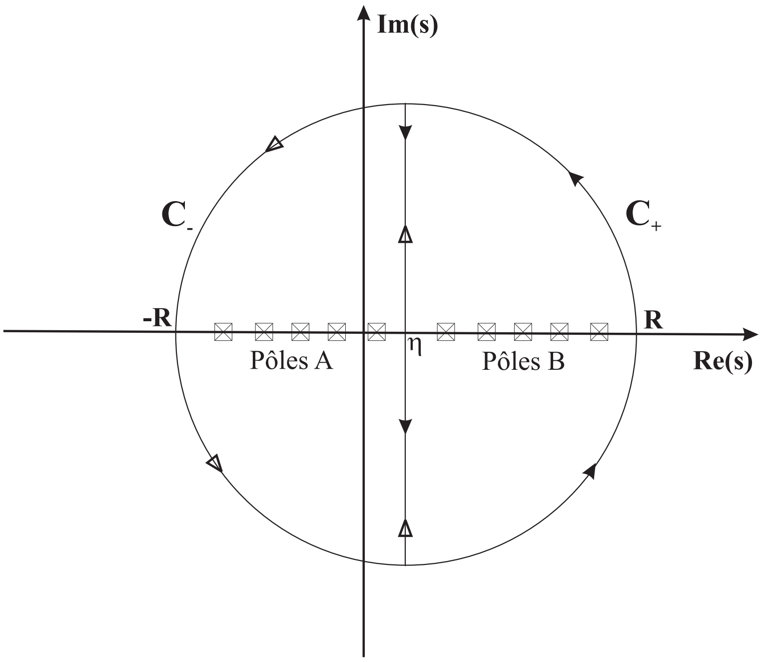


FIG. 2.1 – Les contours d'intégration C_- et C_+.

somme des résidus à l'intérieur de ce contour,

$$\oint \mathrm{d}s\,\mathrm{In}(s) = 2j\pi \sum_n G(s_n). \tag{2.8}$$

Cette intégrale est aussi égale à la somme de l'intégrale sur la droite parallèle à l'axe représentant la partie imaginaire de s et de l'intégrale sur le demi–cercle infini C_- ou C_+,

$$\oint \mathrm{d}s\,\mathrm{In}(s) = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\eta-jR}^{\eta+jR} \mathrm{d}s\,\mathrm{In}(s) + \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_-\ \text{ou}\ C_+} \mathrm{d}\theta\,\mathrm{In}\left(R\exp(j\theta)\right) Rj\exp(j\theta). \tag{2.9}$$

avec $s = R\exp(j\theta)$.

Pour les valeurs positives de s, la dernière intégrale est nulle si $\mathrm{In}(s)$ décroît plus rapidement que $1/s$ lorsque s tend vers l'infini. Pour les valeurs négatives de s, il faut étudier le comportement asymptotique de $\mathrm{In}(s)$ pour $s \to -\infty$. Cette étude effectuée par Sasiela montre que le choix du demi–cercle infini C_- ou C_+ pour clore le contour ne dépend que d'un seul paramètre Δ,

$$\Delta = \left(\sum_{k=1}^{A} \alpha_k - \sum_{k=1}^{B} \beta_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{C} \gamma_k - \sum_{k=1}^{D} \delta_k\right). \tag{2.10}$$

	Critère	Contour	Pôles	Convergence
1.	$\Delta > 0$	C_-	$-(n+a_k)/\alpha_k$	$\forall x$
2.	$\Delta < 0$	C_+	$(n+b_k)/\beta_k$	$\forall x$
3.	$\Delta = 0$ & $\lvert x\rvert > 1$	C_+	$(n+b_k)/\beta_k$	$\forall\ \lvert x\rvert > 1$
4.	$\Delta = 0$ & $\lvert x\rvert < 1$	C_-	$-(n+a_k)/\alpha_k$	$\forall\ \lvert x\rvert < 1$
5.	$\Delta = 0$ & $\lvert x\rvert = 1$	cas non abordé ici		

TAB. 2.1 – Choix du demi-cercle infini, des pôles et du domaine de convergence en fonction de la valeur de Δ.

Le tableau 2.1 résume, selon la valeur de Δ, le choix du contour, la valeur des pôles et le domaine de convergence.

Toutes les séries obtenues dans le cadre des critères 1, 2, 3 et 4 sont des séries convergentes dites séries de Taylor. Pour les critères 3 et 4, on obtient deux séries pour $|x| > 1$ et $|x| < 1$. Ces séries convergent rapidement exceptées pour des valeurs proches de $|x| = 1$. Les séries issues des cas 1 et 2 convergent pour tout x. Cependant, pour $x \gg 1$, la convergence est lente et beaucoup de termes sont requis. Dans ces conditions, il est souvent plus intéressant de remplacer la série de Taylor par une série asymptotique.

La série asymptotique est obtenue en décalant le chemin d'intégration dans la direction de "steepest–descent" jusqu'à un point de selle. La série asymptotique est la somme de la contribution des pôles compris entre l'ancien chemin d'intégration et le nouveau plus la solution de l'intégration par la méthode "steepest–descent".

L'expression des résidus des pôles compris entre l'ancien chemin d'intégration et le nouveau est obtenu en fermant le contour d'intégration dans le demi–plan opposé à celui dans lequel était fermé le contour de la série de Taylor c'est–à–dire avec C_+ pour $\Delta > 0$ et C_- pour $\Delta < 0$. Le nombre de résidus à prendre en considération est fixé par la valeur du point de selle.

2.2.2 Exemples

Exemple 1

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^\mu J_\alpha(x) \exp\left[-\left(\frac{a}{x}\right)^{-q}\right], \quad q \in \mathbb{R}^+;\ \alpha, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Posons

$$h_0(x) = x^\mu J_\alpha(x), \tag{2.12}$$

et

$$h_1(x) = \exp\left(-x^{-q}\right). \tag{2.13}$$

La transformée de Mellin de l'Eq.(1.26) et la relation de l'Eq.(1.4) donnent la transformée de Mellin $H_0(s)$ de $h_0(x)$,

$$H_0(s) = 2^{s+\mu-1}\Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{s+\mu}{2} + \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{s+\mu}{2} \end{array}\right], \quad -\mu - \alpha < \mathrm{Re}(s) < \frac{3}{2} - \mu \tag{2.14}$$

La transformée de Mellin $H_1(s)$ de $h_1(x)$ est obtenue en utilisant les Eqs.(1.24) et (1.5),

$$H_1(s) = \frac{1}{q}\Gamma\left(-\frac{s}{q}\right), \quad \mathrm{Re}(s) < 0 \tag{2.15}$$

En vertu du théorème de convolution multiplicative, l'Eq.(2.11) se ré–écrit

$$I = \frac{2^{\mu-1}}{q}\frac{1}{2j\pi}\int\limits_{\eta-j\infty}^{\eta+j\infty} \mathrm{d}s\Gamma\left[\begin{array}{c} -\frac{s}{q}, \frac{s+\mu}{2} + \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{s+\mu}{2} \end{array}\right]\left(\frac{a}{2}\right)^{-s} \tag{2.16}$$

Cette intégrale existe si $\mu > -\alpha$ d'après les Eq.(2.14) et (2.15). Effectuons le changement de variable $s \to 2qs$,

$$I = 2^{\mu}\frac{1}{2j\pi}\int\limits_{\eta-j\infty}^{\eta+j\infty} \mathrm{d}s\Gamma\left[\begin{array}{c} -2s, qs + \frac{\mu+\alpha}{2} \\ \frac{\alpha-\mu}{2} + 1 - qs \end{array}\right]\left(\frac{a}{2}\right)^{-2qs} \tag{2.17}$$

$\Delta = 2(q-1)$. Si $q > 1$ ou $q = 1$ et $|a| < 1$, le contour d'intégration est fermé avec C_- et le pôle est $s = -\frac{1}{q}\left(n + \frac{\mu+\alpha}{2}\right)$. On obtient

$$I = \frac{2^{\mu}}{q}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{2}{q}\left(n + \frac{\mu+\alpha}{2}\right) \\ n + \alpha + 1 \end{array}\right]\left(\frac{a}{2}\right)^{-2n+\mu+\alpha} \tag{2.18}$$

Si $q < 1$ ou $q = 1$ et $|a| > 1$, le contour d'intégration est fermé avec C_+ et le pôle est $s = n/2$. On trouve

$$I = 2^{\mu-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{\mu+\alpha+qn}{2} \\ \frac{\alpha-\mu-qn}{2} + 1 \end{array}\right]\left(\frac{a}{2}\right)^{-qn}. \tag{2.19}$$

Exemple 2

$$I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}x^{\mu}J_{\alpha}(x)\left[1 + \left(\frac{a}{x}\right)^{-q}\right]^{-p}, \quad q, p \in \mathbb{R}^+;\ \alpha, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

$h_0(x)$ et $H_0(s)$ sont données par les Eqs.(2.12) et (2.14), respectivement. On pose

$$h_1(x) = (1 - x^{-q})^{-p}. \tag{2.21}$$

Sa transformée de Mellin $H_1(s)$ est obtenue avec les Eq.(1.25) et (1.5)

$$H_1(s) = \frac{1}{q}\Gamma\left[\begin{array}{c} -\frac{s}{q}, p+\frac{s}{q} \\ p \end{array}\right], -qp < \mathrm{Re}(s) < 0 \tag{2.22}$$

Par le théorème de convolution et en effectuant le changement de variable $s \to 2qs$, l'Eq.(2.20) se ré–écrit

$$I = \frac{2^\mu}{\Gamma(p)}\frac{1}{2j\pi}\int\limits_{\eta-j\infty}^{\eta+j\infty} \mathrm{d}s\Gamma\left[\begin{array}{c} qs+\frac{\alpha+\mu}{2}, -2s, p+2s \\ \frac{\alpha-\mu}{2}+1-qs \end{array}\right]\left(\frac{a}{2}\right)^{-2qs}. \tag{2.23}$$

Cette intégrale est définie pour $\mu+\alpha > 0$. Puisque $\Delta = 2q > 0$, le contour d'intégration est fermé avec C_- et les pôles sont :
$s = -\frac{1}{q}\left(n+\frac{\alpha+\mu}{2}\right)$ et $s = -\frac{n+p}{2}$,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2^\mu}{\Gamma(p)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} \\ &\times\left\{\frac{1}{q}\Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{2}{q}\left(n+\frac{\alpha+\mu}{2}\right), p-\frac{2}{q}\left(n+\frac{\alpha+\mu}{2}\right) \\ n+1+\alpha \end{array}\right]\left(\frac{a}{2}\right)^{2n+\alpha+\mu}\right. \\ &\left.+\frac{1}{2}\Gamma\left[\begin{array}{c} -q\frac{n+p}{2}+\frac{\alpha+\mu}{2}, n+p \\ \frac{\alpha-\mu}{2}+1+q\frac{n+p}{2} \end{array}\right]\left(\frac{a}{2}\right)^{q(n+p)}\right\}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Pour le cas particulier où $q=2$ et $\mu = \alpha+2$, l'Eq.(2.23) s'écrit

$$I = \frac{2^\mu}{\Gamma(p)}\frac{1}{2j\pi}\int\limits_{\eta-j\infty}^{\eta+j\infty} \mathrm{d}s\Gamma\left[2s+\alpha+1, p+2s\right]\left(\frac{a}{2}\right)^{-4s}. \tag{2.25}$$

En effectuant le changement de variable $s \to [s-(\alpha+1+p)]/4$, elle devient

$$\begin{aligned} I &= \frac{2^\mu}{\Gamma(p)}\left(\frac{a}{2}\right)^{\alpha+1+p} \\ &\times\frac{1}{2j\pi}\int\limits_{\eta-j\infty}^{\eta+j\infty} \mathrm{d}s 2^{s-2}\Gamma\left[\frac{s}{2}-\frac{p-\alpha-1}{2}, \frac{s}{2}+\frac{p-\alpha-1}{2}\right]a^{-s}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Dans l'intégrant, on reconnaît la transformée de Mellin de la fonction $K_\alpha(x)$ donnée par l'Eq.(1.29). On en déduit donc que I est égale à

$$I = \frac{2^\mu}{\Gamma(p)}\left(\frac{a}{2}\right)^{\alpha+1+p} K_{p-\alpha-1}(a) \tag{2.27}$$

Exemple 3

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^\mu J_\alpha^2(x) \left[1 + \left(\frac{a}{x}\right)^{-q}\right]^{-p}, \quad q, p \in \mathbb{R}^+;\ \alpha, \mu \in \mathbb{R} \tag{2.28}$$

On a

$$h_0(x) = x^\mu J_\alpha^2(x) \tag{2.29}$$

et

$$H_0(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{s+\mu}{2} + \alpha, \frac{1}{2} - \frac{s+\mu}{2} \\ \alpha + 1 - \frac{s+\mu}{2}, 1 - \frac{s+\mu}{2} \end{array} \right], -2\alpha - \mu < \mathrm{Re}(s) < 1 - \mu \tag{2.30}$$

avec l'aide des Eqs.(1.27) et (1.4). Les fonctions $h_1(x)$ et $H_1(s)$ sont les mêmes que précédemment. Avec les Eqs.(2.29), (2.30), (2.21) et (2.22), le théorème de convolution et le changement de variable $s \to 2qs$, on obtient pour I

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(p)} \frac{1}{2j\pi} \int_{\eta - j\infty}^{\eta + j\infty} \mathrm{d}s \Gamma \left[\begin{array}{c} qs + \frac{2\alpha+\mu}{2}, \frac{1}{2} - qs - \frac{\mu}{2}, -2s, p + 2s \\ \frac{2\alpha-\mu}{2} + 1 - qs, 1 - qs - \frac{\mu}{2} \end{array} \right] a^{-2qs} \tag{2.31}$$

Cette intégrale existe pour $\mu + 2\alpha > 0$. Avec $\Delta = 2q > 0$, les pôles sont $s = -\frac{1}{q}\left(n + \frac{2\alpha+\mu}{2}\right)$ et $s = -\frac{n+p}{2}$ et I est égale à :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &\times \left\{ \frac{1}{q} \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} + n + \alpha, \frac{2}{q}\left(n + \frac{2\alpha+\mu}{2}\right), p - \frac{2}{q}\left(n + \frac{2\alpha+\mu}{2}\right) \\ n + 2\alpha + 1, n + \alpha + 1 \end{array} \right] a^{2n+2\alpha+\mu} \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{array}{c} -q\frac{n+p}{2} + \frac{2\alpha+\mu}{2}, \frac{1}{2} + q\frac{n+p}{2} - \frac{\mu}{2}, n + p \\ \frac{2\alpha-\mu}{2} + 1 + q\frac{n+p}{2}, 1 + q\frac{n+p}{2} - \frac{\mu}{2} \end{array} \right] a^{2(n+p)} \right\} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Exemple 4

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^\mu J_\alpha(x) J_\beta(x) \left[1 + \left(\frac{a}{x}\right)^{-q}\right]^{-p}, \quad q, p \in \mathbb{R}^+;\ \alpha, \mu \in \mathbb{R} \tag{2.33}$$

Cette fois, on a

$$h_0(x) = x^\mu J_\alpha(x) J_\beta(x) \tag{2.34}$$

et

$$\begin{aligned} H_0(s) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{s+\mu}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{1}{2} - \frac{s+\mu}{2}, 1 - \frac{s}{2} \\ 1 - \frac{s+\mu}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2}, 1 - \frac{s+\mu}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}, 1 - \frac{s+\mu}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} \end{array} \right], \\ & -\alpha - \beta - \mu < \mathrm{Re}(s) < 1 - \mu \end{aligned} \tag{2.35}$$

Les fonction $h_1(x)$ et $H_1(s)$ sont données par les Eqs.(2.21) et (2.22). Par application du théorème de convolution et en effectuant le changement de variable $s \to 2qs$, I devient

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(p)} \frac{1}{2j\pi} \int_{\eta-j\infty}^{\eta+j\infty} \mathrm{d}s\, a^{-2qs} \\ &\times \Gamma\left[\begin{array}{c} qs + \frac{\mu+\alpha+\beta}{2}, \frac{1}{2} - qs - \frac{\mu}{2}, 1 - qs, -2s, p + 2s \\ 1 - qs + \frac{\alpha+\beta-\mu}{2}, 1 - qs + \frac{\alpha-\beta-\mu}{2}, 1 - qs + \frac{\beta-\alpha-\mu}{2} \end{array} \right], \end{aligned} \tag{2.36}$$

$\Delta = 2q > 0$, le contour est clos avec C_-. Les pôles sont :
$s = -\frac{1}{q}\left(n + \frac{\mu+\alpha+\beta}{2}\right)$ et $s = -\frac{n+p}{2}$. I est égale à

$$\begin{aligned} I = &\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ \times &\left\{ \frac{1}{q}\Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{2n+1+\alpha+\beta}{2}, \frac{2+2n+\mu+\alpha+\beta}{2}, \frac{2}{q}\left(\frac{2n+\mu+\alpha+\beta}{2}\right), p - \frac{2}{q}\left(\frac{2n+\mu+\alpha+\beta}{2}\right) \\ 1+n+\alpha+\beta, 1+n+\alpha, 1+n+\beta \end{array} \right] \right. \\ &\times a^{2n+\mu+\alpha+\beta} \\ + &\frac{1}{2}\Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{\mu+\alpha+\beta-qn-qp}{2}, \frac{1-\mu+qn+qp}{2}, 1 + q\frac{n+p}{2}, \frac{2}{q}(n+p) \\ 1 + \frac{\alpha+\beta-\mu+qn+qp}{2}, 1 + \frac{\alpha-\beta-\mu+qn+qp}{2}, 1 + \frac{\beta-\alpha-\mu+qn+qp}{2} \end{array} \right] \\ &\left. \times a^{qn+qp} \right\}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Exemple 5 : le développement en série de $K_\alpha(x)$

L'Eq.(1.29) nous donne

$$K_\alpha(x) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\eta-j\infty}^{\eta+j\infty} \mathrm{d}s 2^{s-2} \Gamma\left[\frac{s}{2} + \frac{\alpha}{2}, \frac{s}{2} - \frac{\alpha}{2}\right] x^{-s} \tag{2.38}$$

En effectuant le changement de variable $s \to 2s$, on obtient

$$K_\alpha(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2j\pi} \int_{\eta-j\infty}^{\eta+j\infty} \mathrm{d}s \Gamma\left[s + \frac{\alpha}{2}, s - \frac{\alpha}{2}\right] \left(\frac{x}{2}\right)^{-2s} \tag{2.39}$$

$\Delta = 2$ implique que le contour d'intégration soit fermé avec C_-. Les pôles sont $s = -n - \alpha/2$ et $s = -n + \alpha/2$. Finalement, $K_\alpha(x)$ s'écrit

$$K_\alpha(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \Gamma(-n-\alpha) \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha} + \Gamma(-n+\alpha) \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\alpha} \right\} \tag{2.40}$$

Exemple 6

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^\mu J_\alpha(x) J_\beta \left[\left(\frac{b}{x} \right)^{-1} \right] \tag{2.41}$$

On pose

$$h_0(x) = x^\mu J_\alpha(x) \tag{2.42}$$

et

$$h_1(x) = J_\beta(x^{-1}). \tag{2.43}$$

D'après la transformation de Mellin de l'Eq.(1.26), leurs transformées de Mellin respectives sont

$$H_0(s) = 2^{s+\mu-1} \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{s+\mu}{2} + \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{s+\mu}{2} \end{array} \right] \tag{2.44}$$

et

$$H_1(s) = 2^{-s-1} \Gamma \left[\begin{array}{c} -\frac{s}{2} + \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} + 1 + \frac{s}{2} \end{array} \right]. \tag{2.45}$$

Par le théorème de convolution et en effectuant le changement de variable $s \to 2s$, l'Eq.(2.41) s'écrit

$$I = \frac{2^{\mu-1}}{2j\pi} \int_{\eta-j\infty}^{\eta+j\infty} \mathrm{d}s \Gamma \left[\begin{array}{c} s + \frac{\alpha+\mu}{2}, -s + \frac{\beta}{2} \\ \frac{\alpha-\mu}{2} + 1 - s, \frac{\beta}{2} + 1 + s \end{array} \right] b^{-2s} \tag{2.46}$$

On a $\Delta = 0$, donc le pôle est $s = n + \beta/2$ pour $b > 1$ et $s = -n - (\alpha + \mu)/2$ pour $b < 1$.

On obtient, pour $b < 1$,

$$I = 2^{\mu-1} b^{\alpha+\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma \left[\begin{array}{c} n + \frac{\mu+\alpha+\beta}{2} \\ \alpha + 1 + n, -\frac{\alpha-\beta+\mu}{2} + 1 - n \end{array} \right] b^{2n} \tag{2.47}$$

et, pour $b > 1$

$$I = 2^{\mu-1} b^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma \left[\begin{array}{c} n + \frac{\alpha+\beta+\mu}{2} \\ \frac{\alpha-\beta-\mu}{2} + 1 - n, \beta + 1 + n \end{array} \right] b^{-2n}. \tag{2.48}$$

2.3 L'intégration à deux paramètres

2.3.1 Description de la méthode

Le cas deux paramètres correspond à une intégrale du type de l'Eq.(1.9) pour $N = 2$,

$$h(x_1, x_2) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y} h_0(y) h_1 \left(\frac{x_1}{y} \right) h_2 \left(\frac{x_2}{y} \right), \tag{2.49}$$

qui en vertu du théorème de convolution Eq.(1.11) s'écrit aussi

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{(2j\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{C}_s} \int\limits_{\mathbb{C}_t} \mathrm{d}s\mathrm{d}t H(s,t) x_1^{-s} x_2^{-t}. \tag{2.50}$$

avec $H(s,t) = H_0(s+t)H_1(s)H_2(t)$. $H_0(s+t)$, $H_1(s)$ et $H_2(t)$ sont les transformées de Mellin respectives de $h_0(x)$, $h_1(x)$ et $h_2(x)$. $\mathbb{C}_s$ et $\mathbb{C}_t$ sont les plans complexes associés aux variables s et t. Le chemin d'intégration varie de $\eta_s - j\infty$ à $\eta_s + j\infty$ pour s et de $\eta_t - j\infty$ à $\eta_t + j\infty$ pour t.

La valeur de l'intégrale est égale à la somme des résidus à l'intersection des deux plans complexes $\mathbb{C}_s$ et $\mathbb{C}_t$. Chaque résidu correspond à un pôle défini par un couple de valeurs $[s;t]$. Il faut donc déterminer quels sont les couples $[s;t]$ se situant à l'intérieur du contour d'intégration.

La méthode consiste d'abord à établir la liste de toutes les paires de pôles indépendants de $H(s,t)$. Pour chaque paire de pôle, on calcule aussi le résidu associé. Chaque résidu correspond à une double série,

$$\mathrm{Res} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^m}{m!} G(s_{n,m}, t_{n,m}) x_1^{-s_{n,m}} x_2^{-t_{n,m}}, \tag{2.51}$$

où le couple $[s_{n,m}; t_{n,m}]$ est le pôle du résidu et $G(s_{n,m}, t_{n,m})$ est proportionnel à un rapport de produits de fonctions gamma. De manière générale, $s_{n,m}$ et $t_{n,m}$ s'écrivent

$$s_{n,m} = a_1 n + b_1 m + c_1, \tag{2.52}$$

$$t_{n,m} = a_2 n + b_2 m + c_2. \tag{2.53}$$

Les coefficients de a_1, a_2, b_1 et b_2 sont égaux à -1, 0 ou 1 contrairement à l'intégration à un paramètre pour laquelle le coefficient de s peut être quelconque. Si les coefficients sont des entiers, on obtient des coefficients égaux à l'unité avec la formule de multiplication de Gauss–Legendre Eq.(1.14). S'ils sont égaux à des nombres rationnels, on revient au cas des coefficients entiers en multipliant tous les coefficients par le plus petit commun dénominateur de l'ensemble des coefficients. Le produit $x_1^{-s_{n,m}} x_2^{-t_{n,m}}$ s'écrit

$$x_1^{-s_{n,m}} x_2^{-t_{n,m}} = f^n(x_1, x_2) g^m(x_1, x_2) x_1^{-c_1} x_2^{-c_2} \tag{2.54}$$

avec $f(x_1, x_2) = x_1^{-a_1} x_2^{-a_2}$ et $g(x_1, x_2) = x_1^{-b_1} x_2^{-b_2}$.

Sasiela ayant démontré que pour chaque série qui converge, le pôle $[s_{n,m}; t_{n,m}]$ qui est à l'origine de cette série est inclus dans le contour d'intégration, il reste à établir parmi l'ensemble des séries, les séries convergentes en fonction des valeurs relatives des paramètres x_1 et x_2.

A nouveau Sasiela montre que

$$\frac{G(s_{n,m}, t_{n,m})}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)} x_1^{-s_{n,m}} x_2^{-t_{n,m}} \tag{2.55}$$

tend vers

$$(n!)^{\Omega_n}(m!)^{\Omega_m} f^n(x_1,x_2) g^m(x_1,x_2), \tag{2.56}$$

lorsque $n, m \to +\infty$. Ω_n, respectivement Ω_m, est la différence entre les coefficients de n, respectivement de m, au numérateur et au dénominateur de $G(s_{n,m}, t_{n,m})/[\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)]$. $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(m+1)$ correspondent à $n!$ et $m!$ dans l'Eq.(2.51). Les séries seront dites de Taylor pour $\Omega_n \leq 0$ et $\Omega_m \leq 0$, et asymptotiques pour $\Omega_n > 0$ ou $\Omega_m > 0$.

Pour qu'il y ait convergence, une condition nécessaire est

$$|f(x_1,x_2)| < 1 \text{ et } |g(x_1,x_2)| < 1. \tag{2.57}$$

Pour les séries de Taylor, la condition de l'Eq.(2.57) est aussi suffisante. Pour les séries asymptotiques, il faut ajouter aux séries un terme de "steepest–descent" pour obtenir la convergence. Dans le cadre de notre travail, nous n'aurons à travailler qu'avec des séries de Taylor. Pour les séries asymptotiques et les termes de "steepest–descent", on pourra se référer à Sasiela [137, 139].

2.3.2 Exemples

Exemple 1

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^\mu \left[1 + \left(\frac{a}{x}\right)^{-2}\right]^{-p} J_\alpha(x) J_\beta\left[\left(\frac{b}{x}\right)^{-1}\right], \\ &\qquad p \in \mathbb{R}^+;\ \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.58}$$

On pose

$$h_0(x) = x^\mu J_\alpha(x), \tag{2.59}$$

$$h_1(x) = \left(1 + x^{-2}\right)^{-p} \tag{2.60}$$

et

$$h_2(x) = J_\beta(x^{-1}). \tag{2.61}$$

Leurs transformées de Mellin respectives sont

$$H_0(s) = 2^{s+\mu-1}\Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{s+\mu}{2} + \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{s+\mu}{2} \end{array}\right], \quad -\mu - \alpha < \mathrm{Re}(s) < \frac{3}{2} - \mu, \tag{2.62}$$

$$H_1(s) = \frac{1}{2}\Gamma\left[\begin{array}{c} -\frac{s}{2}, p + \frac{s}{2} \\ p \end{array}\right], -2p < \mathrm{Re}(s) < 0 \tag{2.63}$$

et

$$H_2(s) = 2^{-s-1}\Gamma\left[\begin{array}{c} -\frac{s}{2} + \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} + 1 + \frac{s}{2} \end{array}\right], \quad -\frac{3}{2} < \mathrm{Re}(s) < \alpha. \tag{2.64}$$

Par application du théorème de convolution, I devient

$$\begin{aligned} I &= \frac{2^{\mu-3}}{\Gamma(p)} \frac{1}{(2j\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{C}_s} \int\limits_{\mathbb{C}_t} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \, \left(\frac{a}{2}\right)^{-s} b^{-t} \\ & \quad \times \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{s+t+\mu+\alpha}{2}, -\frac{s}{2}, p+\frac{s}{2}, -\frac{t}{2}+\frac{\beta}{2} \\ \frac{\alpha}{2}+1-\frac{s+t+\mu}{2}, \frac{\beta}{2}+1+\frac{t}{2} \end{array} \right], \end{aligned} \tag{2.65}$$

puis en effectuant le changement de variable $s \to 2s$ et $t \to 2t$,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2^{\mu-1}}{\Gamma(p)} \frac{1}{(2j\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{C}_s} \int\limits_{\mathbb{C}_t} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \, \left(\frac{a}{2}\right)^{-2s} b^{-2t} \\ & \quad \times \Gamma \left[\begin{array}{c} s+t+\frac{\mu+\alpha}{2}, -s, p+s, -t+\frac{\beta}{2} \\ \frac{\alpha-\mu}{2}+1-s-t, \frac{\beta}{2}+1+t \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Les paires de pôles indépendants sont :

1. $s+t+\frac{\mu+\alpha}{2} = -n;\ -s = -m$,

$$G(s_{n,m}, t_{n,m}) = \Gamma \left[\begin{array}{c} p+m, n+m+\frac{\mu+\alpha+\beta}{2} \\ n+1+\alpha, \frac{\beta-\mu-\alpha}{2}+1-n-m \end{array} \right] \tag{2.67}$$

$$\Omega_n = 0 \text{ et } \Omega_m = 2 \tag{2.68}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{-2m} b^{2n+2m+\mu+\alpha} = \left(\frac{2b}{a}\right)^{2m} b^{2n} b^{\mu+\alpha} \tag{2.69}$$

2. $s+t+\frac{\mu+\alpha}{2} = -n;\ p+s = -m$,

$$G(s_{n,m}, t_{n,m}) = \Gamma \left[\begin{array}{c} p+m, -p-m+n+\frac{\beta+\mu+\alpha}{2} \\ n+\alpha+1, \frac{\beta-\mu-\alpha}{2}+1-n+p+m \end{array} \right] \tag{2.70}$$

$$\Omega_n = 0 \text{ et } \Omega_m = -2 \tag{2.71}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{2m+2p} b^{2n+\mu+\alpha-2m-2p} = \left(\frac{a}{2b}\right)^{2m} \left(\frac{a}{2b}\right)^{2p} b^{2n} b^{\mu+\alpha} \tag{2.72}$$

3. $s+t+\frac{\mu+\alpha}{2} = -n;\ -t+\frac{\beta}{2} = -m$,

$$G(s_{n,m}, t_{n,m}) = \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{\mu+\alpha+\beta}{2}+n+m, p-\frac{\mu+\alpha+\beta}{2}-n-m \\ n+\alpha+1, \beta+1+m \end{array} \right] \tag{2.73}$$

$$\Omega_n = -2 \text{ et } \Omega_m = -2 \tag{2.74}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{2n+2m+\mu+\alpha+\beta} b^{-2m-\beta} = \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+\mu+\alpha} \left(\frac{a}{2b}\right)^{2m+\beta} \tag{2.75}$$

4. $-s = -n;\ -t + \frac{\beta}{2} = -m,$

$$G(s_{n,m}, t_{n,m}) = \Gamma \left[\begin{array}{c} m + n + \frac{\mu+\alpha+\beta}{2}, p + n \\ \frac{\alpha-\mu-\beta}{2} - n + 1 - m, \beta + 1 + m \end{array} \right] \tag{2.76}$$

$$\Omega_n = 2 \text{ et } \Omega_m = 0 \tag{2.77}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{-2n} b^{-2m-\beta} \tag{2.78}$$

5. $p + s = -n;\ -t + \frac{\beta}{2} = -m.$

$$G(s_{n,m}, t_{n,m}) = \Gamma \left[\begin{array}{c} m + \frac{\mu+\alpha+\beta}{2} - n - p, p + n \\ \frac{\alpha-\mu-\beta}{2} + n + p + 1 - m, \beta + 1 + m \end{array} \right] \tag{2.79}$$

$$\Omega_n = -2 \text{ et } \Omega_m = 0 \tag{2.80}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{2n+2p} b^{-2m-\beta} \tag{2.81}$$

Pour chaque série, les termes dominant sont

1. $(n!)^0 (m!)^2 \left(\frac{2b}{a}\right)^{2m} b^{2n},$
2. $(n!)^0 (m!)^{-2} \left(\frac{a}{2b}\right)^{2m} b^{2n},$
3. $(n!)^{-2} (m!)^{-2} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \left(\frac{a}{2b}\right)^{2m},$
4. $(n!)^2 (m!)^0 \left(\frac{2}{a}\right)^{2n} \left(\frac{1}{b}\right)^{2m},$
5. $(n!)^{-2} (m!)^0 \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \left(\frac{1}{b}\right)^{2m},$

Le tableau 2.2 présente pour chaque paire de pôles, le type de la série et le domaine de convergence.

Pôles	Série	Convergence
1	Asymp.	$a > 2b$ & $b < 1$
2	Taylor	$a < 2b$ & $b < 1$
3	Taylor	$a < 2$ & $a < 2b$
4	Asymp.	$a > 2$ & $b > 1$
5	Taylor	$a < 2$ & $b > 1$

TAB. 2.2 – Paire de pôles, séries et convergence

Nous ne nous intéresserons seulement qu'au cas $a < 2b$ et $a < 2$, ce qui élimine toutes les séries asymptotiques. Pour $b < 1$, on conserve les séries 2 et 3 et pour $b > 1$, les séries 3 et 5.

• $a < 2b$**,** $a < 2$ **et** $b < 1$

$$\begin{aligned} I = & \frac{2^{\mu-1}}{\Gamma(p)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^m}{m!} \\ & \times \left\{ \Gamma \left[\begin{array}{c} p+m, n+m+\frac{\mu+\alpha+\beta}{2} \\ n+1+\alpha, \frac{\beta-\mu-\alpha}{2}+1-n-m \end{array} \right] \left(\frac{a}{2b}\right)^{2m+2p} b^{2n+\mu+\alpha} \right. \\ & + \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{\mu+\alpha+\beta}{2}+n+m, p-\frac{\mu+\alpha+\beta}{2}-n-m \\ n+\alpha+1, \beta+1+m \end{array} \right] \\ & \left. \times \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+\mu+\alpha} \left(\frac{a}{2b}\right)^{2m+\beta} \right\} \end{aligned} \tag{2.82}$$

• $a < 2b$**,** $a < 2$ **et** $b > 1$

$$\begin{aligned} I = & \frac{2^{\mu-1}}{\Gamma(p)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^m}{m!} \\ & \times \left\{ \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{\mu+\alpha+\beta}{2}+n+m, p-\frac{\mu+\alpha+\beta}{2}-n-m \\ n+\alpha+1, \beta+1+m \end{array} \right] \right. \\ & \times \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+\mu+\alpha} \left(\frac{a}{2b}\right)^{2m+\beta} \\ & + \Gamma \left[\begin{array}{c} m+\frac{\mu+\alpha+\beta}{2}-n-p, p+n \\ \frac{\alpha-\mu-\beta}{2}+1+n+p-m, \beta+1+m \end{array} \right] \\ & \left. \times \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+2p} b^{-2m-\beta} \right\} \end{aligned} \tag{2.83}$$

Exemple 2

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^{\mu} \left[1+\left(\frac{a}{x}\right)^{-2}\right]^{-p} J_{\alpha}^2(x) J_{\beta}\left[\left(\frac{b}{x}\right)^{-1}\right], \tag{2.84}$$
$$p \in \mathbb{R}^+;\ \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

On pose

$$h_0(x) = x^{\mu} J_{\alpha}^2(x). \tag{2.85}$$

Sa transformée de Mellin est obtenue avec les Eqs.(1.27) et (1.4)

$$H_0(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{s+\mu}{2}+\alpha, \frac{1}{2}-\frac{s+\mu}{2} \\ \alpha+1-\frac{s+\mu}{2}, 1-\frac{s+\mu}{2} \end{array} \right], -2\alpha-\mu < \mathrm{Re}(s) < 1-\mu. \tag{2.86}$$

Les fonctions $h_1(x)$ et $h_2(x)$ et leurs transformées de Mellin respectives sont les mêmes que précédemment. Par application du théorème de convolution, I devient

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8\Gamma(p)\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2j\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{C}_s} \int\limits_{\mathbb{C}_t} \mathrm{d}s\mathrm{d}t\, a^{-s}(2b)^{-t} \\ &\times\Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{s+t+\mu}{2}+\alpha, \frac{1}{2}-\frac{s+t+\mu}{2}, -\frac{s}{2}, p+\frac{s}{2}, -\frac{t}{2}+\frac{\beta}{2} \\ \alpha+1-\frac{s+t+\mu}{2}, 1-\frac{s+t+\mu}{2}, \frac{\beta}{2}+1+\frac{t}{2} \end{array}\right], \end{aligned} \tag{2.87}$$

puis en effectuant le changement de variable $s \to 2s$ et $t \to 2t$,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\Gamma(p)\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2j\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{C}_s} \int\limits_{\mathbb{C}_t} \mathrm{d}s\mathrm{d}t\, a^{-2s}(2b)^{-2t} \qquad (2.88) \\ &\times\Gamma\left[\begin{array}{c} s+t+\frac{\mu}{2}+\alpha, \frac{1}{2}-s-t-\frac{\mu}{2}, -s, p+s, -t+\frac{\beta}{2} \\ \alpha-\frac{\mu}{2}+1-s-t, 1-s-t-\frac{\mu}{2}, \frac{\beta}{2}+1+t \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Les paires de pôles indépendants sont :

1. $s+t+\frac{\mu}{2}+\alpha = -n;\ -s = -m,$

$$G(s_{n,m}, t_{n,m}) = \tag{2.89}$$
$$\Gamma\left[\begin{array}{c} n+\alpha+\frac{1}{2}, p+m, n+m+\alpha+\frac{\mu+\beta}{2} \\ n+1+2\alpha, n+\alpha+1, \frac{\beta-\mu}{2}-m-\alpha+1-n \end{array}\right]$$

$$\Omega_n = 0 \text{ et } \Omega_m = 2 \tag{2.90}$$

$$a^{-2m}(2b)^{2n+2m+\mu+2\alpha} = \left(\frac{2b}{a}\right)^{2m}(2b)^{2n}(2b)^{\mu+2\alpha} \tag{2.91}$$

2. $s+t+\frac{\mu}{2}+\alpha = -n;\ p+s = -m,$

$$G(s_{n,m}, t_{n,m}) = \tag{2.92}$$
$$\Gamma\left[\begin{array}{c} n+\alpha+\frac{1}{2}, p+m, -p-m+n+\alpha+\frac{\beta+\mu}{2} \\ n+2\alpha+1, n+\alpha+1, \frac{\beta-\mu}{2}-\alpha+1-n+p+m \end{array}\right]$$

$$\Omega_n = 0 \text{ et } \Omega_m = -2 \tag{2.93}$$

$$a^{2m+2p}(2b)^{2n+\mu+2\alpha-2m-2p} = \left(\frac{a}{2b}\right)^{2m}\left(\frac{a}{2b}\right)^{2p}(2b)^{2n}(2b)^{\mu+2\alpha} \tag{2.94}$$

3. $s+t+\frac{\mu}{2}+\alpha = -n;\ -t+\frac{\beta}{2} = -m,$

$$G(s_{n,m}, t_{n,m}) = \tag{2.95}$$
$$\Gamma\left[\begin{array}{c} n+\alpha+\frac{1}{2}, \frac{\mu+\beta}{2}+\alpha+n+m, p-\frac{\mu+\beta}{2}+\alpha+n+m \\ n+2\alpha+1, n+\alpha+1, \beta+1+m \end{array}\right]$$

$$\Omega_n = -2 \text{ et } \Omega_m = -2 \tag{2.96}$$

$$a^{2n+2m+\mu+2\alpha+\beta}(2b)^{-2m-\beta} = a^{2n+\mu+2\alpha}\left(\frac{a}{2b}\right)^{2m+\beta} \tag{2.97}$$

4. $\frac{1}{2}-s-t-\frac{\mu}{2}=-n;\ -s=-m,$

$$G(s_{n,m},t_{n,m})= \tag{2.98}$$
$$\Gamma\left[\begin{array}{c} n+\alpha+\frac{1}{2},p+m,-n+m+\frac{\mu+\beta-1}{2} \\ -n+\alpha+\frac{1}{2},-n+\frac{1}{2},\frac{\beta-\mu}{2}-m+\frac{3}{2}+n \end{array}\right]$$

$$\Omega_n=0 \text{ et } \Omega_m=2 \tag{2.99}$$

$$a^{-2m}(2b)^{-2n+2m+\mu-1}=\left(\frac{2b}{a}\right)^{2m}(2b)^{-2n}(2b)^{\mu-1} \tag{2.100}$$

5. $\frac{1}{2}-s-t-\frac{\mu}{2}=-n;\ p+s=-m,$

$$G(s_{n,m},t_{n,m})= \tag{2.101}$$
$$\Gamma\left[\begin{array}{c} n+\alpha+\frac{1}{2},p+m,-p-m-n+\frac{\beta+\mu-1}{2} \\ -n+\alpha+\frac{1}{2},-n+\frac{1}{2},\frac{\beta-\mu}{2}+\frac{3}{2}+n+p+m \end{array}\right]$$

$$\Omega_n=0 \text{ et } \Omega_m=-2 \tag{2.102}$$

$$a^{2m+2p}(2b)^{-2n+\mu-1-2m-2p}=\left(\frac{a}{2b}\right)^{2m}\left(\frac{a}{2b}\right)^{2p}(2b)^{-2n}(2b)^{\mu-1} \tag{2.103}$$

6. $\frac{1}{2}-s-t-\frac{\mu}{2}=-n;\ -t+\frac{\beta}{2}=-m,$

$$G(s_{n,m},t_{n,m})= \tag{2.104}$$
$$\Gamma\left[\begin{array}{c} n+\alpha+\frac{1}{2},\frac{\mu+\beta-1}{2}-n+m,p-\frac{\mu+\beta-1}{2}+n-m \\ -n+\alpha+\frac{1}{2},-n+\frac{1}{2}+1,\beta+1+m \end{array}\right]$$

$$\Omega_n=2 \text{ et } \Omega_m=-2 \tag{2.105}$$

$$a^{-2n+2m+\mu-1+\beta}(2b)^{-2m-\beta}=a^{-2n+\mu-1}\left(\frac{a}{2b}\right)^{2m+\beta} \tag{2.106}$$

7. $-s=-n;\ -t+\frac{\beta}{2}=-m,$

$$G(s_{n,m},t_{n,m})= \tag{2.107}$$
$$\Gamma\left[\begin{array}{c} m+\alpha+n+\frac{\mu+\beta}{2},\frac{1-\beta-\mu}{2}-n-m,p+n \\ 1-n-m-\frac{\mu+\beta-2\alpha}{2},1-n-m-\frac{\mu+\beta}{2},\beta+1+m \end{array}\right]$$

$$\Omega_n=2 \text{ et } \Omega_m=0 \tag{2.108}$$

$$a^{-2n}(2b)^{-2m-\beta} \tag{2.109}$$

8. $p+s=-n;\ -t+\frac{\beta}{2}=-m.$

$$G(s_{n,m},t_{n,m})= \tag{2.110}$$
$$\Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{\mu+\beta+2\alpha-2p-2n+2m}{2},\frac{1-\beta-\mu+2p+2n-2m}{2},p+n \\ \frac{1-\mu-\beta+2\alpha+2p+2n-2m}{2},\frac{1-\mu-\beta+2p+2n-2m}{2},\beta+1+m \end{array}\right]$$

$$\Omega_n=-2 \text{ et } \Omega_m=0 \tag{2.111}$$

$$a^{2n+2p}(2b)^{-2m-\beta} \tag{2.112}$$

Pour chaque série les termes dominants sont

1. $(n!)^0(m!)^2\left(\frac{2b}{a}\right)^{2m}(2b)^{2n}$,
2. $(n!)^0(m!)^{-2}\left(\frac{a}{2b}\right)^{2m}(2b)^{2n}$,
3. $(n!)^{-2}(m!)^{-2}a^{2n}\left(\frac{a}{2b}\right)^{2m}$,
4. $(n!)^0(m!)^2\left(\frac{2b}{a}\right)^{2m}\left(\frac{1}{2b}\right)^{2n}$,
5. $(n!)^0(m!)^{-2}\left(\frac{a}{2b}\right)^{2m}\left(\frac{1}{2b}\right)^{2n}$,
6. $(n!)^2(m!)^{-2}\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}\left(\frac{a}{2b}\right)^{2m}$,
7. $(n!)^2(m!)^0\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}\left(\frac{1}{2b}\right)^{2m}$,
8. $(n!)^0(m!)^0a^{2n}\left(\frac{1}{2b}\right)^{2m}$.

Le tableau 2.3 présente pour chaque paire de pôles, le type de la série et le domaine de convergence.

Pôles	Série	Convergence		
1	Asymp.	$b < a/2$	&	$b < 1/2$
2	Taylor	$b > a/2$	&	$b < 1/2$
3	Taylor	$a < 1$	&	$b > a/2$
4	Asymp.	$b < a/2$	&	$b > 1/2$
5	Taylor	$b > a/2$	&	$b > 1/2$
6	Asymp.	$a > 1$	&	$b > a/2$
7	Asymp.	$a > 1$	&	$b > 1/2$
8	Taylor	$a < 1$	&	$b > 1/2$

TAB. 2.3 – Paire de pôles, séries et convergence.

Les séries asymptotiques sont éliminées avec les inégalités : $b > a/2$ et $a < 1$. Pour $b < 1/2$, il reste les séries de Taylor 2 et 3 et pour $b > 1/2$, les séries de Taylor 3, 5 et 8.

• **$b > a/2$, $a < 1$ et $b < 1/2$**

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\Gamma(p)\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{(-1)^m}{m!} \\ &\times\left\{\Gamma\left[\begin{array}{c} n+\alpha+\frac{1}{2}, p+m, -p-m+n+\alpha+\frac{\beta+\mu}{2} \\ n+2\alpha+1, n+\alpha+1, \frac{\beta-\mu}{2}-\alpha+1-n+p+m \end{array}\right]\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left(\frac{a}{2b}\right)^{2m+2p}(2b)^{2n+\mu+2\alpha} \\
&+\Gamma\left[\begin{array}{c} n+\alpha+\frac{1}{2}, \frac{\mu+\beta+2\alpha}{2}+n+m, p-\frac{\mu+\beta+2\alpha}{2}-n-m \\ n+2\alpha+1, n+\alpha+1, \beta+1+m \end{array}\right] \\
&\left.\times a^{2n+\mu+2\alpha}\left(\frac{a}{2b}\right)^{2m+\beta}\right\}
\end{aligned}
\tag{2.113}
$$

- **$b > a/2$, $a < 1$ et $b > 1/2$**

$$
\begin{aligned}
I \;=\; & \frac{1}{2\Gamma(p)\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{(-1)^m}{m!} \\
&\times\left\{\Gamma\left[\begin{array}{c} n+\alpha+\frac{1}{2}, \frac{\mu+\beta+2\alpha}{2}+n+m, p-\frac{\mu+\beta+2\alpha}{2}-n-m \\ n+2\alpha+1, n+\alpha+1, \beta+1+m \end{array}\right]\right. \\
&\quad\times a^{2n+\mu+2\alpha}\left(\frac{a}{2b}\right)^{2m+\beta} \\
&\quad+\Gamma\left[\begin{array}{c} n+\alpha+\frac{1}{2}, p+m, -p-m-n+\frac{\beta+\mu-1}{2} \\ -n+\alpha+\frac{1}{2}, -n+\frac{1}{2}, \frac{\beta-\mu}{2}+\frac{3}{2}+n+p+m \end{array}\right] \\
&\quad\times\left(\frac{a}{2b}\right)^{2m+2p}(2b)^{-2n+\mu-1} \\
&\quad+\Gamma\left[\begin{array}{c} m+\alpha+\frac{\mu+\beta-2n-2p}{2}, \frac{1+2n+2p-\beta-\mu}{2}-m, p+n \\ 1-\frac{\mu+\beta-2\alpha-2p-2n-2m}{2}, 1-\frac{\mu+\beta-2p-2n-2m}{2}, \beta+1+m \end{array}\right] \\
&\quad\left.\times a^{2n+2p}(2b)^{-2m-\beta}\right\}
\end{aligned}
\tag{2.114}
$$

Conclusion

Cette partie donne l'ensemble des outils mathématiques nécessaire pour résoudre les différentes intégrales rencontrées au cours de ce travail.

Le premier chapitre est consacré au rappel des propriétés de la transformée de Mellin et des fonctions gamma et hypergéométriques. La liste des transformées de Mellin utilisées au cours de la thèse y est donnée. Deux nouvelles transformées de Mellin ont été calculées : la transformée de Mellin de la différence entre une fonction de Bessel et le premier terme de son développement en série ainsi que la transformée de Mellin du carré de la fonction précédente.

Le second chapitre présente les méthodes de calcul d'intégrales pour un nombre de paramètre allant de zéro à deux. La méthode utilisée pour le cas à deux paramètres se généralise pour n paramètres. Dans ce cas, la solution s'écrirait comme la somme de séries de n sommes imbriquées. Pour les intégrales à résoudre dans la thèse, il n'y aura jamais besoin d'aller au–delà du cas à deux paramètres.

La méthode d'intégration dite de "steepest-descent" n'a pas été décrite bien que la solution obtenue par cette méthode s'ajoute aux séries lorsque celles–ci sont des séries asymptotiques. En fait, pour les intégrales que nous étudierons, les termes de "steepest-descent" seront presque toujours négligeables par rapport aux séries. Dans le cas contraire, une étude au cas par cas sera menée.

Chaque type d'intégration est illustré d'un ou de plusieurs exemples. Ces exemples ont été choisis en raison de leurs applications pour le calcul de différentes grandeurs physiques intervenant dans les techniques de Haute Résolution Angulaire. Ces exemples sont employés tout au long de la seconde partie de ce mémoire. Ces applications sont originales et complémentaire vis à vis de celles proposées par Sasiela [137, 136, 139, 138].

Le calcul numérique des solutions des intégrales généralisées est trivial et extrêmement rapide par rapport à l'intégration numérique. Cependant, lorsque le nombre de paramètres augmente, l'obtention des résultats peut s'avérer fastidieuse. On peut remarquer que les méthodes d'intégration se résument à quelques règles à appliquer suivant certain critères. Ces régles pourrait former un algorithme qui servirait de base à un programme de mathématique formelle de résolution d'intégrales. Un tel programme éviterait à l'utilisateur de ces techniques d'intégration de s'impliquer dans le détail des calculs.

Deuxième partie

Modélisation des effets optiques de la turbulence atmosphérique en présence de l'échelle externe de cohérence spatiale

Introduction

La modélisation des effets de la turbulence atmosphérique pour la Haute Résolution Angulaire (HRA) est une étape incontournable du développement de nouveaux instruments et de la construction de nouveaux observatoires. Le modèle classique de Kolmogorov a été utilisé avec succès pour rendre compte de la dégradation causée par l'agitation atmosphérique sur les techniques HRA [16, 40, 122, 156]. Ce modèle n'est valide que dans un intervalle de distances entre deux points de mesure appelé le domaine inertiel. L'augmentation constante du diamètre des télescopes et/ou de la base des interferomètres fait que ces grandeurs tendent de plus en plus vers la limite supérieure du régime inertiel qui est symbolisé par l'échelle externe. De ce fait, pour ces grandes distances, des écarts au modèle de Kolmogorov ont été observés [99, 32, 20, 48, 46, 28, 110].

Pour rendre compte de cet écart à la loi de Kolmogorov, d'autres modèles mathématiques et/ou empiriques qui prennent en considération l'échelle externe ont été proposés [37, 69, 88, 162]. Pour de courtes distances, tous ces modèles ont la propriété d'être équivalents au modèle de Kolmogorov. Des études théoriques comparatives entre ces différents modèles montrent que des différences significatives ne sont obtenues que pour les très grandes bases. A ce jour, aucune preuve expérimentale n'a pu être apportée permettant de trancher définitivement en la faveur de l'un d'entre eux.

Le premier chapitre de cette partie présente un de ces modèles, le modèle de Von Kármán , et son influence sur les différentes grandeurs physiques qui caractérisent les perturbations d'un front d'onde par la turbulence atmosphérique. Les deux chapitres suivant montrent l'influence de l'échelle externe sur les performances optimales d'un système d'optique adaptive et d'un interféromètre, respectivement. Le terme performance optimale signifie que l'on ne s'intéresse qu'aux artefacts induits par la turbulence et que l'on fait abstraction de toutes les autres sources d'erreurs. Pour l'étude d'un système d'optique adaptative, il spécifie aussi que lorsqu'une correction est appliquée au front d'onde, elle est supposée parfaite sans résidu.

Les quantités physiques calculées dans ces trois chapitres s'expriment de manière générale sous la forme d'intégrales dont la résolution est moins triviale que dans le cas d'une échelle externe infinie. Les résultats des intégrales généralisées de la première partie serviront de base à la solution de beaucoup de ces intégrales. Ceci nous conduira à proposer plusieurs expressions analytiques originales pour différentes grandeurs.

Chapitre 3

Présentation du modèle théorique

3.1 La turbulence atmosphérique et les définitions de l'échelle externe de turbulence

Le modèle de turbulence utilisé en optique atmosphérique est le modèle dit de "turbulence pleinement développée". Ce type de turbulence est réalisé pour les très grands nombres de Reynolds (Re> 10^6). Ces conditions de turbulence sont réalisées dans l'atmosphère. Ce nombre est une fonction de la vitesse du fluide, de sa taille caractéristique et de la viscosité cinématique. Dans le cadre de ce modèle, Kolmogorov [76, 77, 149, 150, 81, 61, 83] décrit les phénomènes turbulents par le principe de la cascade d'énergie.

Ce principe suppose que l'énergie contenue dans les plus grands tourbillons de taille caractéristique L_0 est transférée dans des tourbillons de taille de plus en plus réduite jusqu'à atteindre une taille limite l_0 à partir de laquelle l'énergie est évacuée par dissipation visqueuse. L_0 et l_0 sont appelées respectivement l'échelle externe de turbulence et l'échelle interne de turbulence. A l'intérieur du domaine inertiel défini par l'intervalle $[l_0, L_0]$, Kolmogorov montre que la fonction de structure des fluctuations transverses de vitesse s'écrit

$$D_v(r) = C_v r^{2/3} \tag{3.1}$$

où C_v est la constante de structure des fluctuations de vitesse et r la distance entre deux points de mesure. Plusieurs expérimentations ont confirmées la validité de cette loi dans le domaine inertiel [55, 56].

Tatarskii [149, 150], se basant sur les travaux d'Obukhov et de Yaglom, en ce qui concerne le champ aléatoire des fluctuations de température dérive la fonction de structure des fluctuations de température

$$D_T(r) = C_T^2 r^{2/3}, \ l_1 \ll r \ll L_0 \tag{3.2}$$

où C_T est la constante de structure des fluctuations de température. l_1 et l_0 diffèrent en ce que l_1 est liée à la diffusivité thermique χ et l_0 est liée à la viscosité dynamique ν, mais dans l'atmosphère les deux quantités sont du même ordre de grandeur.

Tatarskii définit une autre distance caractéristique Δz_0 pour laquelle le carré de la différence des valeurs moyennes de la température en deux points distant de Δz_0 est du même ordre de grandeur que la moyenne du carré de la différence des fluctuations de température mesurées en ces deux points. Il montre que pour la turbulence dans la couche limite planétaire L_0 est lié à Δz_0 par la relation

$$L_0 \simeq \frac{\Delta z_0}{\alpha^{3/4}} \tag{3.3}$$

et que C_T^2 s'exprime en fonction de L_0

$$C_T^2 = \alpha L_0^{4/3} \left(\frac{dT}{dz}\right)^2 \tag{3.4}$$

où α est une constante et $\frac{dT}{dz}$ est le gradient vertical de température.

De même pour les fluctuations d'indice de réfraction atmosphérique, il montre que la fonction de structure des fluctuations d'indice est

$$D_n(r) = C_n^2 r^{2/3}, \; l_0 \ll r \ll L_0 \tag{3.5}$$

avec

$$C_n^2 = \alpha' L_0^{4/3} \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 \tag{3.6}$$

où $\alpha' \simeq 0.36$ et $\frac{d\theta}{dz}$ est le gradient vertical de la température potentielle. C_n^2 est appelée la constante de structure des fluctuations d'indice, elle chiffre l'énergie optique de la turbulence.

Pour les grandes valeurs de r, la condition $r \ll L_0$ n'est plus respectée. Bien qu'il soit difficile d'établir une loi universelle pour la fonction de structure à la limite supérieure du régime inertiel, nous pouvons admettre qu'à partir d'une certaine distance, en moyenne, le carré de la différence des fluctuations d'indice ne variera plus de façon notable et qu'un régime de saturation apparaîtra.

La première expression mathématique d'une fonction de structure prenant en compte un régime de saturation a été proposée par Von Kármán [150]. Pour les fluctuations d'indice de réfraction, elle s'écrit

$$D_n(r) = \frac{2\Gamma(7/6)}{\sqrt{\pi}} C_n^2 \mathcal{L}_0^{2/3} \left[1 - \frac{2^{2/3}}{\Gamma(1/3)} \left(\frac{2\pi r}{\mathcal{L}_0}\right)^{1/3} K_{1/3}\left(\frac{2\pi r}{\mathcal{L}_0}\right)\right], \tag{3.7}$$

$\mathcal{L}_0$ est le paramètre caractérisant la saturation et $K_\nu(r)$ est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce dite fonction de McDonald. On peut vérifier que lorsque $\mathcal{L}_0$ tend vers l'infini $D_n(r) = C_n^2 r^{2/3}$.

La confusion sur la définition de l'échelle externe de turbulence vient du fait que $\mathcal{L}_0$ est très souvent appelée aussi échelle externe de turbulence et que l'on a donc assimilé L_0 à $\mathcal{L}_0$ [41, 23] alors que les deux quantités sont définies selon des critères différents. Pour différencier les deux grandeurs, j'appellerai dorénavant $\mathcal{L}_0$, l'échelle externe de cohérence spatiale.

3.2 Caractérisation statistique des fluctuations de la phase d'une onde plane

Le spectre des fluctuations d'indice de réfraction associé à la fonction de structure Eq. (3.7) est :

$$W_n(f) = \frac{\Gamma(11/6)\Gamma(7/6)}{2^{2/3}\pi^{8/3}\Gamma(1/3)} C_n^2 \left(f^2 + f_0^2\right)^{-11/6} \tag{3.8}$$

où f est la fréquence spatiale [m^{-1}], $f_0 = 1/\mathcal{L}_0$ et $\frac{\Gamma(11/6)\Gamma(7/6)}{2^{2/3}\pi^{8/3}\Gamma(1/3)} = 9,7.10^{-3}$. Pour des commodités d'écriture, certains auteurs ont préféré poser $f_0 = (2\pi\tilde{\mathcal{L}_0})^{-1}$ ce qui explique la diversité dans l'écriture des spectres de Von Kármán [93, 118, 62].

Depuis d'autres spectres ont été proposés pour rendre compte de la saturation [162]. Nous citerons sans les étudier plus avant les spectres du modèle de Greenwood–Tarazano [69]

$$W_n(f) \sim \left(f^2 + f f_{01}\right)^{-11/6} \tag{3.9}$$

et du modèle exponentiel [37]

$$W_n(f) \sim f^{-11/3} \left[1 - \exp\left(\frac{f^2}{f_{02}^2}\right)\right]. \tag{3.10}$$

f_{01} et f_{02} sont les fréquences spatiales correspondantes à l'échelle externe. Ces deux modèles respectent le modèle de Kolmogorov pour les très grandes valeurs de l'échelle externe de cohérence spatiale.

Pour une couche atmosphérique d'épaisseur δz plus grande que la largeur de corrélation des fluctuations de turbulence et suffisamment petite pour négliger les effets de la diffraction, le spectre des fluctuations de phase d'une onde plane traversant cette couche s'écrit [122]

$$W_\varphi(f) = k^2 \delta z W_n(f) \tag{3.11}$$

ou $k = 2\pi/\lambda$ et λ est la longueur d'onde.

La covariance des fluctuations de phase est liée au spectre $W_\varphi(f)$ par le théorème de Wiener–Khintchine

$$C_\varphi(r) = TF^{-1}\left[W_\varphi(f)\right] \tag{3.12}$$

ou $TF^{-1}[\,]$ symbolise la transformation de Fourier inverse. $W_\varphi(f)$ ne dépendant que du module de $\vec{f}$, $C_\varphi(r)$ s'écrit aussi comme la transformée de Hankel de $W_\varphi(f)$,

$$C_\varphi(r) = 9,7.10^{-3} k^2 \delta z C_n^2 2\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{d}f\; f \left(f^2 + f_0^2\right)^{-11/6} J_0(2\pi r f). \tag{3.13}$$

En effectuant le changement de variable $f \to x/(2\pi r)$, on obtient

$$C_\varphi(r) = 2\pi \times 9,7.10^{-3} k^2 \delta z C_n^2 f_0^{-5/3} (2\pi r f_0)^2$$

$$\times \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^2 \left[1 + \left(\frac{x}{2\pi r f_0}\right)^2\right]^{-11/6} J_0(x). \tag{3.14}$$

Cette intégrale s'identifie à l'intégrale de l'Eq.(2.20) avec $\mu = 2$, $\alpha = 0$, $q = 2$ et $p = 11/6$. Comme $q = 2$ et $\mu = \alpha + 2$, nous obtenons

$$C_\varphi(r) = \frac{\Gamma(7/6)}{\sqrt{2}\pi^{5/3}\Gamma(1/3)} k^2 \delta z C_n^2 f_0^{-5/3} (2\pi r f_0)^{5/6} K_{5/6}(2\pi r f_0), \tag{3.15}$$

où $\frac{\Gamma(7/6)}{\sqrt{2}\pi^{5/3}\Gamma(1/3)} = 0.036$.

La mesure des profils de C_n^2 par des instruments tel que le SCIDAR[1] [114, 8, 10, 75] montre que l'atmosphère est caractérisée par la superposition de fines couches turbulentes [42, 9]. La covariance des fluctuations de phase s'écrit alors

$$C_\varphi(r) = 0.036 k^2 \int dz C_n^2(z) f_0(z)^{-5/3} (2\pi r f_0(z))^{5/6} K_{5/6}(2\pi r f_0(z)). \tag{3.16}$$

En supposant que dans chacune des couches qui composent l'atmosphère le modèle de Von Kármán est parfaitement vérifié alors la covariance des fluctuations de phase mesurée expérimentalement par un processus quelconque sera rigoureusement égale à l'Eq. (3.16). Cependant, cette expression ne permet pas de séparer l'échelle externe $f_0(z)$ de l'énergie de la turbulence $C_n^2(z)$. Pour modéliser les covariances expérimentales il faut donc faire une hypothèse supplémentaire qui consiste à définir une échelle externe moyenne $\mathfrak{L}_\mathbf{0}$ telle que la covariance définie par :

$$C_\varphi(r) = 0.036 \mathbf{f_0}^{-5/3} (2\pi r \mathbf{f_0})^{5/6} K_{5/6}(2\pi \mathbf{f_0} r) k^2 \int dz C_n^2(z), \tag{3.17}$$

s'ajuste au mieux à l'Eq. (3.16). Dans l'Eq(3.17), on a séparé l'échelle externe de l'énergie de la turbulence.

C'est de cette façon qu'est mesurée expérimentalement $\mathfrak{L}_\mathbf{0}$, pas toujours à partir de la covariance des fluctuations de phase mais d'un moment statistique dérivé de cette covariance.

En introduisant le paramètre de Fried [57] r_0 qui donne le diamètre minimal d'un télescope ayant la même résolution qu'un télescope de diamètre infini, tous deux en présence d'atmosphère, dans l'Eq. (3.17), il vient

$$C_\varphi(r) = \frac{\Gamma(11/6)}{2^{5/6}\pi^{8/3}} \left[\frac{24}{5}\Gamma(6/5)\right]^{5/6} (r_0 \mathbf{f_0})^{-5/3} (2\pi r \mathbf{f_0})^{5/6} K_{5/6}(2\pi \mathbf{f_0} r) \tag{3.18}$$

avec

$$k^2 \int \mathrm{d}z C_n^2(z) = \frac{5\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/6)} \left[\frac{24}{5}\Gamma(6/5)\right]^{5/6} r_0^{-5/3}. \tag{3.19}$$

[1] SCIntillation Detection And Ranging

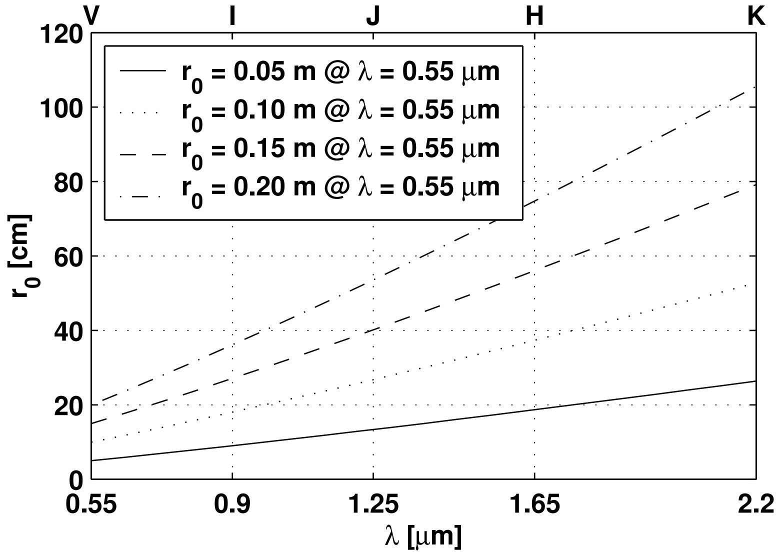


FIG. 3.1 – Dépendance du paramètre de Fried en fonction de la longueur d'onde.

Le spectre des fluctuations de phase d'une onde plane traversant une succession continue de couches turbulentes est donné par

$$\begin{aligned} W_\varphi(f) &= \frac{\Gamma(11/6)\Gamma(7/6)}{2^{2/3}\pi^{8/3}\Gamma(1/3)}\left(f^2+\mathbf{f_0}^2\right)^{-11/6}k^2\int \mathrm{d}zC_n^2(z) \\ &= 0,0229\, r_0^{-5/3}\left(f^2+\mathbf{f_0}^2\right)^{-11/6} \end{aligned} \tag{3.20}$$

avec $0,0229 = \dfrac{\Gamma^2(11/6)}{2\pi^{11/3}}\left[\dfrac{24}{5}\Gamma\left(\dfrac{6}{5}\right)\right]$.

La figure 3.1 rappelle comment le paramètre de Fried varie en fonction de la longueur d'onde entre 0,55μm et 2,2μm pour différentes valeurs de r_0 à 0,55μm. L'axe des longueurs d'onde est gradué selon le système photométrique astronomique usuel [82].

La variance s'écrit

$$\sigma_\varphi^2 = C_\varphi(0) = \frac{\Gamma(11/6)\Gamma(5/6)}{2\pi^{8/3}}\left[\frac{24}{5}\Gamma(6/5)\right]^{5/6}\left(r_0\mathbf{f_0}\right)^{-5/3} \tag{3.21}$$

et on en déduit la fonction de structure [37, 54, 157]

$$\begin{aligned} D_\varphi(r) &= 2\left[\sigma_\varphi^2 - C_\varphi(r)\right] \\ &= 2\frac{\Gamma(11/6)}{2^{5/6}\pi^{8/3}}\left[\frac{24}{5}\Gamma(6/5)\right]^{5/6}\left(r_0\mathbf{f_0}\right)^{-5/3} \\ &\quad \times\left[\frac{\Gamma(5/6)}{2^{1/6}} - (2\pi r\mathbf{f_0})^{5/6}K_{5/6}(2\pi r\mathbf{f_0})\right]. \end{aligned} \tag{3.22}$$

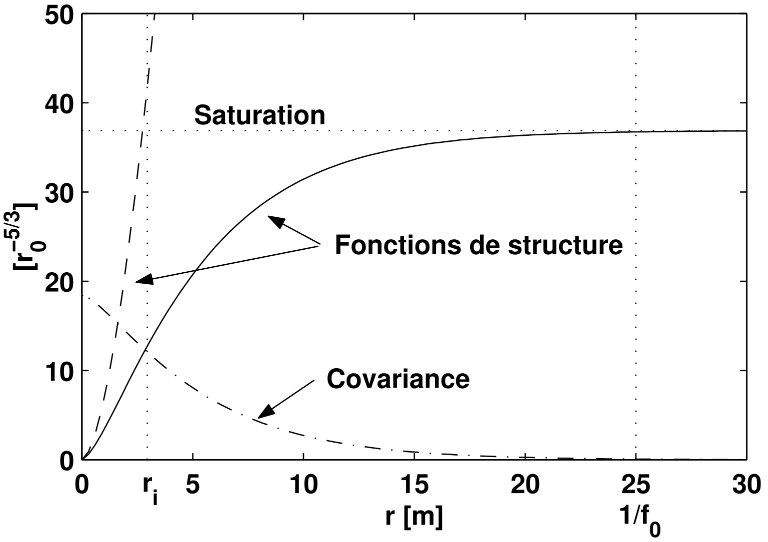


FIG. 3.2 – Fonctions de structure des fluctuations de phase pour le modèle de Kolmogorov (tireté) et pour le modèle de Von Kármán (continu) et covariance pour le modèle de Von Kármán (tireté–pointillé) ($f_0 = 1/25\mathrm{m}^{-1}$) en unité de $r_0^{-5/3}$.

On peut remarquer que contrairement au modèle de Kolmogorov, la variance des fluctuations de phase est finie pour le modèle de Von Kármán .

Lorsque la condition $2\pi r\mathbf{f_0} \ll 1$ est respectée, la fonction $K_{5/6}(2\pi r\mathbf{f_0})$ peut s'écrire, au premier ordre, suivant le développement donné par l'Eq.(2.35),

$$K_{5/6}(2\pi r\mathbf{f_0}) = \frac{\Gamma(-5/6)}{2^{11/6}}(2\pi r\mathbf{f_0})^{5/6} + \frac{\Gamma(5/6)}{2^{1/6}}(2\pi r\mathbf{f_0})^{-5/6}. \tag{3.23}$$

On obtient alors l'expression suivante pour la fonction de structure,

$$D_\varphi(r) = 2\left[\frac{24}{5}\Gamma(6/5)\right]^{5/6}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{5/3} = 6.88\left(\frac{r}{r_0}\right)^{5/3} \tag{3.24}$$

où l'on vérifie que l'on retrouve l'expression dérivée pour le modèle de Kolmogorov [122].

La valeur de la fonction de structure à la saturation est

$$D_\varphi(+\infty) = 2\sigma_\varphi^2 = 0.17\,(r_0\mathbf{f_0})^{-5/3}\,. \tag{3.25}$$

Une autre distance importante r_i est donnée par le point d'inflexion de $D_\varphi(r)$. Il s'agit de la distance à partir de laquelle la courbure de la fonction de structure s'inverse pour tendre vers la saturation. En ce point la dérivée seconde de $D_\varphi(r)$ s'annule. Après la double dérivation de l'Eq. (3.22), on trouve que r_i est solution de

$$(2\pi r_i\mathbf{f_0})^{5/6}K_{5/6}(2\pi r_i\mathbf{f_0}) - \frac{2}{3}(2\pi r_i\mathbf{f_0})^{-1/6}K_{1/6}(2\pi r_i\mathbf{f_0}) = 0 \tag{3.26}$$

La résolution numérique de l'Eq. (3.26) nous donne $r_i = 0.74/(2\pi \mathbf{f_0})$.

La figure 3.2 présente, en fonction de la base, la fonction de structure des fluctuations de phase pour une échelle externe infinie (tireté), pour une échelle externe finie ($f_0 = (1/25)\mathrm{m}^{-1}$) et la covariance pour la même valeur de l'échelle externe (tireté–pointillé). On peut noter qui si on choisit comme définition de l'échelle externe $\mathfrak{L}_\mathbf{0} = 1/f_0$ alors pour des bases de l'ordre de $\mathfrak{L}_\mathbf{0}$, la saturation est atteinte. Alors que si on choisit $\mathfrak{L}_\mathbf{0} = 1/(2\pi f_0)$, des bases de l'ordre de $\mathfrak{L}_\mathbf{0}$ indiquent plutôt le point d'inflexion r_i puisque $r = \mathfrak{L}_\mathbf{0} \simeq 4r_i/3$.

3.3 Caractérisation d'une image long temps de pose au plan focal d'un télescope

Un objet $O(\vec{\alpha})$ est caractérisé par une distribution angulaire de brillance $I(\vec{\alpha})$ au plan focal d'un télescope. Une image long temps de pose est la moyenne d'ensemble d'images instantanées $\langle I(\vec{\alpha})\rangle$.

De manière générale, $O(\vec{\alpha})$ et $\langle I(\vec{\alpha})\rangle$ sont liés par la relation de Fredholm

$$\langle I(\vec{\alpha})\rangle = \int d\vec{\alpha}' O(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}')\langle F(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}')\rangle \tag{3.27}$$

où F est la fonction de filtrage de l'instrument et de l'atmosphère.

Si le système télescope+atmosphère est linéaire et invariant par translation, alors l'Eq. (3.27) se réduit à un produit de convolution

$$\langle I(\vec{\alpha})\rangle = O(\vec{\alpha}) * \langle F(\vec{\alpha})\rangle \tag{3.28}$$

où $\langle F(\vec{\alpha})\rangle$ est alors la réponse impulsionnelle c'est–à–dire l'image d'un point source.

Dans l'espace de Fourier, l'Eq. (3.28) devient

$$\left\langle \widehat{I}\left(\vec{f}\right)\right\rangle = \widehat{O}(\vec{f}) \cdot \left\langle \widehat{F}\left(\vec{f}\right)\right\rangle \tag{3.29}$$

où $\left\langle \widehat{I}\left(\vec{f}\right)\right\rangle$, $\widehat{O}(\vec{f})$ et $\left\langle \widehat{F}\left(\vec{f}\right)\right\rangle$ sont les transformées de Fourier respectives de $\langle I(\vec{\alpha})\rangle$, $O(\vec{\alpha})$ et $\langle F(\vec{\alpha})\rangle$ et $\vec{f}$ est la fréquence angulaire associée à $\vec{\alpha}$. $\left\langle \widehat{F}\left(\vec{f}\right)\right\rangle$ est la fonction de transfert optique de l'instrument.

Nous ne considérerons ici que le cas d'une onde plane monochromatique se propageant à travers l'atmosphère de l'espace vers le sol selon la direction du zénith. Dans le cadre des hypothèses de faibles perturbations et de champ proche, l'amplitude complexe de l'onde $\Psi_0(\vec{r})$ sur la pupille du télescope peut s'écrire [122]

$$\Psi_0(\vec{r}) = \exp(j\varphi(\vec{r})). \tag{3.30}$$

Elle est définie sur le support de la pupille

$$\begin{aligned} \Pi\left(\frac{2\vec{r}}{D}\right) &= 1 \text{ si } \left|\tfrac{2r}{D}\right| \leq 1 \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Dans le plan focal du télescope, $\left\langle \widehat{F}\left(\vec{f}\right)\right\rangle$ est donné par l'auto–corrélation de $\Psi_0(\vec{r})\Pi\left(\frac{2\vec{r}}{D}\right)$

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{F}\left(\vec{f}\right)\right\rangle &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\lambda}{D}\right)^2 \left\langle \int \mathrm{d}\vec{u}\Psi_0\left(\lambda\vec{u}\right)\overline{\Psi_0\left(\lambda(\vec{u}+\vec{f})\right)}\Pi\left(\lambda\vec{u}\right)\overline{\Pi\left(\lambda(\vec{u}+\vec{f})\right)}\right\rangle \quad (3.32) \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\lambda}{D}\right)^2 \int \mathrm{d}\vec{u}\left\langle \Psi_0\left(\lambda\vec{u}\right)\overline{\Psi_0\left(\lambda(\vec{u}+\vec{f})\right)}\right\rangle \Pi\left(\lambda\vec{u}\right)\overline{\Pi\left(\lambda(\vec{u}+\vec{f})\right)}. \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, on reconnaît la fonction de cohérence mutuelle de l'amplitude complexe $C_\Psi(\lambda\vec{f})$ [93, 91, 54]

$$\begin{aligned} C_\Psi(\vec{f}) &= \left\langle \Psi_0\left(\lambda\vec{u}\right)\overline{\Psi_0\left(\lambda(\vec{u}+\vec{f})\right)}\right\rangle \\ &= \left\langle \exp\left\{j\left[\varphi\left(\lambda\vec{u}\right)-\varphi\left(\lambda(\vec{u}+\vec{f})\right)\right]\right\}\right\rangle \end{aligned} \tag{3.33}$$

La phase résultant de la somme d'un grand nombre de variables indépendantes, elle suit une statistique gaussienne. Par conséquent [14, 122],

$$\left\langle \exp\left\{j\left[\varphi\left(\lambda\vec{u}\right)-\varphi\left(\lambda(\vec{u}+\vec{f})\right)\right]\right\}\right\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left\langle\left|\varphi\left(\lambda\vec{u}\right)-\varphi\left(\lambda(\vec{u}+\vec{f})\right)\right|^2\right\rangle\right] \tag{3.34}$$

et on obtient

$$C_\Psi(\vec{f}) = \exp\left[-\frac{1}{2}D_\varphi(\lambda\vec{f})\right]. \tag{3.35}$$

$\left\langle \widehat{F}\left(\vec{f}\right)\right\rangle$ est donc le produit de la fonction de cohérence de l'onde $C_\Psi(\vec{f})$ par la fonction de transfert du télescope qui, pour une pupille pleine circulaire de diamètre D, s'écrit

$$\widehat{F_T}\left(\vec{f}\right) = \frac{2}{\pi}\left[\arccos\left(\frac{\lambda f}{D}\right) - \frac{\lambda f}{D}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda f}{D}\right)^2}\right], \tag{3.36}$$

$$\langle\widehat{F}\left(\vec{f}\right)\rangle = C_\Psi(\vec{f})\cdot\widehat{F_T}\left(\vec{f}\right). \tag{3.37}$$

La qualité d'une image est donnée par sa réponse impulsionnelle

$$\langle F(\vec{\alpha})\rangle = TF^{-1}\left[\langle\widehat{F}\left(\vec{f}\right)\rangle\right]. \tag{3.38}$$

$\widehat{F}_T\left(\vec{f}\right)$ et $C_\Psi(\vec{f})$ ne dépendant que du module de $\vec{f}$, la transformation de Fourier de l'Eq. (3.38) devient une transformation de Hankel

$$\langle F(\vec{\alpha})\rangle = 2\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{d}f\, f\, J_0\left(2\pi\alpha f\right) \langle \widehat{F}\left(\vec{f}\right)\rangle. \tag{3.39}$$

$\langle F(0)\rangle$ est appelé le pouvoir de résolution de l'instrument au sens de Strehl

$$R = \int \mathrm{d}\vec{f} \langle \widehat{F}\left(\vec{f}\right)\rangle. \tag{3.40}$$

$\langle F(\vec{\alpha})\rangle$ est aussi caractérisée par sa largeur à mi–hauteur ε. ε vérifie

$$\langle F(\varepsilon/2)\rangle = \langle F(0)\rangle/2. \tag{3.41}$$

Si les effets de la turbulence sont négligeables $\widehat{F}\left(\vec{f}\right) = \widehat{F}_T\left(\vec{f}\right)$ et

$$\langle F(\vec{\alpha})\rangle = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D}{\lambda}\right)^2 \left[\frac{2J_1(\pi D\alpha/\lambda)}{\pi D\alpha/\lambda}\right]^2 \tag{3.42}$$

On en déduit $R = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D}{\lambda}\right)^2$ et $\varepsilon = 1.03\frac{\lambda}{D}$.

Si au contraire les effets de la turbulence sont prédominants $\widehat{F}\left(\vec{f}\right) \simeq C_\Psi(\vec{f})$. Pour le modèle de Kolmogorov ($D_\varphi(\lambda f)$ est donnée par l'Eq. (3.24)) et $\langle F(\vec{\alpha})\rangle$ s'écrit

$$\langle F(\vec{\alpha})\rangle \simeq 2\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{d}f\, f\, J_0\left(2\pi\alpha f\right) \exp\left[-3,44\left(\frac{\lambda f}{r_0}\right)^{5/3}\right]. \tag{3.43}$$

En effectuant le changement de variable

$$f \to \frac{x}{2\pi\alpha}$$

et en posant

$$a = \left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{-1/2} \frac{2\pi\alpha r_0}{\lambda},$$

on obtient

$$\langle F(\vec{\alpha})\rangle \simeq \frac{1}{2\pi\alpha^2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^2 J_0(x) \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^{5/3}\right]. \tag{3.44}$$

L'intégrale est égale à celle donnée par l'Eq.(2.11) pour $\mu = 2$, $\alpha = 0$ et $q = 5/3$. q étant supérieur à 1, il vient

$$\langle F(\vec{\alpha})\rangle \simeq \frac{\pi}{4}\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{\Gamma(6/5)} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left[\begin{array}{c} 6(n+1)/5 \\ n+1 \end{array}\right] \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \tag{3.45}$$

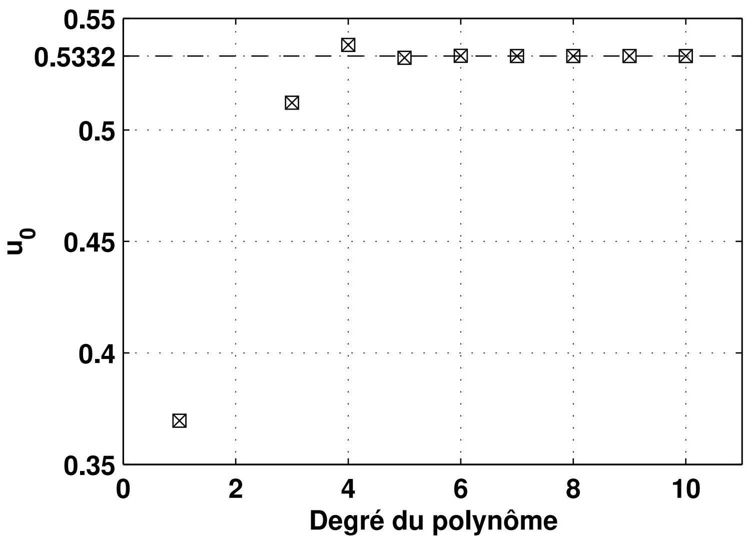


FIG. 3.3 – Convergence de la première racine réelle du polynôme $P(u)$ en fonction du degré du polynôme.

On trouve $R = \frac{\pi}{4}\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^2$. En introduisant l'Eq. (3.45) dans l'Eq. (3.41) on en déduit

$$\varepsilon = \frac{2}{\pi}\sqrt{u_0\left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]}\frac{\lambda}{r_0} \tag{3.46}$$

où u_0 est la première racine réelle du polynôme

$$P(u) = \frac{1}{2} + \Gamma(6/5)\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}u^n\Gamma\left[\begin{array}{c}6(n+1)/5\\ n+1\end{array}\right]. \tag{3.47}$$

La figure 3.3 montre la convergence de la racine u_0 en fonction du degré du polynôme. u_0 converge rapidement vers la valeur 0.5332 ce qui donne

$$\varepsilon = 0.9759\frac{\lambda}{r_0}. \tag{3.48}$$

Et l'on retrouve la définition du seeing tel que définit par Roddier et al. [135].

Pour le modèle de Von Kármán , l'intégrale de l'Eq. (3.40) avec $\langle\widehat{F}\left(\vec{f}\right)\rangle = C_\Psi(\vec{f})$ et $D_\varphi(r)$ donnée par l'Eq. (3.22) n'est pas définie. En effet, à l'infini $C_\Psi(\vec{f}) = \exp\left(-\sigma_\varphi^2\right) =$ constante et l'intégrant $fC_\Psi(\vec{f})$ tend vers l'infini. Par conséquent, la transformation de Fourier ne peut s'appliquer à $C_\Psi(\vec{f})$ pour le modèle de Von Kármán .

Pour quantifier l'effet de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ sur la qualité d'une image au plan focal d'un télescope, il faut donc calculer la réponse impulsionnelle du système télescope/atmosphère

$$\langle F(\vec{\alpha})\rangle = 2\pi\int_0^{+\infty} fJ_0(2\pi\alpha f)\langle\widehat{F}_T(f)\rangle\cdot C_\Psi(\vec{f})\mathrm{d}f. \tag{3.49}$$

Nous allons en particulier nous intéresser au rapport de Strehl SR [157] :

$$SR = \frac{\langle F(0) \rangle}{\langle F_T(0) \rangle} \tag{3.50}$$

et à la largeur à mi-hauteur normalisée de la réponse impulsionnelle $\langle F(\vec{\alpha}) \rangle$ $FWHM_N$:

$$FWHM_N = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_T} \tag{3.51}$$

ou ε_T est la largeur à mi-hauteur de la réponse impulsionnelle de l'instrument ($\varepsilon_T = 1.03\lambda/D$).

Les graphiques de la figure 3.4 montrent la $FWHM_N$ (courbes supérieures à la ligne pointillée) et le SR (courbes inférieures à la ligne pointillée) en fonction du diamètre D pour différent couples de valeurs $[r_0; f_0]$. La ligne pointillée indique la limite théorique de la $FWHM_N$ et du SR. Les courbes tiretées correspondent aux valeurs de la $FWHM_N$ et du SR pour une échelle externe infinie ($f_0 = 0$ m^{-1}). Pour $f_0 = 0$ et pour les grands diamètres, la $FWHM_N$ et le SR varient proportionnellement à D et D^{-2}, respectivement. Ces graphiques illustrent un principe que l'on pourrait appeler de "vases communicants" entre les effets de l'échelle externe d'une part et du paramètre de Fried d'autre part sur la $FWHM_N$ et le SR.

Lorsque les valeurs de r_0 et f_0 sont favorables (c.a.d. r_0 et f_0 grands), pour $Df_0 > 1$, la $FWHM_N$ tend vers la résolution théorique de l'instrument et le SR sature (Fig. 3.4.c). Par contre, lorsque les valeurs de r_0 et f_0 sont défavorables, la $FWHM_N$ et le SR se comportent comme pour $f_0 = 0$ avec cependant, une diminution de la $FWHM_N$ et une augmentation de le SR par rapport à leurs valeurs pour $f_0 = 0$, mais le gain est moins important que précédemment (Fig. 3.4.a,b,d). Si l'un des paramètres est favorable et l'autre défavorable, selon leur poids respectifs par rapport à D, on basculera vers le cas r_0 et f_0 favorables ou le cas r_0 et f_0 défavorables (Fig. 3.4.e,f).

Les figures 3.5, 3.6 et 3.7 montrent les lignes de niveau du SR et de la $FWHM_N$ en fonction de r_0 et f_0 pour $D = 1$ m, $D = 10$ m et $D = 100$ m. L'axe supérieur des abscisses indique la valeur du SR et de la $FWHM_N$ pour $f_0 = 0$ m^{-1} et pour les valeurs de r_0 portées sur l'axe inférieur des abscisses. Ces valeurs du SR et de la $FWHM_N$ sont les limites vers lesquelles tendent les lignes de niveau de même valeurs.

Comme précédemment pour r_0 et f_0 favorables, le SR et la $FWHM_N$ sont proches de leurs optimums. Par contre, si r_0 ou f_0 est défavorable, le gain sur les valeurs du SR et de la $FWHM_N$ par rapport au cas $f_0 = 0$ peut être très important seulement si l'autre paramètre f_0 ou r_0 devient très favorable.

3.4 Effet de l'échelle externe de cohérence sur la taille du domaine d'isoplanétisme

L'isoplanétisme désigne la dépendance de la réponse impulsionnelle avec la direction de visée et l'angle d'isoplanétisme définit la zone angulaire à l'intérieur de laquelle la

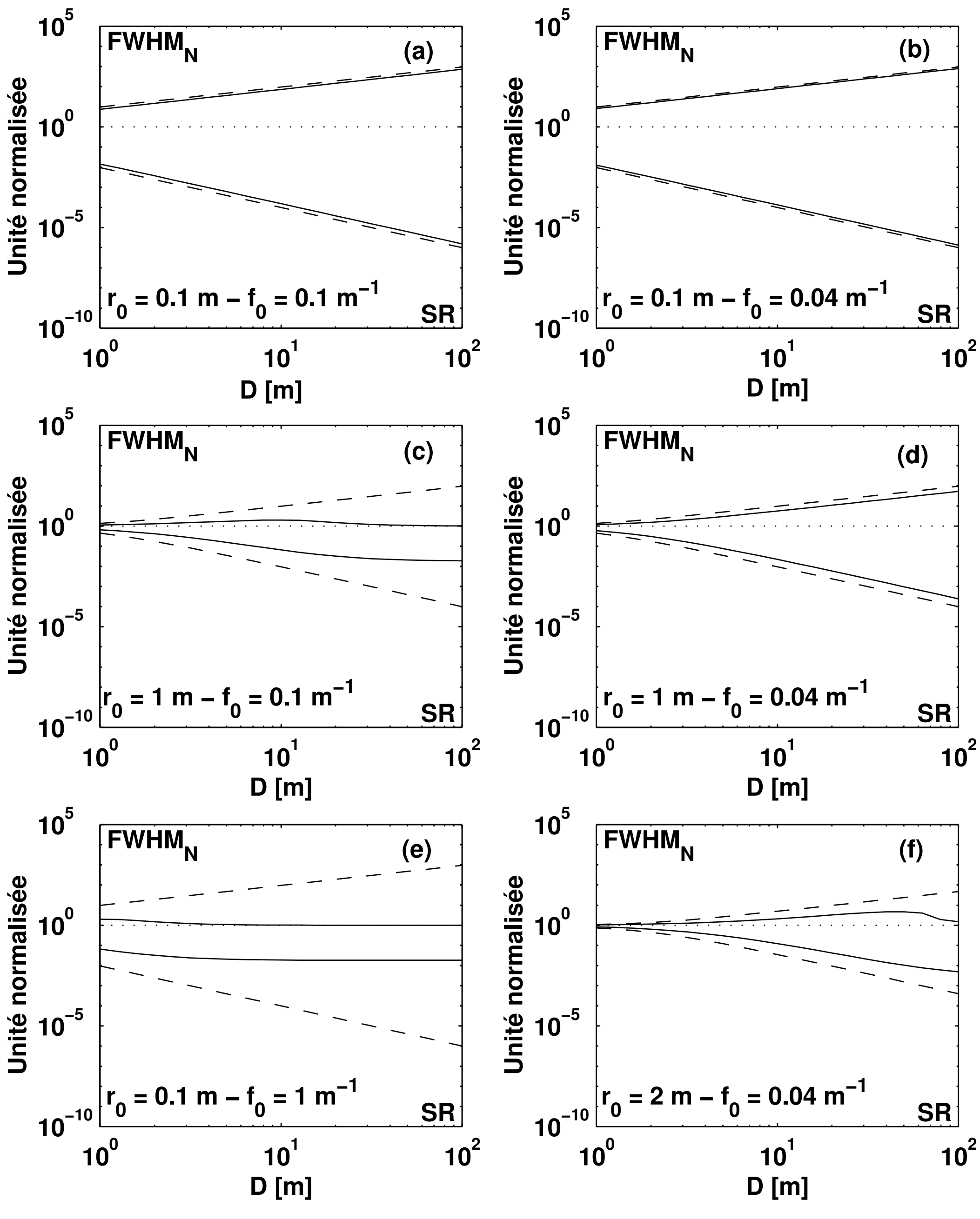


FIG. 3.4 – Variation de la $FWHM_N$ (courbes supérieures à la ligne pointillée) et du SR (courbes inférieures à la ligne pointillée) en fonction du diamètre D pour différents couples de valeurs $[r_0; f_0]$. La ligne pointillée indique la limite théorique de la $FWHM_N$ et du SR. Les courbes tiretées correspondent aux valeurs de la $FWHM_N$ et du SR pour une échelle externe infinie et les courbes en trait plein correspondent aux valeurs de la $FWHM_N$ et du SR pour une échelle externe finie

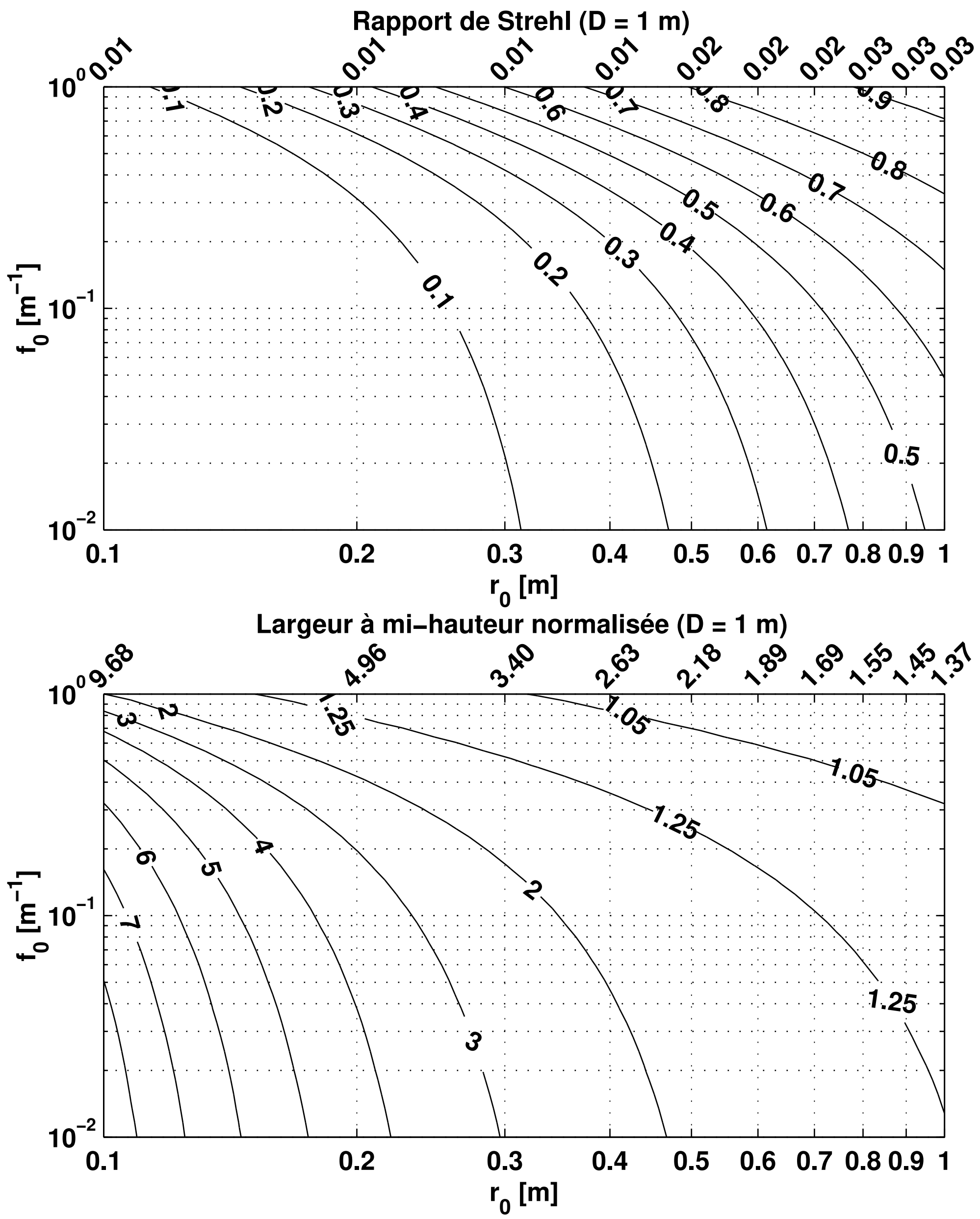


FIG. 3.5 – Lignes de niveau du SR (graphique supérieur) et de la $FWHM_N$ (graphique inférieur) en fonction de r_0 et f_0 pour $D = 1$ m. L'axe supérieur des abscisses donne la valeur du SR et de la $FWHM_N$ pour les valeurs de r_0 portées sur l'axe inférieur des abscisses et pour $f_0 = 0$.

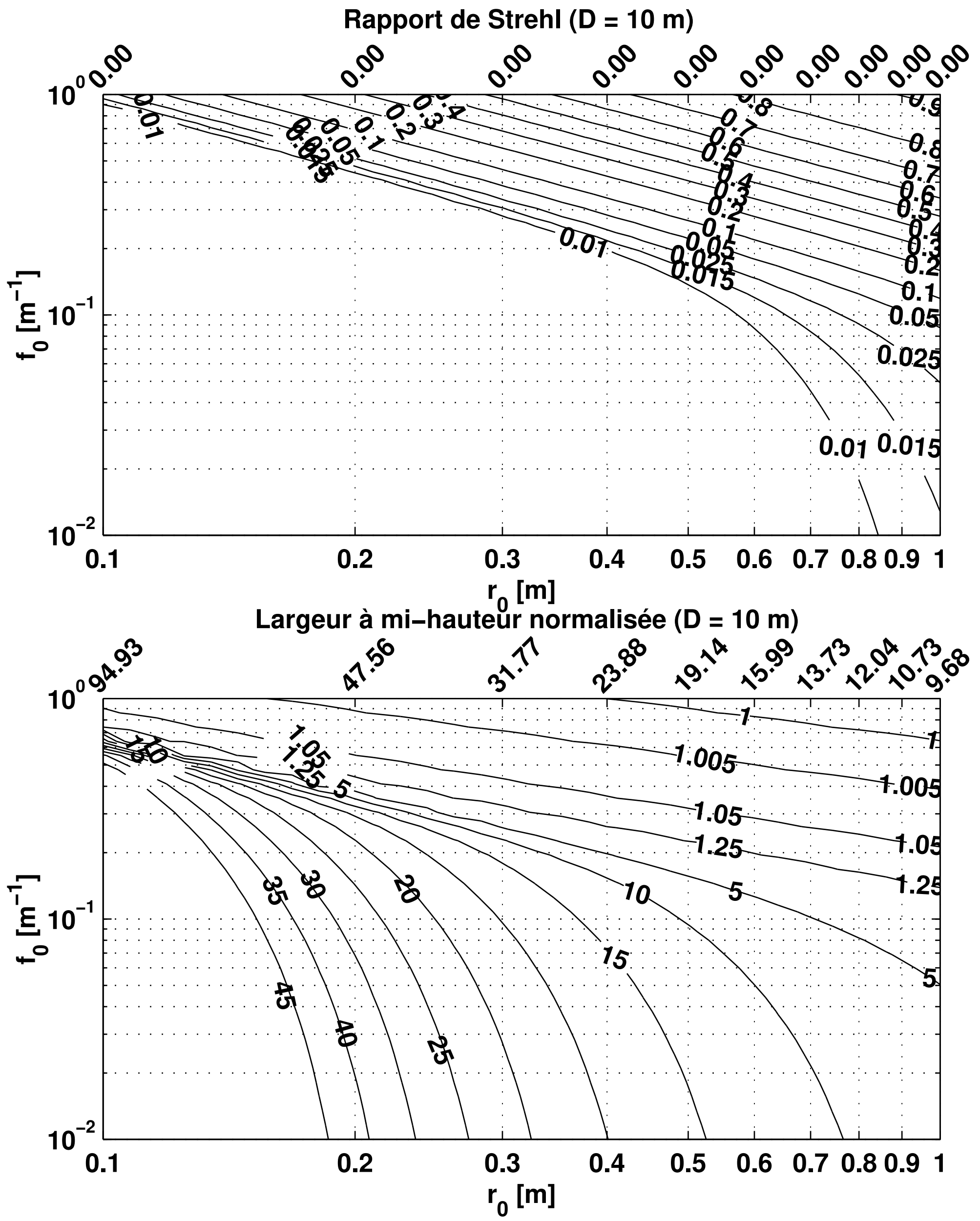


FIG. 3.6 – Lignes de niveau du SR (graphique supérieur) et de la $FWHM_N$ (graphique inférieur) en fonction de r_0 et f_0 pour $D = 10$ m. L'axe supérieur des abscisses donne la valeur du SR et de la $FWHM_N$ pour les valeurs de r_0 portées sur l'axe inférieur des abscisses et pour $f_0 = 0$.

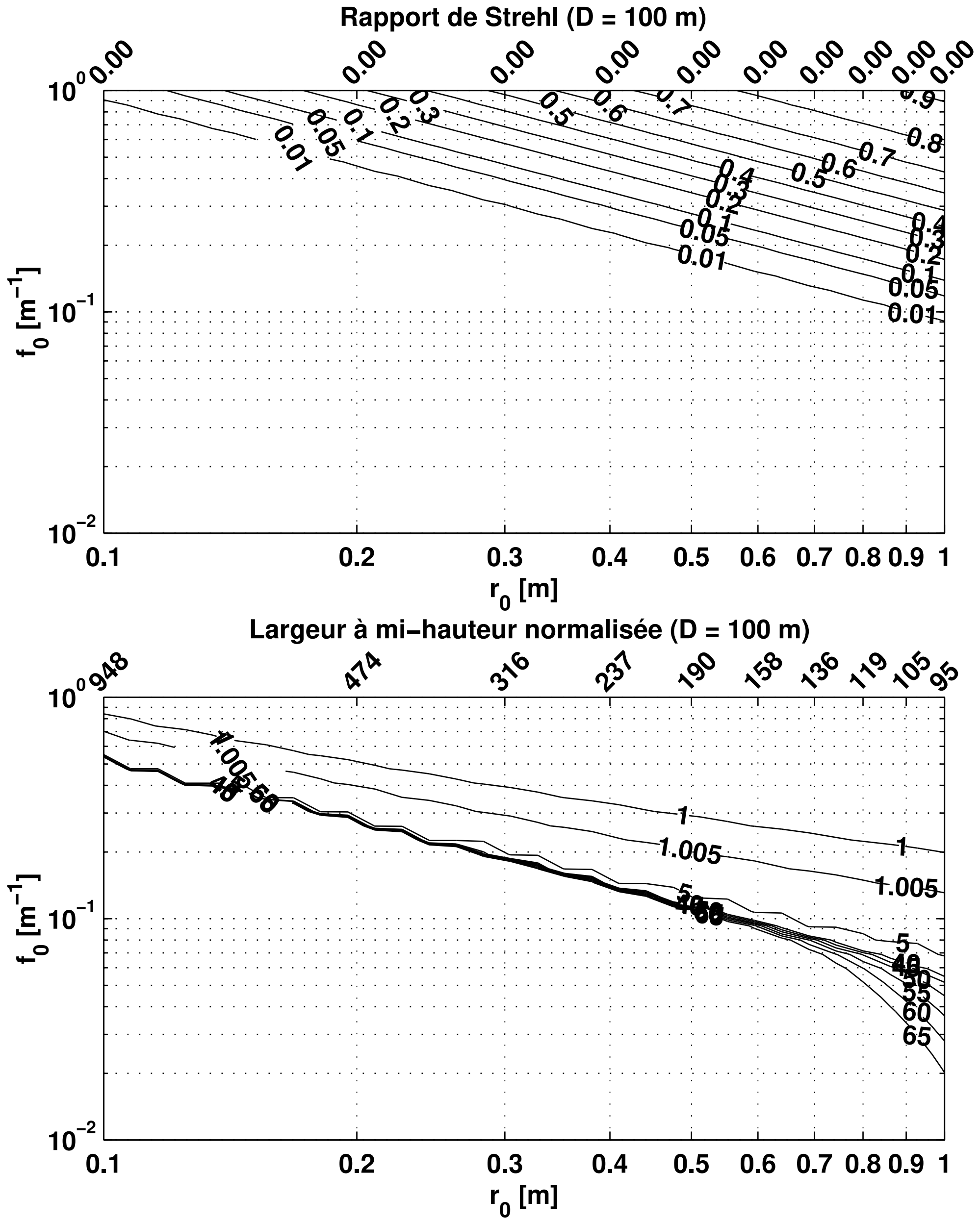


FIG. 3.7 – Lignes de niveau du SR (graphique supérieur) et de la $FWHM_N$ (graphique inférieur) en fonction de r_0 et f_0 pour $D = 100$ m. L'axe supérieur des abscisses donne la valeur du SR et de la $FWHM_N$ pour les valeurs de r_0 portées sur l'axe inférieur des abscisses et pour $f_0 = 0$.

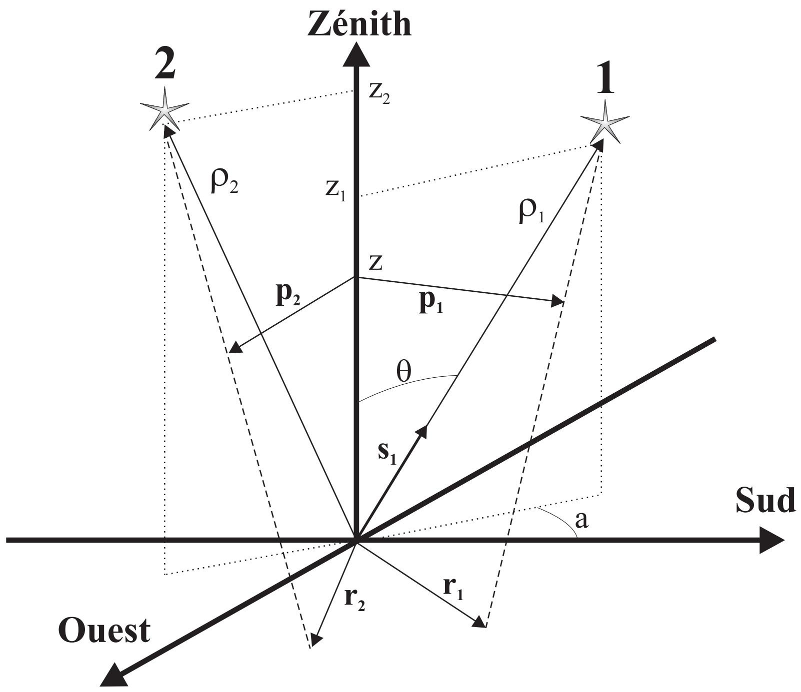


FIG. 3.8 – Géométrie du problème.

différence entre la réponse impulsionnelle sur l'axe optique et la réponse impulsionnelle hors–axe est négligeable.

Plusieurs définitions pour l'angle d'isoplanétisme existe [58, 85, 158, 125, 59, 168, 50, 30, 144, 53] selon que l'on se place dans le cadre de l'Optique Adaptative, de l'Interférométrie à Longues Bases ou de l'Interférométrie des Tavelures. Nous définissons l'angle d'isoplanétisme θ_0 comme la décroissance à e^{-1} de la cohérence mutuelle en un même point de deux ondes planes issues de deux sources différentes. La géométrie du problème est donnée par la figure 3.8.

Soient $\Psi_1(\vec{r}_1) = \exp(j\varphi_1(\vec{r}_1))$ et $\Psi_2(\vec{r}_2) = \exp(j\varphi_2(\vec{r}_2))$, l'amplitude complexe des ondes planes issues de 1 et 2, respectivement. La cohérence mutuelle s'écrit

$$\begin{aligned} C_{\Psi_{12}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \langle \Psi_1(\vec{r}_1)\overline{\Psi_2(\vec{r}_2)} \rangle \\ &= \langle \exp\{j\,[\varphi_1(\vec{r}_1) - \varphi_2(\vec{r}_2)]\}\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}D_\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right] \end{aligned} \tag{3.52}$$

ou $\overline{\Psi}$ désigne le complexe conjugué de Ψ et $D_\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle |\varphi_1(\vec{r}_1) - \varphi_2(\vec{r}_2)|^2 \rangle$. Un paramètre important est la distance transverse $\vec{\Delta}_p(z)$ entre les chemins optiques

$$\vec{\Delta}_p(z) = \vec{p}_1(z) - \vec{p}_2(z) \tag{3.53}$$

avec $\vec{p}_1(z) = \vec{r}_1 + \frac{z}{z_1}(\vec{\rho}_1 - \vec{r}_1)$ et $\vec{p}_2(z) = \vec{r}_2 + \frac{z}{z_2}(\vec{\rho}_2 - \vec{r}_2)$.

$D_\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ se déduit de l'Eq. (3.17)

$$D_\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0.07 k^2 f_0^{-5/3} \times \int_0^{+\infty} \mathrm{d}z C_n^2(z) \left[\frac{\Gamma(5/6)}{2^{1/6}} - \left(2\pi|\vec{\Delta}_p(z)|f_0\right)^{5/6} K_{5/6}\left(2\pi|\vec{\Delta}_p(z)|f_0\right) \right] \quad (3.54)$$

Si les deux sources sont rejetées à l'infini et la source 2 est placée au zénith sur l'axe Z, $\vec{p}_1(z) = \vec{r}_1 + z\vec{s}_1$, $\vec{p}_2 = \vec{r}_2$ et pour $\vec{r} = \vec{r}_1 = \vec{r}_2$

$$|\vec{\Delta}_p(z)| = z \tan\theta \simeq z\theta \text{ pour les petits angles.} \quad (3.55)$$

Le vecteur $\vec{s}_1$ a pour coordonnées $[\cos a \sin\theta \tan\theta; \sin a \sin\theta \tan\theta; \cos\theta \tan\theta]$ avec a l'azimuth et θ l'angle zénithal de l'étoile 1. Dans ces conditions, $D_\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ s'écrit

$$D_\varphi(\theta) = 0.07 k^2 f_0^{-5/3} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}z C_n^2(z) H(z, \theta, f_0) \quad (3.56)$$

avec

$$H(z, \theta, f_0) = \frac{\Gamma(5/6)}{2^{1/6}} - (2\pi z\theta f_0)^{5/6} K_{5/6}(2\pi z\theta f_0). \quad (3.57)$$

En introduisant la variable réduite $u = 2\pi z\theta f_0$ et en imposant $u \ll 1$, on peut développer, au second ordre, la fonction $K_{5/6}(u)$ à partir de son développement en série donné par l'Eq.(2.35),

$$\begin{aligned} K_{5/6}(u) \ \simeq \ & \frac{\Gamma(-5/6)}{2^{11/6}} u^{5/6} + \frac{\Gamma(5/6)}{2^{1/6}} u^{-5/6} \\ & - \frac{\Gamma(-11/6)}{2^{23/6}} u^{17/6} - \frac{\Gamma(-1/6)}{2^{13/6}} u^{7/6} + \ldots \end{aligned} \quad (3.58)$$

et

$$H(u) \ \simeq \ -\frac{\Gamma(-5/6)}{2^{11/6}} u^{5/3} + \frac{\Gamma(-1/6)}{2^{13/6}} u^{7/6} + O\left(u^{11/3}\right). \quad (3.59)$$

L'Eq. (3.56) devient

$$D_\varphi(\theta) = 0.07 k^2 \left[-\frac{\pi^{5/3}\Gamma(-5/6)}{2^{1/6}} \theta^{5/3} \mu_{5/3} + \frac{\pi^2 \Gamma(-1/6)}{2^{1/6}} \theta^2 \mu_2 f_0^{1/3} \right] \quad (3.60)$$

avec $\mu_\alpha = \int_0^{+\infty} z^\alpha C_n^2(z) \mathrm{d}z$ qui a pour unité $[\mathrm{m}^{\alpha+1/3}]$.

L'angle d'isoplanétisme θ_0 vérifie

$$C_{\Psi_{12}}(\theta_0) = e^{-\frac{1}{2} D_\varphi(\theta_0)} = e^{-1} \quad (3.61)$$

En introduisant l'Eq. (3.60) dans l'Eq. (3.61), on trouve que θ_0, au premier ordre, est solution de

$$-\frac{\pi^{5/3}\Gamma(-5/6)}{2^{1/6}} \theta_0^{5/3} \mu_{5/3} + \frac{\pi^2 \Gamma(-1/6)}{2^{1/6}} \theta_0^2 \mu_2 f_0^{1/3} - \frac{\sqrt{2}\pi^{5/3}\Gamma(1/3)}{\Gamma(7/6) k^2} = 0. \quad (3.62)$$

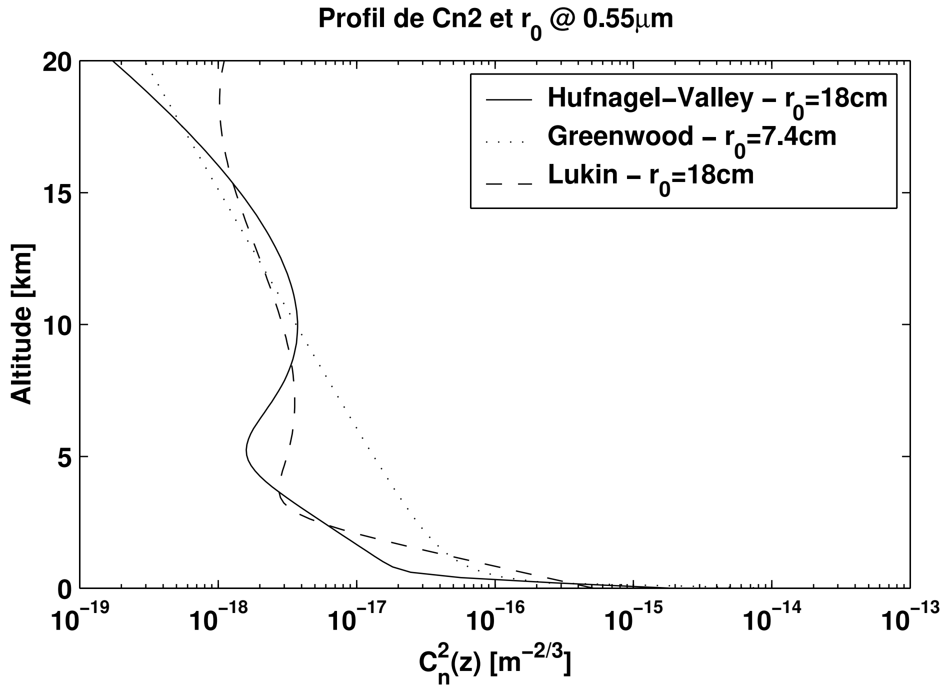


FIG. 3.9 – Profil de C_n^2 pour différents modèles.

$u = 2\pi z\theta_0 f_0 \ll 1$ impose $\theta_0 \ll 40$ secondes d'arc pour $z = 20$ km et $f_0 = (1/25)\mathrm{m}^{-1}$.

Lorsque l'échelle externe est infinie ($f_0 = 0$) :

$$\theta_0^{5/3} = \left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{-5/6}\left(\frac{r_0}{Z}\right)^{5/3}. \tag{3.63}$$

soit $\theta_0 = 0.48 r_0/Z$ ou Z est une altitude moyenne : $Z^{5/3} = \mu_{5/3}/\mu_0$. Ce résultat peut s'appliquer indifféremment à l'Optique Adaptative ou à l'Interférométrie. En ce qui concerne l'interférométrie des tavelures, le moment statistique à considérer n'est plus $C_{\Psi_{12}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ mais $C^2_{\Psi_{12}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$[125]. Dans ce cas l'Eq. (3.62) devient

$$-\frac{\pi^{5/3}\Gamma(-5/6)}{2^{1/6}}\theta_0^{5/3}\mu_{5/3} + \frac{\pi^2\Gamma(-1/6)}{2^{1/6}}\theta_0^2\mu_2 f_0^{1/3} - \frac{\sqrt{2}\pi^{5/3}\Gamma(1/3)}{2\Gamma(7/6)k^2} = 0. \tag{3.64}$$

et l'Eq. (3.63) se réécrit

$$\theta_0^{5/3} = \frac{1}{2}\left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{-5/6}\left(\frac{r_0}{Z}\right)^{5/3} \tag{3.65}$$

soit $\theta_0 = 0.31 r_0/Z$ et l'on retrouve l'expression dérivée par Roddier et al. (1982) [125].

Pour calculer θ_0, nous avons besoin de connaître le profil de C_n^2 en fonction de l'altitude z comme nous le montre les Eqs.(3.56), (3.62) et (3.64). Différents modèles de profils de C_n^2 nocturnes ont été proposés. Nous en avons retenus trois :

– le modèle de Hufnagel–Valley [127]

$$\begin{aligned} C_n^2(z) &= 8,16.10^{-54} z^{10} \exp\left(-\frac{z}{1000}\right) \\ &\quad +3,02.10^{-17} \exp\left(-\frac{z}{1500}\right) + 1,90.10^{-15} \exp\left(-\frac{z}{100}\right), \end{aligned} \tag{3.66}$$

– le modèle de Greenwood [127]

$$\begin{aligned} C_n^2(z) &= \left[2,2.10^{-13}\left(h+10\right)^{-1,3}\right) + 4,3.10^{-17}\right] \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{z}{4000}\right), \end{aligned} \tag{3.67}$$

– le modèle de Lukin [90]

$$\begin{aligned} C_n^2(z) &= 5,19.10^{-16}.10^{-0.86z} \\ &\quad +10^{-18,34+0,29z-0,0284z^2+0,000743z^3}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

La variation de θ_0 en fonction de f_0 est présentée sur la figure 3.10 pour les trois profils de C_n^2. θ_0 est déduit de l'Eq. (3.61) avec $D_\varphi(\theta_0)$ donnée par l'Eq. (3.56) pour les courbes en trait fin et de l'expression approchée donnée par l'Eq. (3.62) pour les courbes en trait épais. θ_0 est sensible à la fois à l'énergie totale de la turbulence ($\int C_n^2(z)\mathrm{d}z$) et à la répartition de l'énergie ($C_n^2(z)$) dans les hautes couches. L'Eq. (3.62) est valable pour les longueurs d'onde du visible. La valeur finie de l'échelle externe a pour effet d'accroître le domaine d'isoplanétisme. Le gain est particulièrement significatif pour les faibles valeurs de l'échelle externe et pour les grandes longueurs d'onde.

3.5 Effet de l'échelle externe de cohérence sur la valeur de l'indice de scintillation

L'indice de scintillation est défini par la variance relative σ_I^2 de l'intensité [3].

$$\sigma_I^2 = \frac{\langle \Delta I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} \tag{3.69}$$

Elle se déduit de la variance σ_χ^2 des fluctuations du module de l'amplitude complexe du champ électro–magnétique d'une onde plane se propageant à travers l'atmosphère :

$$\sigma_I^2 = 4\sigma_\chi^2 \tag{3.70}$$

qui elle-même se déduit du spectre des fluctuations d'amplitude $W_\chi(\vec{f})$:

$$\sigma_\chi^2 = \int \mathrm{d}\vec{f} W_\chi(\vec{f}) \tag{3.71}$$

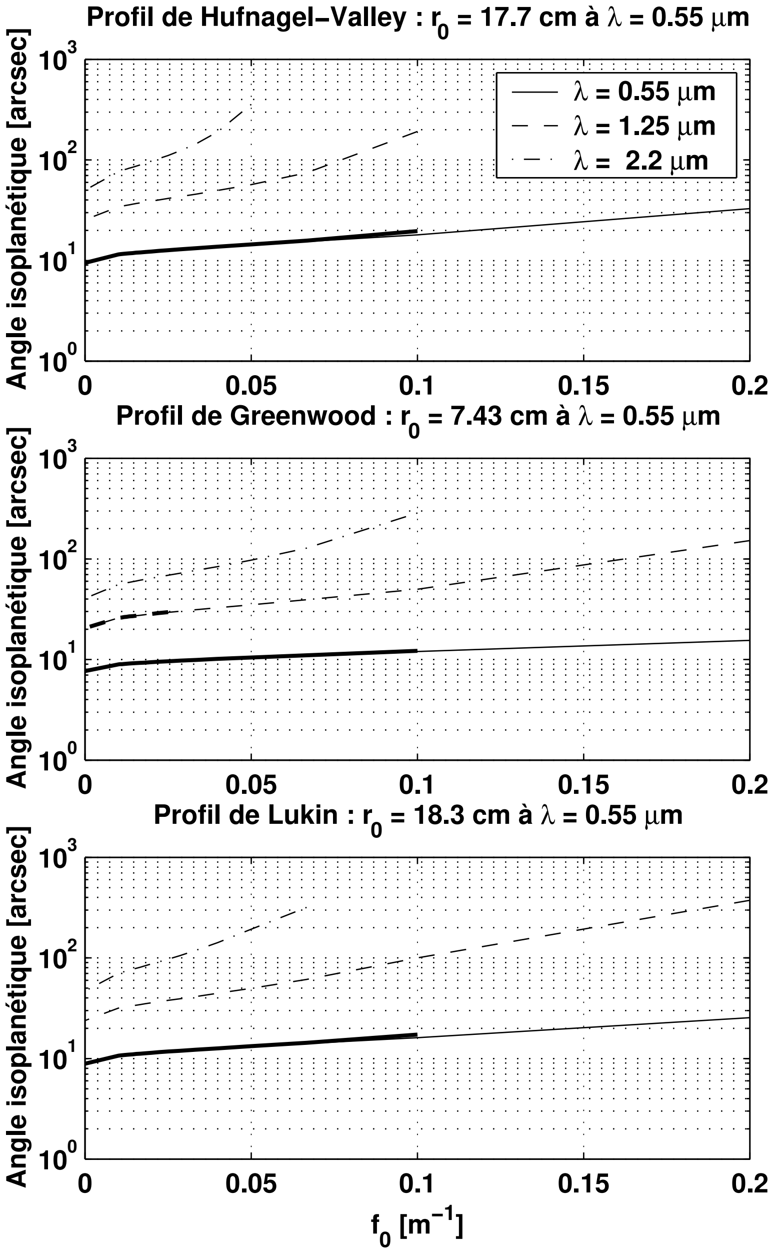


FIG. 3.10 – Variation de l'angle d'isoplanétisme en fonction de f_0 pour trois longueurs d'onde $0,55\ \mu$m, $1,25\ \mu$m et $2,2\ \mu$m et pour trois modèles de profils de $C_n^2(z)$.

Ce spectre s'écrit [122]

$$W_\chi(\vec{f}) = \int \mathrm{d}z W_\varphi(\vec{f}, z) \sin^2 \pi\lambda z f^2 \tag{3.72}$$

ou $W_\varphi(\vec{f})$ est le spectre des fluctuations de phase donné par

$$W_\varphi(\vec{f}) = 9,7.10^{-3} k^2 C_n^2(z) \left(f^2 + f_0^2\right)^{-11/6}. \tag{3.73}$$

L'indice de scintillation mesuré sur une pupille pleine de diamètre D s'écrit

$$\sigma_\chi^2 = \int \mathrm{d}\vec{f} W_\chi(\vec{f}) \left[\frac{2J_1(\pi D f)}{\pi D f}\right]^2. \tag{3.74}$$

Dans le cadre de cet indice de scintillation filtrée, si la fréquence de coupure du télescope $f_c = 1/D$ est telle que $\pi\lambda z f_c^2 \ll 1$ (pour $z = 20$ km et $\lambda = 0,55$ μm ceci impose $D \gg 19$ cm) alors l'Eq. (3.74) devient

$$\begin{aligned} \sigma_\chi^2 \;&\simeq\; 2\pi \times 9,7.10^{-3} k^2 \int \mathrm{d}z C_n^2(z) \\ &\times \int_0^{+\infty} \mathrm{d}f f \left(f^2 + f_0^2\right)^{-11/6} (r_F f)^4 \left[\frac{2J_1(\pi D f)}{\pi D f}\right]^2. \end{aligned} \tag{3.75}$$

avec $r_F = \sqrt{\pi\lambda z}$, le rayon de Fresnel. Avec le changement de variable $f \to x/(\pi D)$, l'Eq.(3.75) se ré–écrit

$$\begin{aligned} \sigma_\chi^2 \;&\simeq\; 8\pi \times 9,7.10^{-3} k^2 \int \mathrm{d}z C_n^2(z) r_F^4 (\pi D)^{-7/3} (\pi D f_0)^{-11/3} \\ &\times \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^4 \left[1 + \left(\frac{x}{\pi D f_0}\right)^2\right]^{-11/6} J_1^2(x). \end{aligned} \tag{3.76}$$

Cette intégrale est identique à celle de l'Eq.(2.28) pour $\mu = 4$, $\alpha = 1$, $q = 2$, $p = 11/6$ et $a = \pi D f_0$. Avec ces valeurs introduites dans l'Eq.(2.32), on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_\chi^2 \;&\simeq\; \frac{2^{10/3}\Gamma(7/6)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/3)} \int C_n^2(z) z^2 \mathrm{d}z D^{-7/3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &\times \left\{ \Gamma\left[\begin{array}{c} -n + 7/6, n + 1/3 \\ n + 5/6 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{2n} \right. \\ &\left. + \Gamma\left[\begin{array}{c} -n - 7/6, n + 3/2 \\ n + 2 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{2n+7/3} \right\}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Avec les relations des Eqs.(1.17) et (1.16), σ_χ^2 s'écrit comme la somme de deux fonctions hypergéométriques,

$$\begin{aligned}\sigma_\chi^2 &\simeq \frac{2^{10/3}\Gamma(7/6)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/3)}\int C_n^2(z)z^2\mathrm{d}zD^{-7/3} \\ &\quad\times\left\{\Gamma\left[\begin{array}{c}7/6,1/3\\5/6\end{array}\right]{}_1F_2\left[\begin{array}{c}1/3;(\pi Df_0)^2\\5/6,-1/6\end{array}\right]\right. \\ &\quad\left.+(\pi Df_0)^{27/3}\,\Gamma\left[7/6,3/2\right]{}_1F_2\left[\begin{array}{c}3/2;(\pi Df_0)^2\\2,13/6\end{array}\right]\right\}. \qquad (3.78)\end{aligned}$$

Dans le cas $\pi Df_0 \ll 1$, l'Eq. (3.77) se développe pour les premiers ordres

$$\begin{aligned}\sigma_\chi^2 &\simeq 4,34D^{-7/3}\int C_n^2(z)z^2\mathrm{d}z \qquad (3.79)\\ &\quad\times\left\{1-23,69(Df_0)^2+33,78(Df_0)^{7/3}+115,39(Df_0)^{13/3}\right\},\end{aligned}$$

et pour $f_0 = 0$

$$\sigma_\chi^2 \simeq 4,34D^{-7/3}\int C_n^2(z)z^2\mathrm{d}z. \qquad (3.80)$$

La figure 3.11 montre la variation de σ_χ^2 déduit de l'Eq.(3.78) en fonction du diamètre de la pupille du télescope pour $f_0 = 0,\ 0,04$ et $0,2\ \mathrm{m}^{-1}$ et pour les trois profils de C_n^2 correspondant aux modèles de Hufnagel–Valley, de Greenwood et de Lukin définis dans la section précédente. D'un profil à l'autre, l'indice de scintillation est presque le même car il est principalement dominé par l'intensité du C_n^2 dans les hautes couches et pour les trois profils de C_n^2, les valeurs du C_n^2 aux hautes altitudes sont proches. L'indice de scintillation est aussi assez peu sensible à l'échelle externe puisque son spectre filtre les basses fréquences là ou se situe l'effet de l'échelle externe. Il faut donc une échelle suffisamment faible par rapport au diamètre pour obtenir une diminution significative de l'indice de scintillation.

3.6 Analyse de la covariance spatio–temporelle des angles d'arrivée en présence de l'échelle externe de cohérence spatiale

Au sens de l'optique géométrique, l'angle d'arrivée (AA) $\vec{\alpha}(\vec{r})$ est défini par l'angle entre la normale à la surface équi–phase du front d'onde et la direction de propagation de l'onde [145] :

$$\vec{\alpha}(\vec{r}) = -\frac{\lambda}{2\pi}\nabla\varphi(\vec{r}) \qquad (3.81)$$

L'AA est utilisé pour évaluer les déformations d'une onde perturbée par la turbulence atmosphérique. Il sert également à la reconstruction de la phase du front d'onde en

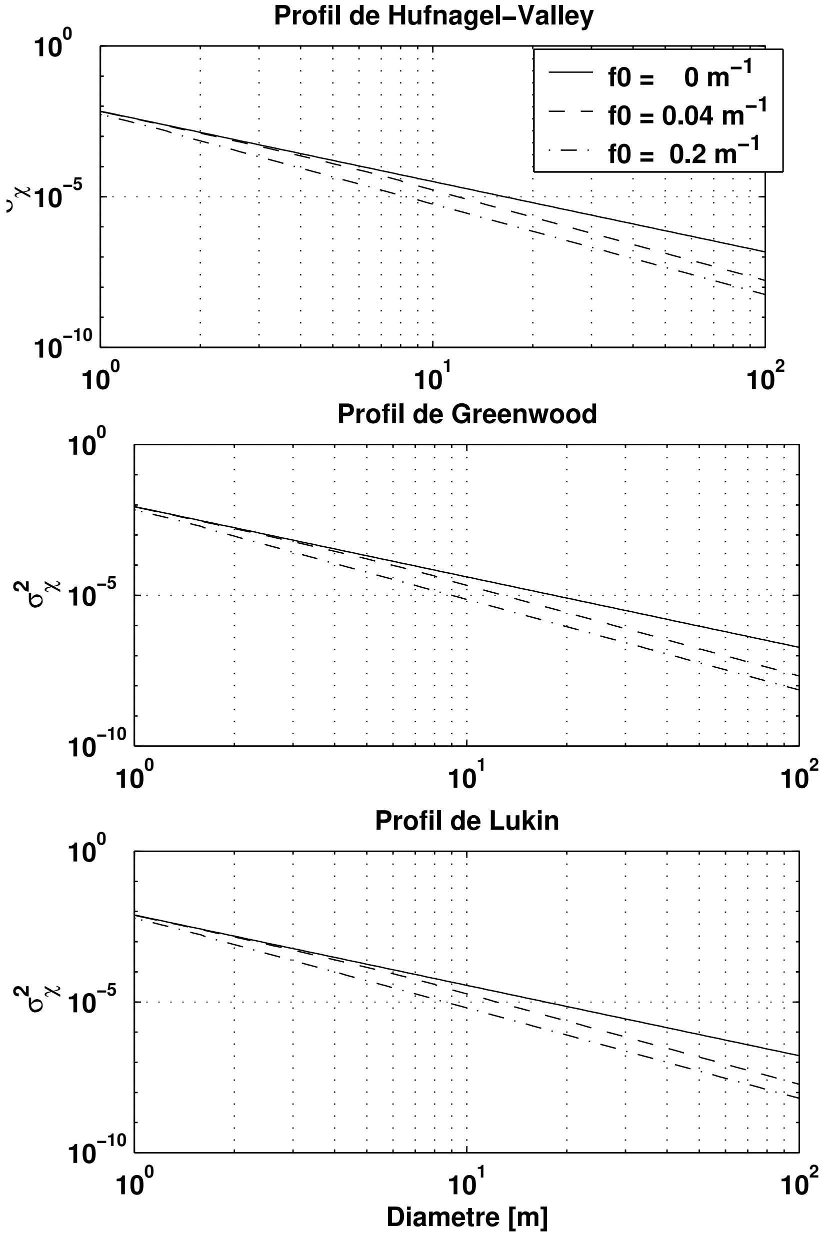


FIG. 3.11 – Variation de σ_χ^2 en fonction du diamètre de la pupille pour $f_0 = 0,\ 0,04$ et $0,2\ \mathrm{m}^{-1}$ et pour trois modèles de profils de $C_n^2(z)$.

optique adaptative à partir des mesures d'AA obtenues avec la matrice de micro–lentilles d'un analyseur de surface d'onde de type Shack–Hartmann [120, 63, 134, 159, 74, 70]. Il sert aussi à la détermination des paramètres qui caractérisent la turbulence atmosphérique optique [49, 110, 143, 133, 117] comme le paramètre de Fried et l'échelle externe de cohérence spatiale avec des instruments tels que le "Differential Image Motion Monitor" (DIMM) [135] ou le "Generalized Seeing Monitor" (GSM) [103, 2]. Les deux paramètres sont déduits de la comparaison entre la valeur expérimentale et la valeur théorique des moments statistiques d'ordre 2 des AA. Le paramètre de Fried est déduit soit de la variance, soit de la fonction de structure des AA. La fonction de structure encore appelée variance différentielle est souvent préférée pour son insensibilité aux bruits corrélés. L'échelle externe est déduite de la covariance.

La covariance des AA est proportionnelle à la dérivée seconde le la covariance des fluctuations de phase [122] :

$$C_\alpha(\vec{r}) = -\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x} C_\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x} D_\varphi(\vec{r}) \tag{3.82}$$

Dans le cadre du modèle de Kolmogorov, elle s'écrit [122]

$$C_\alpha(\vec{r}) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{5}{3}\left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6} r^{-1/3}\left(1-\frac{1}{3}\cos^2\gamma\right). \tag{3.83}$$

où r et γ sont les coordonnées polaires de $\vec{r}$. On peut remarquer que $C_\alpha(\vec{r})$ diverge pour $r = 0$ et que $C_\alpha(\vec{r})$ est anisotrope contrairement à $C_\varphi(\vec{r})$ qui est à symétrie de révolution.

Pour le modèle de Von Kármán , $C_\varphi(\vec{r})$ est donnée par l'Eq. (3.18) et en dérivant deux fois cette équation on obtient

$$\begin{aligned} C_\alpha(r,\gamma) &= \frac{\Gamma(11/6)}{2^{5/6}\pi^{8/3}}\left[\Gamma(6/5)\frac{24}{5}\right]^{5/6} \lambda^2 r_0^{-5/3} f_0^{1/3} \\ &\quad \times\left\{\left[\frac{2}{3}\cos^2(\gamma)+\sin^2(\gamma)\right](2\pi r f_0)^{-1/6} K_{1/6}(2\pi r f_0)\right. \\ &\qquad \left. -\cos^2(\gamma)(2\pi r f_0)^{5/6} K_{5/6}(2\pi r f_0)\right\} \end{aligned} \tag{3.84}$$

où $\frac{\Gamma(11/6)}{2^{5/6}\pi^{8/3}}\left[\Gamma(6/5)\frac{24}{5}\right]^{5/6} = 0.0858.$

En pratique, on ne mesure pas l'AA en un point mais plutôt sa valeur moyenne sur une pupille de taille finie. Cette pupille peut être carrée ou circulaire.

L'article qui suit donne plusieurs expressions analytiques pour la covariance des AA lorsque l'on tient compte à la fois du diamètre d'une pupille pleine et de l'échelle externe. Une explication heuristique de l'anisotropie de la covariance des AA est proposée. Dans cet article, je montre aussi que, moyennant l'hypothèse de Taylor, la corrélation temporelle des AA s'écrit comme la coupe de la covariance spatiale à deux dimensions, coupe qui s'effectue selon un plan défini par les vecteurs base et vent [35]. Et enfin de la corrélation temporelle, je déduis une approximation du temps de décorrélation des AA en fonction de l'échelle externe et de la vitesse et de la direction du vent.

3.6.1 Article paru dans Journal of the Optical Society of America A vol. 17 no. 10 en Octobre 2000

Titre : Analytical solution for the covariance and for the decorrelation time of the angle of arrival of a wave front corrugated by atmospheric turbulence

Auteurs : R. Conan[1], J. Borgnino[1], A. Ziad[1] and F. Martin[1]

Résumé : The two–dimensional spatial covariance of the angle–of–arrival (AA) fluctuations is often used to investigate the properties of wave fronts corrugated by the atmosphere for high angular resolution techniques. Theoretical series expansion of this covariance are presented. The fast convergence of these series reduces the calculus time of the covariance done by numerical integration.

The 2D–covariance is a non–radial function. A physical interpretation of this anisotropy is proposed. The spatio–temporal correlation of the AA is deduced from the covariance assuming the "frozen–flow" hypothesis. The impact of the anisotropy on the evaluation of the number of predominant turbulent layers and on the corresponding winds is investigated and an analysis of temporal correlations is performed. A simple theoretical approximation of the decorrelation time of the AA is given which is found to be in agreement with experimental results.

Introduction

The major limitation of ground based astronomical optical observations comes from the atmospheric turbulence. A plane wave, incoming from a star, arrives distorted on the pupil of a telescope. Since the initial proposition of Babcock [12], Adaptive Optics Systems (AOS) are now widely used on new telescopes to reconstruct the plane wave from the corrugated wave front[120]. Measurements given by the wave–front sensor (WFS) of AOS are used to control the deformable mirror but can be also used to characterize, in the same time, the optical turbulent parameters (OTP) of the atmosphere. A non–exhaustive list of the OTP is : the spatial coherence outer scale $\mathcal{L}_0$[23], the Fried's parameter r_0[57], the decorrelation time τ_0[124] and the isoplanatic angle θ_0[125]. Including all these parameters in the process of wave–front reconstruction permits the reduction of the error on the modal expansion of the wave front[166, 163] and the prediction of the corrugated wave front in the closed loop of AOS[73].

A method has been developed and an instrument, the Generalized Seeing Monitor[103, 2, 1, 153] (GSM), has been built with the intention to measure the OTP and particularly $\mathcal{L}_0$. It is a kind of Shack–Hartmann WFS : the GSM is constituted of four 10 cm diameter telescopes which allow to measure simultaneously one component of the angle–of–arrival[145] (AA) at 4 different points of the wave front. The statistical moments of the AA fluctuations lead to the estimation of the OTP : the structure function gives the

[1]Unité Mixte de Recherche 6525 Astrophysique, Université de Nice Sophia–Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2, FRANCE

r_0 value and the normalized spatial covariance the $\mathcal{L}_0$ value. The $\mathcal{L}_0$ and r_0 values are deduced from the Von Kármán model[149] adjusting the theoretical covariances (function of $\mathcal{L}_0$) to the experimental ones. The calculus of theoretical covariances has been done by numerical computation of its integral expression (Ref.[11] Eq. (8)). As this computation is quite long on standard computer, a grid of 2D covariances for a set of $\mathcal{L}_0$ values has been firstly calculated and for real time computation, interpolations through the grid give the value of $\mathcal{L}_0$. For all numerical calculations which require quick execution, one attempts to obtain an analytical solution of the integral expression of the spatial covariance of the AA fluctuations. The solution goes through the use of Mellin transform to find either finite solutions or series expansions[138, 137]. Some authors have already applied these methods to problems related to wave propagation in turbulent medium[166, 137, 155, 31, 51, 52].

In section 2, analytical solutions are shown : one finds a solution when baselines are much larger than pupil diameter and for the general case, the exact solution is expanded in Taylor series. No analytic solution has previously been reported for the integral of the covariance of the AA fluctuations. The general solution has the benefit to converge quickly and only few terms are enough to obtain an excellent approximation of the covariance. Easy to compute, the numerical calculation of the general solution is very efficient to reduce calculus time compared to the classical numerical integration. In a section 3, an heuristic interpretation of the anisotropy of the covariance is proposed. In section 4, the spatio-temporal cross-correlation is derived from the expression of the spatial covariance using the “frozen–flow” or Taylor hypothesis. Finally, in section 5, from the expression of the covariance presented in section 1.A, one deduces the first straightforward approximation of the decorrelation time of the AA fluctuations. It is a parameter of importance to optimize high angular resolution technics for which the response time must be equal or lower than the characteristic time-scale of the evolution of the turbulence.

Two–dimensional spatial covariance of the AA fluctuations

According to the Wiener-Kinchin theorem, the 2–D spatial covariance of the AA fluctuations is the inverse Fourier transform of the AA power spectrum. As the AA spectrum $W_{\bigtriangledown\phi(\mathbf{r}),\mathbf{u}}$ is obtained from the wave–front phase spectrum [122] $W_\phi(\mathbf{f})$:

$$W_{\bigtriangledown\phi(\mathbf{r}),\mathbf{u}}(\mathbf{f}) = \lambda^2 (\mathbf{f}.\mathbf{u})^2 W_\phi(\mathbf{f}) \tag{3.85}$$

the covariance can be written [24] :

$$\mathcal{C}_{\bigtriangledown\phi(\mathbf{r}),\mathbf{u}}(\mathbf{r}) = \lambda^2 \iint \mathrm{d}\mathbf{f}\, (\mathbf{f}.\mathbf{u})^2 W_\phi(\mathbf{f})\, G(\mathbf{f}) \exp(2\pi i \mathbf{f}.\mathbf{r}) \tag{3.86}$$

where λ is the wavelength, $\mathbf{f}$ is the spatial frequency vector, $\mathbf{r}$ is the baseline vector and $\mathbf{u}$ is the unity vector indicating the direction of measurement of the AA (figure 3.12). $G(\mathbf{f})$ is the point spread function (p.s.f.) of the instrument. The notation $\{\bigtriangledown\phi(\mathbf{r}), \mathbf{u}\}$

stands for the wave–front gradient taken in the direction of the vector $\mathbf{u}$. Using the polar coordinates of vectors $\mathbf{f} : (f, \theta)$, $\mathbf{r} : (r, \gamma)$ and $\mathbf{u} : (1, \arg(\mathbf{u}))$ and integrating over θ leads to [11] :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\nabla\phi(\mathbf{r})\,,\,\mathbf{u}}(\mathbf{r}) &= \pi\lambda^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}f\, f^3 W_\phi\,(f)\, G\,(f) \\ &\quad \times \left\{J_0(2\pi r f) - cos\left[2\left(\gamma - \arg(\mathbf{u})\right)\right] J_2(2\pi r f)\right\} \end{aligned} \tag{3.87}$$

In the following, $\arg(\mathbf{u})$ will be taken equal to zero which means that the direction of measurement is in the X–direction :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\nabla\phi(\mathbf{r})\,,\,\arg(\mathbf{u})=0}(\mathbf{r}) &= \mathcal{C}_\alpha(r,\gamma) \\ &= \pi\lambda^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}f f^3 W_\phi\,(f)\, G\,(f) \left[J_0(2\pi r f) - cos(2\gamma) J_2(2\pi r f)\right] \end{aligned} \tag{3.88}$$

The p.s.f. of the instrument is the one of a telescope with a pupil of diameter D without central obscuration :

$$G\,(f) = \left[\frac{2J_1(\pi D f)}{\pi D f}\right]^2 \tag{3.89}$$

The spectrum of the wave–front phase is the Von Kàrmàn spectrum with the inner scale neglected[149] :

$$W_\phi\,(f) = 0.0229 r_0^{-5/3} \left(f^2 + f_0^2\right)^{-11/6} \tag{3.90}$$

where $0.0229 = \dfrac{\Gamma^2(11/6)}{2\pi^{11/3}} \left[\Gamma(6/5)\dfrac{24}{5}\right]^{5/6}$, r_0 is the Fried's parameter and f_0 is the frequency related to the spatial coherence outer scale of turbulence $\mathcal{L}_0$. For the GSM experiment, one uses[93] $f_0 = \frac{1}{\mathcal{L}_0}$ but other authors[166, 31] work with the relation $f_0 = \frac{1}{2\pi\mathcal{L}_0}$.

Spatial covariance of the AA fluctuations : general case The general expression of the covariance is obtained putting Eq. (3.89) and Eq. (3.90) into Eq. (3.88) :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\alpha(r,\gamma) &= 0.0719\lambda^2 r_0^{-5/3} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}f\, f^3 \left(f^2 + f_0^2\right)^{-11/6} \left[\frac{2J_1(\pi D f)}{\pi D f}\right]^2 \\ &\quad \times \left[J_0(2\pi r f) - cos(2\gamma) J_2(2\pi r f)\right] \end{aligned} \tag{3.91}$$

To obtain an analytical solution, one used methods developed by Sasiela[137] to find convergent series with the use of Mellin transforms. Calculus in appendix A show that the choice of the convergent series depends on three parameters : the baseline r, the diameter of the pupil D and the outer scale of turbulence $\mathcal{L}_0$. Here we focus on the common situation where the outer scale is larger than the diameter and the baseline. Finally, two series are found, one when the baseline is smaller than the diameter and one when the baseline is larger than the diameter.

– $r < \frac{1}{\pi f_0}$, $D < \frac{1}{\pi f_0}$ and $r < D$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}(r,\gamma) \quad = \quad & 8.8578.10^{-4}\lambda^2 r_0^{-5/3} f_0^{-11/3} D^{-4} \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n!\,m!} \\
\times\Bigg[\quad & (\pi D f_0)^4 (\pi D f_0)^{2n} (\pi r f_0)^{2m} \\
& \times \Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2+n, n+m+2, -n-m-1/6 \\ 3+n, 2+n, 1+m \end{array}\right] \\
& + (\pi D f_0)^{11/3} \left(\frac{r}{D}\right)^{8/3} \left(\frac{r}{D}\right)^{2n} (\pi r f_0)^{2m} \\
& \times \Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2+n, m+11/6, -n-m-4/3 \\ 3/2-n, 1/2-n, n+m+7/3 \end{array}\right] \\
& + (\pi D f_0)^{11/3} (\pi D f_0)^{2n} \left(\frac{r}{D}\right)^{2m} \\
& \times \Gamma\left[\begin{array}{c} m-n+1/6, 4/3-m+n, n+11/6 \\ 17/6-m+n, 11/6-m+n, 1+m \end{array}\right] \\
& - \cos(2\gamma) \\
& \times\Bigg\{ (\pi D f_0)^6 \left(\frac{r}{D}\right)^2 (\pi D f_0)^{2n} (\pi r f_0)^{2m} \\
& \qquad \times \Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2+n, n+m+3, -n-m-7/6 \\ 3+n, 2+n, 3+m \end{array}\right] \\
& \qquad + (\pi D f_0)^{11/3} \left(\frac{r}{D}\right)^{8/3} \left(\frac{r}{D}\right)^{2n} (\pi r f_0)^{2m} \\
& \qquad \times \Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2+n, m+11/6, -n-m-1/3 \\ 3/2-n, 1/2-n, n+m+10/3 \end{array}\right] \\
& \qquad + (\pi D f_0)^{11/3} \left(\frac{r}{D}\right)^2 (\pi D f_0)^{2n} \left(\frac{r}{D}\right)^{2m} \\
& \qquad \times \Gamma\left[\begin{array}{c} m-n+7/6, 1/3-m+n, n+11/6 \\ 11/6-m+n, 5/6-m+n, 3+m \end{array}\right] \Bigg\}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{3.92}
$$

– $r < \frac{1}{\pi f_0}$, $D < \frac{1}{\pi f_0}$ and $r > D$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_\alpha(r,\gamma) \quad = \quad & 8.8578.10^{-4}\lambda^2 r_0^{-5/3} f_0^{-11/3} D^{-4} \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n!\,m!} \\
\times\Bigg[\quad & (\pi D f_0)^{11/3} \left(\frac{D}{r}\right)^{1/3} \left(\frac{D}{r}\right)^{2n} (\pi r f_0)^{2m} \\
& \times \Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2+n, m+11/6, n-m+1/6 \\ 3+n, 2+n, m-n+5/6 \end{array}\right] \\
& + (\pi D f_0)^4 (\pi D f_0)^{2n} (\pi r f_0)^{2m}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\times\Gamma\left[\begin{array}{c}3/2+n, n+m+2, -n-m-1/6\\ 3+n, 2+n, 1+m\end{array}\right] \qquad (3.93)\\
&-\cos(2\gamma)\\
&\times\Bigg\{(\pi D f_0)^{11/3}\left(\frac{D}{r}\right)^{1/3}\left(\frac{D}{r}\right)^{2n}(\pi r f_0)^{2m}\\
&\qquad\times\Gamma\left[\begin{array}{c}3/2+n, m+11/6, n-m+7/6\\ 3+n, 2+n, m-n+11/6\end{array}\right]\\
&\quad+(\pi D f_0)^6\left(\frac{r}{D}\right)^2(\pi D f_0)^{2n}(\pi r f_0)^{2m}\\
&\qquad\times\Gamma\left[\begin{array}{c}3/2+n, n+m+3, -n-m-7/6\\ 3+n, 2+n, 3+m\end{array}\right]\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned}$$

where $8.8578.10^{-4} = \frac{\Gamma(11/6)}{\pi^{43/6}}\left[\Gamma(6/5)\frac{24}{5}\right]^{5/6}$ and

$$\Gamma\left[\begin{array}{c}a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_k\\ b_1,\cdots,b_j,\cdots,b_l\end{array}\right] = \frac{\prod_{i=1}^{k}\Gamma(a_i)}{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(b_j)} \qquad (3.94)$$

Experimentally, the smallest baseline for 2 pupils of the same diameter is reached when both pupils are side by side (i.e. $r = D$). The case $r < D$ can be applied to the calculus of the variance ($r = 0$) and of the temporal correlation. In section 4, one will show that with the "frozen turbulent flow" hypothesis, the temporal correlation of the AA fluctuations is equal to the cut of the covariance along a particular plane which can verify the condition $r < D$.

In figure 3.13, the relative error $\varepsilon(r,\gamma)$ between the values of the longitudinal covariance ($\gamma = 0$) calculated by series expansion and by the integral expression is plotted as a function of the baseline.

$$\varepsilon(r,0) = 100\frac{|\mathcal{C}_\alpha(r,0)_{integrale} - \mathcal{C}_\alpha(r,0)_{series}|}{\mathcal{C}_\alpha(r,0)_{integrale}} \qquad (3.95)$$

With 3 iterations, a good agreement is found between both methods. Increasing the number of iterations improves results only for baseline values close to the value of the pupil diameter. The time for the computation of the entire covariance which requires the calculus of 51 integrals for our example is considerably reduced with the use of series formula.

In the figure 3.14, the 2D–covariance (a), the iso–level of the covariance (b) and the longitudinal and transverse covariances (c) are shown. This representation was chosen to put in evidence the anisotropy of the covariance of the AA fluctuations. The fastest decorrelation of the AA along the longitudinal direction (r_x) is clearly seen.

Spatial covariance of the AA fluctuations : approximation to large baselines
For a baseline much larger than the pupil diameter, the pupil filtering can be neglected. Indeed, for a very large baseline, the corresponding spatial frequency tends towards 0 and $G(f)$ tends toward 1. Eq. (3.91) rewritten with this approximation gives :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\alpha(r,\gamma) &= 0.0719\lambda^2 r_0^{-5/3}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}f\, f^3\left(f^2+f_0^2\right)^{-11/6}\\ &\qquad [J_0(2\pi r f) - cos(2\gamma)J_2(2\pi r f)] \qquad (3.96)\end{aligned}$$

And with the use of Mellin transforms (Appendix B), one obtains :

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}_\alpha(r,\gamma) = 0.0858\lambda^2 r_0^{-5/3} f_0^{1/3} \qquad (3.97)\\ &\quad\times\left\{\left[\frac{2}{3}\cos^2(\gamma)+\sin^2(\gamma)\right](2\pi r f_0)^{-1/6}K_{1/6}(2\pi r f_0)\right.\\ &\quad - \qquad \left.\cos^2(\gamma)(2\pi r f_0)^{5/6}K_{5/6}(2\pi r f_0)\right\} \qquad (3.98)\end{aligned}$$

where $0.0858 = \dfrac{\Gamma(11/6)}{2^{5/6}\pi^{8/3}}\left[\Gamma(6/5)\dfrac{24}{5}\right]^{5/6}$ and $K_\nu(x)$ is the modified Bessel function of the third kind (so–called the McDonald function). In this case, the outer scale can be lower or higher than the baseline. Eq. (3.97) can be considered as an extension of Eq. (3.93) for large baseline close to outer scale values. Examples of application of Eq. (3.92) and Eq. (3.93) are typically adaptive optics and Eq. (3.97) can be used for interferometry.

Both formula for the general case and for the approximation to large baselines show that the spatial covariance is a non–radial function, it depends also on the direction of the baseline γ. This is of a crucial importance as it will be seen in following sections which deal with the physical interpretation of this anisotropy and with its effects on spatio–temporal correlations and on the decorrelation time of the AA.

Heuristic interpretation

The 2D–covariance in figure 3.14 is non–isotropic. This figure shows the difference between the longitudinal and transverse covariances. A simple physical explanation can be obtained as the same manner than in Consortini et al.[39] (1970). Indeed, in the framework of geometrical optics, the atmosphere can be assimilated to a lens with a random focal length. As an example, the beam of light coming from a stellar source is successively focused and de–focused which leads to a random variation of the intensity in a fixed plane : it is the well–known scintillation phenomenon.

The schematic representation of the figure 3.15 shows a lens which is a portion of sphere. The rays of light come from above the lens, parallel to the Z–direction. The rays transmitted through the lens are deviated towards the focus of the lens. Here, the angular components of the deviated rays are equivalent to the angle of arrival of the wave front. The incoming and transmitted rays along the X–baseline are projected on the front plane(a) and the incoming and transmitted rays along the Y–baseline are projected on the back plane(b). The projected rays on the front(a) and the back(b) planes are the X–components of the incoming and transmitted rays along the X– and Y–baseline, respectively.

In the front plane(a), the first left ray is deviated in the same direction than its neighbors until the mid–X–baseline leading to a decreasing positive correlation, after this the rays have opposite directions giving a negative correlation. When the distance between the rays of opposite direction is maximal, the minimum of the negative correlation is reached. It corresponds to the longitudinal covariance. In the back plane(b), all rays point in the same direction giving rise to a correlation which tends toward zero as the distance between rays grows but that can be never negative. There is never negative correlation. It corresponds to the transverse covariance. The same analysis could be done with the Y–component.

With the geometric optics approximation, it appears finally that the transverse and longitudinal correlations of the transmitted rays cannot give the same result. There is also in this particular case an anisotropy in the 2–D spatial covariance.

Spatio–temporal correlation

The spatio–temporal correlation of the AA fluctuations for a fixed baseline is defined as the ensemble average :

$$C_\alpha(\mathbf{r},\tau) = C_{\alpha,\mathbf{r}}(\tau) =< \alpha(\boldsymbol{\xi},t)\alpha(\boldsymbol{\xi}+\mathbf{r},t+\tau) > \tag{3.99}$$

assuming the Taylor hypothesis leads to :

$$\begin{aligned} C_{\alpha,\mathbf{r}}(\tau) &= < \alpha(\boldsymbol{\xi},t)\alpha(\boldsymbol{\xi}+\mathbf{r}-\tau\mathbf{v},t) > && (3.100)\\ &= \mathcal{C}_\alpha(\mathbf{r}-\tau\mathbf{v}) && (3.101)\\ &= \mathcal{C}_\alpha(\mathbf{r}) * \delta\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{v}\right) \end{aligned}$$

where $\mathbf{v}$ is the wind vector, $\delta(\mathbf{r})$ is the two-dimensional Dirac function and $*$ stands for the convolution product. In Cartesian coordinates, one obtains :

$$C_{\alpha,\mathbf{r}}(\tau) = \mathcal{C}_\alpha(r_x,r_y) * \delta\left(r_x-\tau v_x, r_y-\tau v_y\right) \tag{3.102}$$

The spatio–temporal correlation is a cut of the spatial covariance along the line $\xi_y = r_y + \frac{v_y}{v_x}(\xi_x - r_x) = r_y + (\xi_x - r_x)tan(\eta)$ where η is the direction of the wind.

The figure 3.16 shows the spatio–temporal correlations for different orientations of the baseline and of the wind (right graphs) and the corresponding traces of the cut–lines on the spatial covariance for each one (left graphs). Each left and right graphs correspond to the same orientation of the baseline, respectively $\gamma = 0$, 45 and 90 degrees, and in each left graph, the spatio–temporal correlation is plotted for different directions of the wind : $\eta = 0$, 45 and 90 degrees. The correlation has a maximal amplitude and a symmetric shape when the wind blows in the baseline direction ($\eta = \gamma$) or in the direction of measurement $\mathbf{u}$ ($\eta = 0$). For wind directions nearly or completely perpendicular to the direction of measurement, a correlation with two–peaks appears. This particular case can lead to an ambiguity. Indeed, two atmospheric layers could give the same results.

On figure 3.12, a large turbulent eddy carried by the wind $\mathbf{v}$ is detected first by the pupil A and later by the pupil B with a delay $\Delta\tau$. $\Delta\tau$ is related to the baseline $\mathbf{r}$ and to the wind $\mathbf{v}$ by the relation[11] :

$$\Delta\tau = \frac{r\cos(\eta-\gamma)}{v} \tag{3.103}$$

Classically, $\Delta\tau$ is also the maximum of the correlation of the AA fluctuations measured during the fly of the eddy over both pupils. This is true only for phenomena which are statistically isotrope but not for phenomena which are statistically non–isotrope as the AA fluctuations. The figure 3.17 shows the delays deduced from Eq. (3.103) (dashed lines) and the position of the maximum of correlations computed with Eq. (3.100) (solid lines). Both expressions are computed with $|\mathbf{v}| = 5$ m.s^{-1} and $|\mathbf{r}| = 1$ m. The delay is given by the position of the maximum when the wind blows along the direction of measurement ($\eta = 0$) and along the direction of the baseline ($\eta = \gamma$). For other wind directions, the delay differs from the position of the maximum and the largest difference is achieved when the wind direction is perpendicular to both directions of the baseline and of the measurement.

This difference observed between the delay and the position of the maximum of the temporal corelation has been already pointed out by Avila et al.[11] from the point of view of the temporal cross-spectrum of the AA fluctuations. Indeed, the delay $\Delta\tau$ produces in the frequency domain a phase term given by (Ref. [11] Eq. (28)) :

$$\varphi(\nu) = 2\pi\nu\Delta\tau \tag{3.104}$$

The temporal cross-spectrum as written in Ref.[11] Eq. (26) is :

$$\begin{aligned} W_{\alpha,\mathbf{r}}(\nu) \;=\;& 0.0228\lambda^2 r_0^{-5/3}\frac{1}{v}\exp(2i\pi\Delta\tau\nu)\int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \left(\frac{\nu}{v}\cos\eta - q\sin\eta\right)^2 \\ & \times\left[\left(\frac{\nu}{v}\right)^2 + q^2 + \frac{1}{\mathcal{L}_0^2}\right]^{-11/6}\left[2\frac{J_1\left(\pi D f\sqrt{\left(\frac{\nu}{v}\right)^2+q^2}\right)}{\pi D\sqrt{\left(\frac{\nu}{v}\right)^2+q^2}}\right]^2 \\ & \times\exp(2i\pi q r\sin(\gamma-\eta)) \end{aligned} \tag{3.105}$$

For $\eta = 0$, the integral in Eq. (3.105) is the Fourier transform of an even function which leads to a real result and for $\eta = \gamma$ the complex exponential of the integrand is equal to 1 ; in this last case the resulting integral is quite similar to those calculated in the precedent sections of this paper and leads also to a real result. So, the only phase term for these two particular cases is the one of Eq. (3.104). For other wind directions, one has the Fourier transform of an odd function leading to a complex solution which adds a new phase term to the first one.

This non–linear relation between in one hand, the delay and the position of the maximum of the temporal correlation of the AA and in other hand, between the phase delay and the phase of the temporal cross-spectrum of the AA don't permit a very precise measurement of the direction and of the speed of the wind in a such direct manner as proposed by Conan et al.[36] for the temporal correlation and by Avila et al.[11] for the temporal cross-spectrum using the relations Eq. (3.103) and Eq. (3.104), respectively.

Decorrelation time of the AA fluctuations

The decorrelation time τ_0^α of the AA is defined as the time for which the auto–correlation $C_{\alpha,0}(\tau) = \mathcal{C}_\alpha(\tau\mathbf{v})$ (Eq. (3.101)) decreases of a factor κ from its value at the zero delay :

$$\mathcal{C}_\alpha(r_\kappa, \eta) = \frac{\sigma_\alpha^2}{\kappa} \tag{3.106}$$

where $r_\kappa = \tau_0^\alpha v$. To inverse Eq. (3.106) in order to obtain a straightforward expression of the decorrelation time τ_0^α, one can't use directly Eq. (3.92) and Eq. (3.93) for the covariance. In a first step, one have to expand the covariance for the first orders of n and m. The development of the covariance for $n = 0$ and 1 and for $m = 0$ and 1 leads to Eq. (3.150) for $r < D$ and to Eq. (3.151) for $r > D$ (Appendix C). For each case, the covariance is written as a function of power of $\frac{r}{D}$:

$$\mathcal{C}_\alpha(r, \eta) = \sum_i A_{\nu_i} \left(\frac{r}{D}\right)^{\nu_i} \tag{3.107}$$

The figure 3.18 shows the logarithm of the coefficients A_{ν_i} normalized to their maximum (full circles) and the relative error $\varepsilon(r, \gamma)$ between the exact value of the covariance an the approximated value calculated with Eq. (3.107) (diamonds). The A_{ν_i} coefficients are sorted by decreasing order. For $r < D$, the powers 0, 2, 8/3 gives the major contribution to the value of the covariance and the contribution of the other powers leads to an increase of the relative error. For $r > D$, powers -1/3 and 0 have the highest coefficients and the relative error is not very different from the one calculated with both first powers until the power -7/3. So an excellent approximation of the covariance of the AA fluctuations is given by :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_\alpha(r, \gamma) \;=\; & 0.0589\lambda^2 r_0^{-5/3} D^{-1/3} \\
& \times \left\{ 0.776 \left(\frac{r}{D}\right)^{8/3} [1.75 + \cos(2\gamma)] \right. \\
& - \left(\frac{r}{D}\right)^2 [2 + \cos(2\gamma)] \left[1.101 - 2.642(\pi D f_0)^2 \right. \\
& \quad \left. + 2.572(\pi D f_0)^{7/3} + 0.890(\pi D f_0)^{13/3}\right] \\
& \left. + 2.882 - 3.001(\pi D f_0)^{1/3} + 1.628(\pi D f_0)^2 - 1.286(\pi D f_0)^{7/3} \right\} \\
& \quad (\text{for } r < D)
\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_\alpha(r,\gamma) &= 0.0589\lambda^2 r_0^{-5/3} D^{-1/3} \\
&\times \left\{-3.001(\pi D f_0)^{1/3} - 1.286(\pi D f_0)^{7/3} \right.\\
&\left. + \left(\frac{r}{D}\right)^{-1/3} [5-\cos(2\gamma)] \left[0.411 + 0.188(\pi D f_0)^2\right] \right\} \\
&\quad (\text{for } r > D)
\end{aligned} \tag{3.109}$$

Eq. (3.108) and Eq. (3.109) show that it is easier to obtain the decorrelation time for $r > D$ than for $r < D$. κ has to be chosen as $r_\kappa > D$ which implies $\tau_0^\alpha > D/v$.

The variance of the AA fluctuations is deduced from Eq. (3.92) :

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha^2 &= 0.0589\lambda^2 r_0^{-5/3} D^{-1/3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\
&\times \left\{ (\pi D f_0)^{2n+1/3} \Gamma \left[\begin{array}{c} 3/2+n, -n-1/6 \\ 3+n \end{array} \right] \right. \\
&\left. + (\pi D f_0)^{2n} \Gamma \left[\begin{array}{c} n+1/6, 4/3+n \\ 17/6+n \end{array} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.110}$$

and with 2 iterations, one obtains :

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha^2 &= 0.0589\lambda^2 r_0^{-5/3} D^{-1/3} \\
&\times \left\{ (\pi D f_0)^{1/3} \Gamma \left[\begin{array}{c} 3/2, -1/6 \\ 3 \end{array} \right] + \Gamma \left[\begin{array}{c} 1/6, 4/3 \\ 17/6 \end{array} \right] \right. \\
&\left. - (\pi D f_0)^{7/3} \Gamma \left[\begin{array}{c} 5/2, -7/6 \\ 4 \end{array} \right] - (\pi D f_0)^2 \Gamma \left[\begin{array}{c} -5/6, 7/3 \\ 23/6 \end{array} \right] \right\} && (3.111) \\
&= 0.0589\lambda^2 r_0^{-5/3} D^{-1/3} && (3.112) \\
&\times \left\{-3.001(\pi D f_0)^{1/3} + 2.882 - 1.286(\pi D f_0)^{7/3} + 1.628(\pi D f_0)^2\right\} \\
&= 0.1697\lambda^2 r_0^{-5/3} D^{-1/3} \\
&\times \left\{1 - 1.041(\pi D f_0)^{1/3} + 0.565(\pi D f_0)^2 - 0.446(\pi D f_0)^{7/3}\right\} && (3.113)
\end{aligned}$$

Putting $f_0 = \dfrac{1}{\mathcal{L}_0}$ into Eq. (3.113), one obtains the same result as in Ziad(1993)[169].

Putting Eq. (3.109) and Eq. (3.113) into Eq. (3.106) gives :

$$\left(\frac{r_\kappa}{D}\right)^{-1/3} = \frac{\mathcal{F}(\kappa, D f_0)}{5 - \cos(2\gamma_\kappa)} \tag{3.114}$$

with

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\kappa, D f_0) &= \frac{(1-\kappa^{-1})\left[3.001(\pi D f_0)^{1/3} + 1.286(\pi D f_0)^{7/3}\right]}{0.411 + 0.188(\pi D f_0)^2} \\
&+ \frac{\kappa^{-1}\left[2.882 + 1.628(\pi D f_0)^2\right]}{0.411 + 0.188(\pi D f_0)^2}
\end{aligned} \tag{3.115}$$

which leads to the expression of the decorrelation time of the AA fluctuations :

$$\tau_0^\alpha = \frac{D}{v}\left(\frac{\mathcal{F}(\kappa, Df_0)}{5-\cos(2\eta)}\right)^{-3} \tag{3.116}$$

The figure 3.19 shows the decorrelation time τ_0^α as a function of the product Df_0 in units of D/v. When the outer scale increases compared to D, the length of the correlation scale on the pupil increases and so, τ_0^α increases with different rates depending on the wind direction value. For an infinite outer scale, τ_0^α is equal to :

$$\tau_0^\alpha = \frac{D}{v}\left(\frac{\mathcal{F}(\kappa, 0)}{5-\cos(2\eta)}\right)^{-3} = \frac{D}{v}\left(\frac{5-\cos(2\eta)}{7\kappa^{-1}}\right)^{3} \tag{3.117}$$

Until now, one has considered only the X–component α of the wave–front gradient $\alpha = \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}$ which corresponds to $\arg(\mathbf{u}) = 0$ (cf. Fig.3.12). But, each sub-pupil of a Shack–Hartmann wave–front sensor measures both X and Y–components of the AA fluctuations (so–called α and β with $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}$). The β component corresponds to the case $\arg(\mathbf{u}) = \pi/2$. Referring to Eq. (3.87) and following the same development than for $\arg(\mathbf{u}) = 0$, one obtains the decorrelation time of the β component of the AA fluctuations :

$$\tau_0^\beta = \frac{D}{v}\left(\frac{\mathcal{F}(\kappa, Df_0)}{5+\cos(2\eta)}\right)^{-3} \tag{3.118}$$

To compare the decorrelation time of the α and β components of the wave–front gradient, one can write the ratio between both decorrelation times :

$$\mathcal{R} = \frac{\tau_0^\alpha}{\tau_0^\beta} = \left(\frac{5-\cos(2\eta)}{5+\cos(2\eta)}\right)^{3} \tag{3.119}$$

The ratio varies from $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$ for $\eta = 0$ degree to $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3$ for $\eta = 90$ degrees and is equal to 1 for $\eta = 45$ degrees. For $D = 0.1$ m , $f_0 = 0.04$ m^{-1}, $v = 10$ m.s^{-1} and $\eta = 0$ degree, one finds $\tau_0^\alpha = 13.13$ ms and $\tau_0^\beta = 44.32$ ms (one can verify that $\tau_0^\alpha/\tau_0^\beta = 8/27$). For $\eta = \pi/4$ radian, one finds $\tau_0^\alpha = \tau_0^\beta = 25.65$ ms. The simultaneous measurement of τ_0^β and τ_0^α on the auto–correlation of the α and β component of the AA fluctuation permits to deduce the wind speed and direction. The inversion of Eq. (3.119) gives the direction of the wind :

$$\eta = \frac{1}{2}\mathrm{acos}\left(5\frac{1-\mathcal{R}^{1/3}}{1+\mathcal{R}^{1/3}}\right) \text{ or } \pi - \frac{1}{2}\mathrm{acos}\left(5\frac{1-\mathcal{R}^{1/3}}{1+\mathcal{R}^{1/3}}\right) \tag{3.120}$$

and the wind speed is found with the following expression :

$$v = 1000D\left\{\mathcal{F}(\kappa, Df_0)\left[(\tau_0^\alpha)^{1/3} + \left(\tau_0^\beta\right)^{1/3}\right]\right\}^{-3} \tag{3.121}$$

During the campaign performed with the GSM at La Silla observatory [104] in September 1997, it has been put in evidence that, for a single night, only one layer contributed to the degradation of the wave front. Making the assumptions that this layer is the ground layer and that the wind blowing in this layer is measured by the ground weather station at La Silla, one can compare the experimental and theoretical decorrelation times τ_0^α. The experimental τ_0^α corresponds to the e^{-1}–width of the auto–correlation. The theoretical τ_0^α is computed from Eq. (3.116) with v and η given by the weather station, $f_0 = \frac{1}{\mathcal{L}_0}$ measured by the GSM, $D = 0.1$m and $\kappa = e$. The $\mathcal{L}_0$ values have varied between 15 m and 150 m during this night.

The result is given in figure 3.20. Dotted line is the inferior limit D/v of the theoretical τ_0^α, crosses are the experimental τ_0^α and circles represent theoretical τ_0^α. The condition $\tau_0^\alpha > \dfrac{D}{v}$ is always respected. The theoretical τ_0^α matches the experimental τ_0^α within 5ms which corresponds to the temporal resolution of the GSM. So, it seems well–verified that the turbulent layer in consideration here is the ground layer. The two jumps observed in the theoretical values of τ_0^α at 27 :00 UT and 27 :30 UT correspond to a sharp change in the measured values of the wind speed and direction.

This agreement between experimental and theoretical τ_0^α is a validation of the formula of Eq. (3.116) for the single–layer model. It is also a validation of the theoretical expressions of the spatial covariance of the AA fluctuations (Eq. (3.92) and Eq. (3.93)) from which Eq. (3.116) is derived.

Summary

The spatial covariance of the AA fluctuations is of importance for the statistical analysis of the optical turbulence in the atmosphere. It permits not only to measure the optical turbulent parameters as r_0 and $\mathcal{L}_0$ but also to determine the decorrelation time from the auto–correlation. The temporal analysis assume the validity of the Taylor hypothesis. The solution of the general integral expression of the covariance has been given as series expansion. These series have very fast convergence, are easy to compute and are computer–time efficient compared to numerical integration.

The particularity of the covariance is its anisotropy. The mathematical expressions of the covariance put in evidence its dependence on the polar angle of the baseline. But, a physical interpretation missed yet. As seen previously using a simple modelisation, 2D–covariance of the AA cannot be isotropic.

Among the consequences of this anisotropy, one has emphasized its effects on the cross and on the auto–correlation. The position of the maximum of the cross–correlation differs from the value given by the geometrical delay $\Delta\tau$ and for specific layouts two maxima can appear. The decorrelation time τ_0 deduced from the auto–correlation is a function of the wind direction for a fixed pupil diameter D and a fixed outer scale $\mathcal{L}_0$. As corollary, τ_0 values computed from the longitudinal component can be three times larger or lower than the one computed from the transverse component, depending on the wind direction.

This study has been done using a single–layer model for atmospheric turbulence. However, observations[141, 10] have shown that, in the most common case, the terrestrial atmosphere is well approximated by a superposition of several thin turbulent layers. In a multi–layer model, the resulting covariance is the sum of the covariances in each layer and the resulting cross and autocorrelation are the sums of the cuts of the covariance in each layer. The direction of each cut varies from a layer to another one as it depends on the direction of the wind blowing in the layers. If the spectrum of the resulting wave front matches the Von Kármán spectrum, Eq. (3.116) is still valid and one can deduce a velocity vector $\mathbf{v}$ if the outer scale is measured independently. The velocity which appears in Eq. (3.116) is not a wave–front carrying velocity[64] but just an average of the profile $\mathbf{v}(h)$ of the wind speed weighted by the intensity of the turbulence $C_n^2(h)$:

$$\mathbf{v} = \frac{\int \mathbf{v}(h) C_n^2(h) \mathrm{d}h}{\int C_n^2(h) \mathrm{d}h} \tag{3.122}$$

Finally, one gives a simple expression of the decorrelation time of the AA fluctuations. This time is found to be in agreement with the decorrelation time of the AA measured by the GSM. It can also be measured easily using a Schack–Hartmann wave–front sensor in an adaptive optics system in order to optimize the response time of the system.

Appendix A : Spatial covariance of the AA fluctuations : general case

From Eq. (3.91), the covariance can be written :

$$\mathcal{C}_\alpha(r,\gamma) = 0.0719 \lambda^2 r_0^{-5/3} f_0^{-11/3} \left(\frac{2}{\pi D}\right)^2 [\mathcal{I}_1 - \cos(2\gamma)\mathcal{I}_2] \tag{3.123}$$

with :

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{+\infty} f^2 J_1^2(af) J_0\left(\left(\frac{b}{f}\right)^{-1}\right) \left[\left(\frac{f_0}{f}\right)^{-2} + 1\right]^{-11/6} \frac{\mathrm{d}f}{f} \tag{3.124}$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^{+\infty} f^2 J_1^2(af) J_2\left(\left(\frac{b}{f}\right)^{-1}\right) \left[\left(\frac{f_0}{f}\right)^{-2} + 1\right]^{-11/6} \frac{\mathrm{d}f}{f} \tag{3.125}$$

with $a = \pi D$ and $b = (2\pi r)^{-1}$. Using the convolution theorem of the Mellin transform (Ref. [137] Eq.1.27) and the following Mellin transforms :

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{f}{f_0}\right)^{-2} + 1\right]^{-11/6} &\longrightarrow \frac{f_0^{-s}}{2} \frac{\Gamma[-s/2, 11/6 + s/2]}{\Gamma(11/6)}, \\ -\frac{11}{3} &< \mathrm{Re}\{s\} < 0 \\ f^2 J_1^2(af) &\longrightarrow a^{-(s+2)} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left[\begin{array}{c} s/2+2, -1/2-s/2 \\ 1-s/2, -s/2 \end{array}\right], \end{aligned} \tag{3.126}$$

$$-4 < \mathrm{Re}\{s\} < -1 \tag{3.127}$$

$$J_0(f^{-1}) \longrightarrow 2^{-s-1}\Gamma\left[\begin{array}{c} -s/2 \\ 1+s/2 \end{array}\right], \quad -\frac{3}{2} < \mathrm{Re}\{s\} < 0 \tag{3.128}$$

$$J_2(f^{-1}) \longrightarrow 2^{-s-1}\Gamma\left[\begin{array}{c} -s/2+1 \\ 2+s/2 \end{array}\right], \quad -\frac{3}{2} < \mathrm{Re}\{s\} < 2 \tag{3.129}$$

and substituting s by $2s$ and t by $2t$ leads to the new equations :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \frac{a^{-2}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(11/6)} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathcal{C}_s} \mathrm{d}s (af_0)^{-2s} \int_{\mathcal{C}_t} \mathrm{d}t (2ab)^{-2t} \\ &\quad \times\Gamma\left[\begin{array}{c} s+t+2, -1/2-s-t, -s, 11/6+s, -t \\ 1-s-t, -s-t, 1+t \end{array}\right] \end{aligned} \tag{3.130}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \frac{a^{-2}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(11/6)} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathcal{C}_s} \mathrm{d}s (af_0)^{-2s} \int_{\mathcal{C}_t} \mathrm{d}t (2ab)^{-2t} \\ &\quad \times\Gamma\left[\begin{array}{c} s+t+2, -1/2-s-t, -s, 11/6+s, -t+1 \\ 1-s-t, -s-t, 2+t \end{array}\right] \end{aligned} \tag{3.131}$$

Sasiela [137] has shown that this kind of integrals can be written as the sum of double series. Each series is the sum of residues of an independent 2–poles set of the integrand. There is one series for each combination of the parameters. For the integral $\mathcal{I}_1$, the sets of independent 2–poles are :

$$\begin{array}{ll} (1) & s+t+2=-n; -s=-m \\ (2) & s+t+2=-n; 11/6+s=-m \\ (3) & s+t+2=-n; -t=-m \\ (4) & -1/2-s-t=-n; -s=-m \\ (5) & -1/2-s-t=-n; 11/6+s=-m \\ (6) & -1/2-s-t=-n; -t=-m \\ (7) & -s=-n; -t=-m \\ (8) & 11/6+s=-n; -t=-m \end{array} \tag{3.132}$$

and for the integral $\mathcal{I}_2$, the sets of independent 2–poles are :

$$\begin{array}{ll} (1) & s+t+2=-n; -s=-m \\ (2) & s+t+2=-n; 11/6+s=-m \\ (3) & s+t+2=-n; -t+1=-m \\ (4) & -1/2-s-t=-n; -s=-m \\ (5) & -1/2-s-t=-n; 11/6+s=-m \\ (6) & -1/2-s-t=-n; -t+1=-m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (7) & -s = -n; -t+1 = -m \\ (8) & 11/6 + s = -n; -t+1 = -m \end{array} \tag{3.133}$$

At infinity, the series of both integrals tends toward :

$$\begin{array}{ll}
(1) & \left(\frac{1}{\pi r f_0}\right)^{2m} \left(\frac{D}{r}\right)^{2n} (n!)^0 (m!)^2 \\
(2) & (\pi r f_0)^{2m} \left(\frac{D}{r}\right)^{2n} (n!)^0 (m!)^{-2} \\
(3) & (\pi r f_0)^{2m} (\pi D f_0)^{2n} (n!)^{-2} (m!)^{-2} \\
(4) & \left(\frac{1}{\pi r f_0}\right)^{2m} \left(\frac{r}{D}\right)^{2n} (n!)^0 (m!)^2 \\
(5) & (\pi r f_0)^{2m} \left(\frac{r}{D}\right)^{2n} (n!)^0 (m!)^{-2} \\
(6) & (\pi r f_0)^{2m} \left(\frac{1}{\pi D f_0}\right)^{2n} (n!)^2 (m!)^{-2} \\
(7) & \left(\frac{r}{D}\right)^{2m} \left(\frac{1}{\pi D f_0}\right)^{2n} (n!)^2 (m!)^0 \\
(8) & \left(\frac{r}{D}\right)^{2m} (\pi D f_0)^{2n} (n!)^{-2} (m!)^0
\end{array} \tag{3.134}$$

For fast convergence, the no–factorial terms must be inferior to 1 and the powers of the factorial must be inferior or equal to zero. The powers verifying this rule lead to convergent series (so–called Taylor series) and other series lead to series with asymptotic behavior. The table 3.1 summarizes the range of applicability of the series and solution types. Looking for solutions for which the baseline and the diameter of the pupil are much smaller than the outer scale leads to the selection of Taylor series 3, 5 and 8 and to the solution Eq. (3.92) for $r < \frac{1}{\pi f_0}$, $D < \frac{1}{\pi f_0}$ and $r < D$, and series 2 and 3 and the solution Eq. (3.93) for $r < \frac{1}{\pi f_0}$, $D < \frac{1}{\pi f_0}$ and $r > D$.

Appendix B : Spatial covariance of the AA fluctuations : approximation to large baselines

From Eq. (3.96), the covariance can be written :

$$\mathcal{C}(r,\gamma) = 0.0719 \lambda^2 r_0^{-5/3} f_0^{-11/3} \left[\mathcal{I}_1 - \cos(2\gamma)\mathcal{I}_2\right] \tag{3.135}$$

with :

$$\mathcal{I}_1 \;=\; \int_0^{+\infty} f^4 J_0(2\pi f r) \left[\left(\frac{f_0}{f}\right)^{-2} + 1\right]^{-11/6} \frac{\mathrm{d}f}{f} \tag{3.136}$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^{+\infty} f^4 J_2(2\pi f r)\left[\left(\frac{f_0}{f}\right)^{-2}+1\right]^{-11/6}\frac{\mathrm{d}f}{f} \tag{3.137}$$

$\mathcal{I}_1$ and $\mathcal{I}_2$ are written in the good form to apply the convolution theorem of the Mellin transforms. Using the Mellin transform of Eq. (3.126) and the following :

$$f^4 J_0(2\pi f r) \longrightarrow (2\pi r)^{-(s+4)}2^{s+3}\Gamma\left[\begin{array}{c} s/2+2 \\ -s/2+1 \end{array}\right], \quad -4<\mathrm{Re}\{s\}<-\frac{5}{2} \tag{3.138}$$

$$f^4 J_2(2\pi f r) \longrightarrow (2\pi r)^{-(s+4)}2^{s+3}\Gamma\left[\begin{array}{c} s/2+3 \\ -s/2 \end{array}\right], \quad -6<\mathrm{Re}\{s\}<-\frac{5}{2} \tag{3.139}$$

leads to the new equations :

$$\mathcal{I}_1 = \frac{4}{\Gamma(11/6)(2\pi r)^4}\frac{1}{2\pi i} \times \int_{\mathcal{C}}\Gamma\left[\begin{array}{c} s/2+1/12, -s/2+23/12, s/2-1/12 \\ -s/2+11/12 \end{array}\right]\left(\frac{2\pi r f_0}{2}\right)^{-s}\mathrm{d}s \tag{3.140}$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{4}{\Gamma(11/6)(2\pi r)^4}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\Gamma[s/2+3, s/2+11/6]\left(\frac{2\pi r f_0}{2}\right)^{-s}\mathrm{d}s \tag{3.141}$$

where s is a complex number and $\mathcal{C}$ is the integration path in the complex plane. Substituting s by $s-23/6$ and using the recurrent relation of the gamma functions : $\Gamma[-s/2+23/12) = (-s/2+11/12)\Gamma(-s/2+11/12)$, the Eq. (3.140) gives :

$$\mathcal{I}_1 = \frac{4}{\Gamma(11/6)(2\pi r)^4}\left(\frac{2\pi r f_0}{2}\right)^{23/6}\frac{1}{2\pi i} \times \left\{\frac{11}{12}\int_{\mathcal{C}}\Gamma\left[s/2+1/12, s/2-1/12\right]\left(\frac{2\pi r f_0}{2}\right)^{-s}\mathrm{d}s\right. \tag{3.142}$$

$$\left. -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} s\Gamma\left[s/2+1/12, s/2-1/12\right]\left(\frac{2\pi r f_0}{2}\right)^{-s}\mathrm{d}s\right\} \tag{3.143}$$

For the first integral, one uses the Mellin transform of the modified Bessel function of the third kind (so–called the McDonald function) : $K_\nu(x) \longrightarrow 2^{s-2}\Gamma[s/2+\nu/2, s/2-\nu/2], Re\{s\} > Re\{\nu\}$ and for the second one, the Mellin transform of the derivative of a function : $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n h(x) \longrightarrow (-s)^n H(s)$ and the Mellin transform of the McDonald function above, to obtain :

$$\mathcal{I}_1 = \frac{4}{\Gamma(11/6)(2\pi r)^4}\left(\frac{2\pi r f_0}{2}\right)^{23/6}\left\{\frac{11}{3}K_{1/6}(2\pi r f_0) + 2\left|x\frac{\mathrm{d}K_{1/6}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2\pi r f_0}\right\} \tag{3.144}$$

Using the recurrent relations of the McDonald function : $x\frac{\mathrm{d}K_\nu(x)}{\mathrm{d}x}+\nu K_\nu(x) = -xK_{\nu-1}(x)$ and $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$ gives the final expression :

$$\mathcal{I}_1 = \frac{4}{\Gamma(11/6)(2\pi r)^4}\left(\pi r f_0\right)^{23/6}\left\{\frac{10}{3}K_{1/6}(2\pi r f_0) - 4\pi r f_0 K_{5/6}(2\pi r f_0)\right\} \tag{3.145}$$

Substituting s by $s - 29/6$ and using the recurrent relations of the McDonald function in the Eq. (3.141) leads to :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 &= \frac{4}{\Gamma(11/6)(2\pi r)^4}\left(\frac{2\pi r f_0}{2}\right)^{29/6} \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \Gamma\left[s/2 + 7/12, s/2 - 7/12\right]\left(\frac{2\pi r f_0}{2}\right)^{-s}\mathrm{d}s && (3.146) \\
&= \frac{16}{\Gamma(11/6)(2\pi r)^4}\left(\frac{2\pi r f_0}{2}\right)^{29/6} K_{7/6}(2\pi r f_0) && (3.147) \\
&= \frac{16}{\Gamma(11/6)(2\pi r)^4}\left(\frac{2\pi r f_0}{2}\right)^{29/6} \\
&\quad \times \left\{K_{5/6}(2\pi r f_0) + \frac{1}{3}(2\pi r f_0)^{-1}K_{1/6}(2\pi r f_0)\right\} && (3.148)
\end{aligned}$$

And finally, the Eq. (3.135) can be written :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(r,\gamma) &= \frac{0.0719 \times 2^{1/6}}{\Gamma(11/6)}\lambda^2 r_0^{-5/3} f_0^{1/3} \\
&\quad \times \left\{\left[\frac{2}{3}\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma)\right](2\pi r f_0)^{-1/6}K_{1/6}(2\pi r f_0)\right. \\
&\quad \left. - \cos^2(\gamma)(2\pi r f_0)^{5/6}K_{5/6}(2\pi r f_0)\right\} && (3.149)
\end{aligned}$$

Appendix C : First–order spatial covariance of the AA fluctuations

The covariance of the AA (Eq. (3.92)) is developed for all the combinations of $n = 0, 1$ and $m = 0, 1$ and ordered in powers of the ratio r/D :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_\alpha(r,\gamma) &= 8.8578.10^{-4}\lambda^2 r_0^{-5/3} f_0^{-11/3} D^{-4}(\pi D f_0)^{11/3} && (3.150) \\
&\quad \times \left\{-\left(\frac{r}{D}\right)^{20/3}[1.3 + \cos(2\gamma)]\Gamma\left[\begin{array}{c} 5/2, 17/6, -7/3 \\ 1/2, -1/2, 16/3 \end{array}\right](\pi D f_0)^2\right. \\
&\quad + \left(\frac{r}{D}\right)^{14/3}\left[\frac{10}{7} + \cos(2\gamma)\right] \\
&\quad\quad \times \left[\Gamma\left[\begin{array}{c} 5/2, 11/6, -4/3 \\ 1/2, -1/2, 13/3 \end{array}\right] + \Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2, 17/6, -4/3 \\ 3/2, 1/2, 13/3 \end{array}\right](\pi D f_0)^2\right] \\
&\quad + \left(\frac{r}{D}\right)^4\cos(2\gamma)\left[\Gamma\left[\begin{array}{c} 13/6, -2/3, 11/6 \\ 5/6, -1/6, 4 \end{array}\right]\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\Gamma\left[\begin{array}{c} 7/6, 1/3, 17/6 \\ 11/6, 5/6, 4 \end{array}\right] (\pi D f_0)^2 \\
&+\Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2, 4, -13/6 \\ 3, 2, 4 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{13/3} \\
&-\Gamma\left[\begin{array}{c} 5/2, 5, -19/6 \\ 4, 3, 4 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{19/3} \Bigg] \\
&- \left(\frac{r}{D}\right)^{8/3} [1.75 + \cos(2\gamma)]\, \Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2, 11/6, -1/3 \\ 3/2, 1/2, 10/3 \end{array}\right] \\
&- \left(\frac{r}{D}\right)^{2} [2 + \cos(2\gamma)] \Bigg[\Gamma\left[\begin{array}{c} 7/6, 1/3 \\ 5/6, 3 \end{array}\right] - \Gamma\left[\begin{array}{c} 1/6, 4/3 \\ 11/6, 3 \end{array}\right] (\pi D f_0)^2 \\
&+\Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2, -7/6 \\ 2, 3 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{7/3} - \Gamma\left[\begin{array}{c} 5/2, -13/6 \\ 3, 3 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{13/3} \Bigg] \\
&+\Gamma\left[\begin{array}{c} 1/6, 4/3 \\ 17/6 \end{array}\right] + \Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2, -1/6 \\ 3 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{1/3} \\
&-\Gamma\left[\begin{array}{c} -5/6, 7/3 \\ 23/6 \end{array}\right] (\pi D f_0)^2 - \Gamma\left[\begin{array}{c} 5/2, -7/6 \\ 4 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{7/3} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

The covariance of the AA (Eq. (3.93)) is developed for all the combinations of $n = 0, 1$ and $m = 0, 1$ and ordered in powers of the ratio r/D :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_\alpha(r,\gamma) \;=\; & 8.8578.10^{-4} \lambda^2 r_0^{-5/3} f_0^{-11/3} D^{-4} (\pi D f_0)^{11/3} \\
& \times \Bigg\{ \left(\frac{r}{D}\right)^{4} \cos(2\gamma) \Bigg[\Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2, 4, -13/6 \\ 3, 2, 4 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{13/3} \\
& -\Gamma\left[\begin{array}{c} 5/2, 5, -19/6 \\ 4, 3, 4 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{19/3} \Bigg] \\
& - \left(\frac{r}{D}\right)^{2} [2 + \cos(2\gamma)] \Bigg[\Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2, 3, -7/6 \\ 3, 2, 3 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{7/3} \\
& -\Gamma\left[\begin{array}{c} 5/2, 4, -13/6 \\ 4, 3, 3 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{13/3} \Bigg] \\
& + \left(\frac{r}{D}\right)^{5/3} [2.2 + \cos(2\gamma)]\, \Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2, 17/6, 1/6 \\ 3, 2, 17/6 \end{array}\right] (\pi D f_0)^2 \\
& +\Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2, 2, -1/6 \\ 3, 2 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{1/3} - \Gamma\left[\begin{array}{c} 5/2, 3, -7/6 \\ 4, 3 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{7/3} \\
& + \left(\frac{r}{D}\right)^{-1/3} [5 - \cos(2\gamma)] \Bigg[\Gamma\left[\begin{array}{c} 3/2, 11/6, 7/6 \\ 3, 2, 11/6 \end{array}\right] \\
& +\Gamma\left[\begin{array}{c} 5/2, 17/6, 7/6 \\ 4, 3, 11/6 \end{array}\right] (\pi D f_0)^2 \Bigg] \\
& - \left(\frac{r}{D}\right)^{-7/3} [1 + 7\cos(2\gamma)]\, \Gamma\left[\begin{array}{c} 5/2, 11/6, 7/6 \\ 4, 3, -1/6 \end{array}\right] \Bigg\} \qquad (3.151)
\end{aligned}
$$

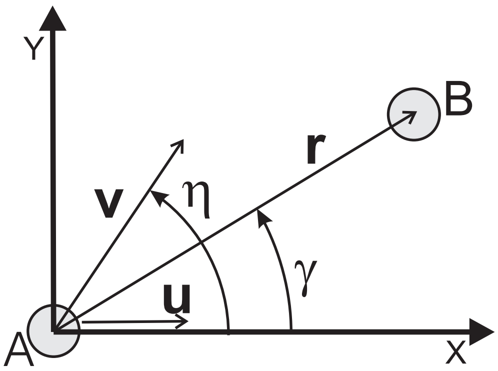


FIG. 3.12 – Schematic layout of the baseline **r**, the wind **v** and the direction **u** of measurement of the AA fluctuations.

2–pole sets	Solution type	Parameter	range
(1)	Asymp.	$r > \frac{1}{\pi f_0}$	$r > D$
(2)	Taylor	$r < \frac{1}{\pi f_0}$	$r > D$
(3)	Taylor	$r < \frac{1}{\pi f_0}$	$D < \frac{1}{\pi f_0}$
(4)	Asymp.	$r > \frac{1}{\pi f_0}$	$r < D$
(5)	Taylor	$r < \frac{1}{\pi f_0}$	$r < D$
(6)	Asymp.	$r < \frac{1}{\pi f_0}$	$D > \frac{1}{\pi f_0}$
(7)	Asymp.	$r < D$	$D > \frac{1}{\pi f_0}$
(8)	Taylor	$r < D$	$D < \frac{1}{\pi f_0}$

TAB. 3.1 – Series ranges of applicability for most rapid convergence

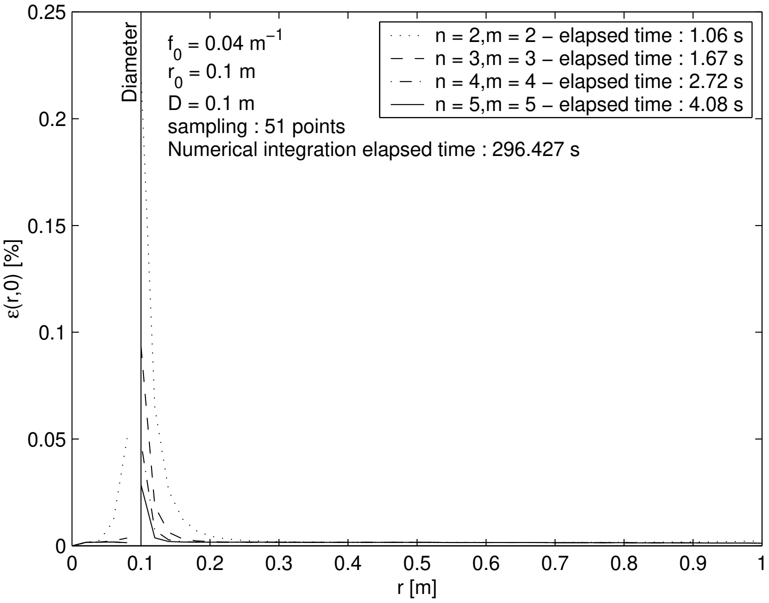


FIG. 3.13 – Relative error between the results obtained from numerical computation of the integral expression and of series expansions with the corresponding computation times.

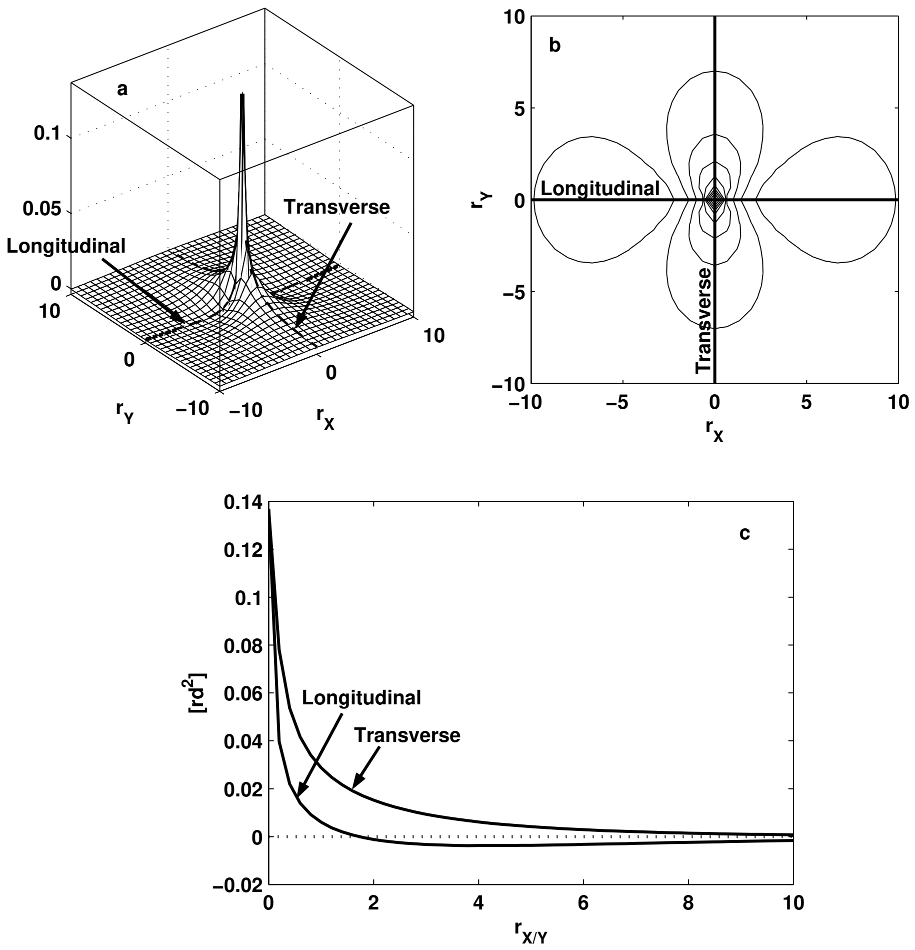


FIG. 3.14 – 2–D spatial covariance (a), iso–level of the covariance (b) and longitudinal and transverse covariances (c) of the AA fluctuations for $f_0 = 0.04m^{-1}$, $r_0 = 0.1m$ and $D = 0.1m$.

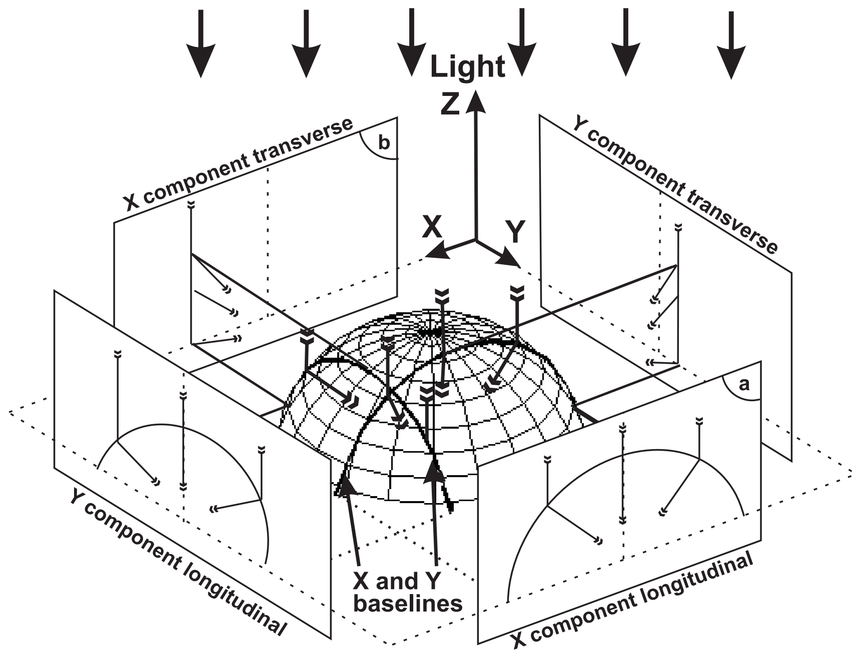


Fig. 3.15 – Ray tracing scheme of a plane wave incoming on a lens and the projections of the rays in particular planes. These planes contain the X and Y components of the rays crossing the X and Y paths. For reasons of readability, only a few rays are drawn.

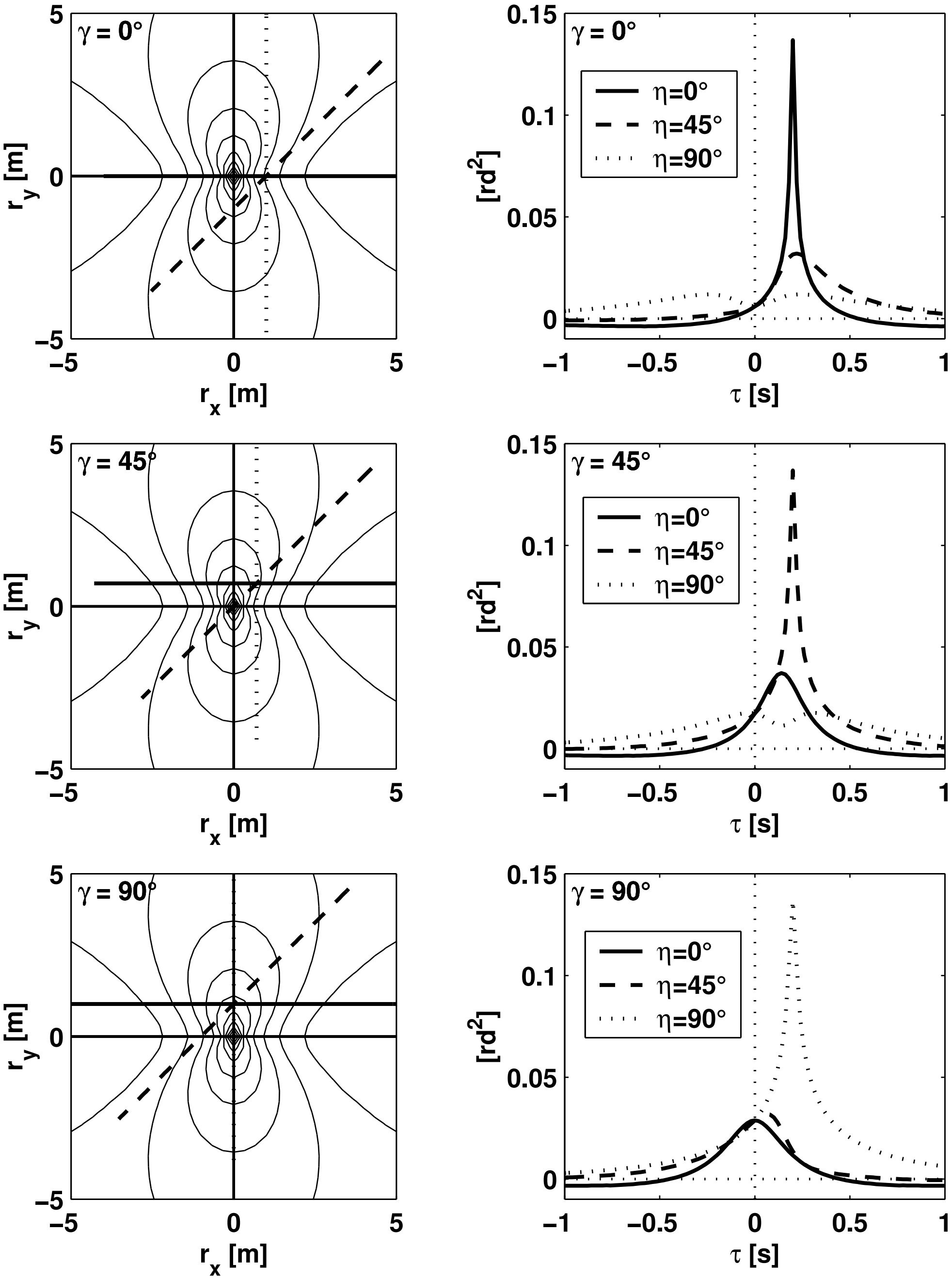


FIG. 3.16 – Temporal cross–correlations for different directions of the wind : $\eta = 0$, 45 and 90 degrees and for baseline orientations equal to $\gamma = 0$, 45 and 90 degrees and the corresponding cut–lines on the spatial covariance of the AA fluctuations

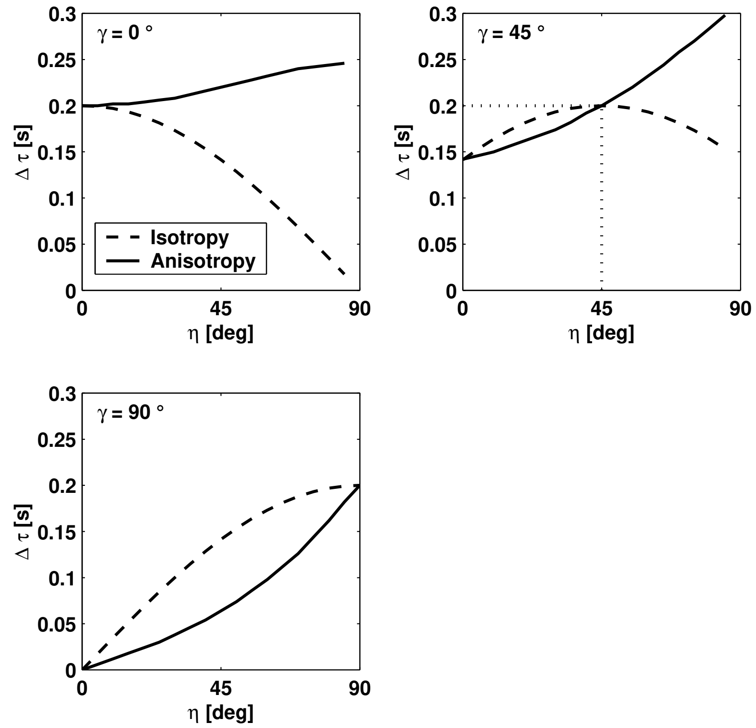


FIG. 3.17 – Delay corresponding to the maxima of the correlations as a function of the wind direction for different orientations of the baseline. Isotropy corresponds to the delay computed with Eq. (3.103) and anisotropy corresponds to the position of the maximum of the spatio–temporal correlation of Eq. (3.100) ($v = 5$ m.s^{-1} and $r = 1$ m).

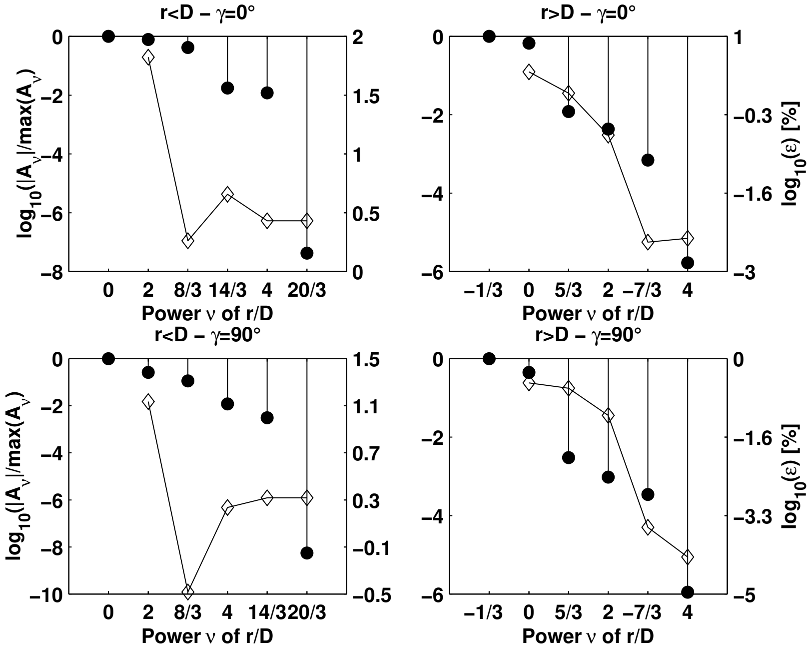


FIG. 3.18 – Coefficients A_ν (full circles) of the power $(r/D)^\nu$ and relative error $\varepsilon(r,\gamma)$ (diamonds) on the value of the covariance.

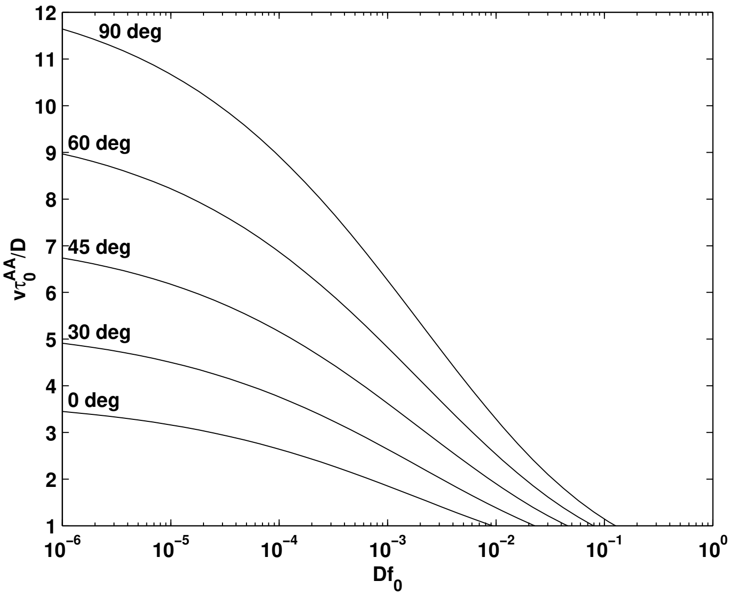


FIG. 3.19 – Decorrelation time of the AA expressed in unit of D/v versus Df_0 for different directions of the wind.

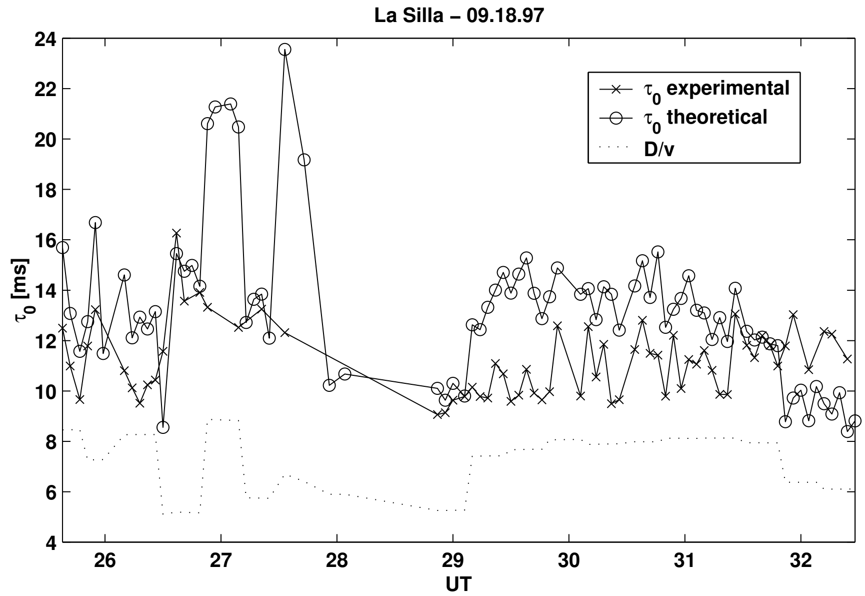


FIG. 3.20 – Theoretical (circles) and experimental (crosses) decorrelation times τ_0 at La Silla the 18 of September 1997.

Chapitre 4

Optique adaptative et échelle externe

Les systèmes d'optique adaptative (OA) pour compenser les déformations d'une onde perturbée par la turbulence atmosphérique sont maintenant largement répandus sur les grands télescopes.

Si l'idée date de Babcock en 1953 [12], les premiers systèmes pour l'astronomie ont vu le jour en France avec les instruments COME-ON[1] [132, 130] et COME-ON+ [131, 130]. De nos jours, chaque nouveau grand télescope est équipé d'un système d'OA. Pour n'en citer que quelques un, nous nommerons ADONIS[2] [21, 130] au télescope de 3,6 m de l'ESO[3] à l'observatoire de La Silla au Chili, le système à senseur de courbure de la bonnette d'optique adaptative PUEO[4] [6, 126] du CFHT[5] à l'observatoire de Mauna–Kea à Hawaï et NAOS[6] [34] du télescope Antu du VLT[7] à l'observatoire du Cerro Paranal au Chili.

Le principe de fonctionnement d'un système d'OA est présenté sur la figure 4.1. Un analyseur de surface d'onde mesure typiquement sur un ensemble de sous–pupilles le gradient (les angles d'arrivée) ou le laplacien de la phase de l'onde issue de la source de référence. Puis à partir de cet ensemble de mesures, la phase est reconstruite par le reconstructeur de surface d'onde. Cette surface d'onde est ensuite reproduite par le miroir déformable qui image la source scientifique. Le résultat est l'obtention sur le détecteur d'une onde dont la phase est corrigée pour tout ou partie des effets de la turbulence.

Différents types d'analyseurs de surface d'onde existent. Le plus répandu en astronomie est l'analyseur de Shack–Hartmann [129] pour lequel le gradient de la phase est mesuré en différents points du front d'onde par une matrice de sous–pupilles carrées. Un autre analyseur a été proposé par Roddier (1988) [123, 68]. Il s'agit d'un senseur

[1] CGE Observatoire de Meudon ESO ONERA
[2] ADaptive Optics Near Infrared System
[3] European South Observatory
[4] Probe the Universe with Enhanced Optics
[5] Canada–France–Hawaii Telescope
[6] Nasmyth Adaptive Optics System
[7] Very Large Telescope

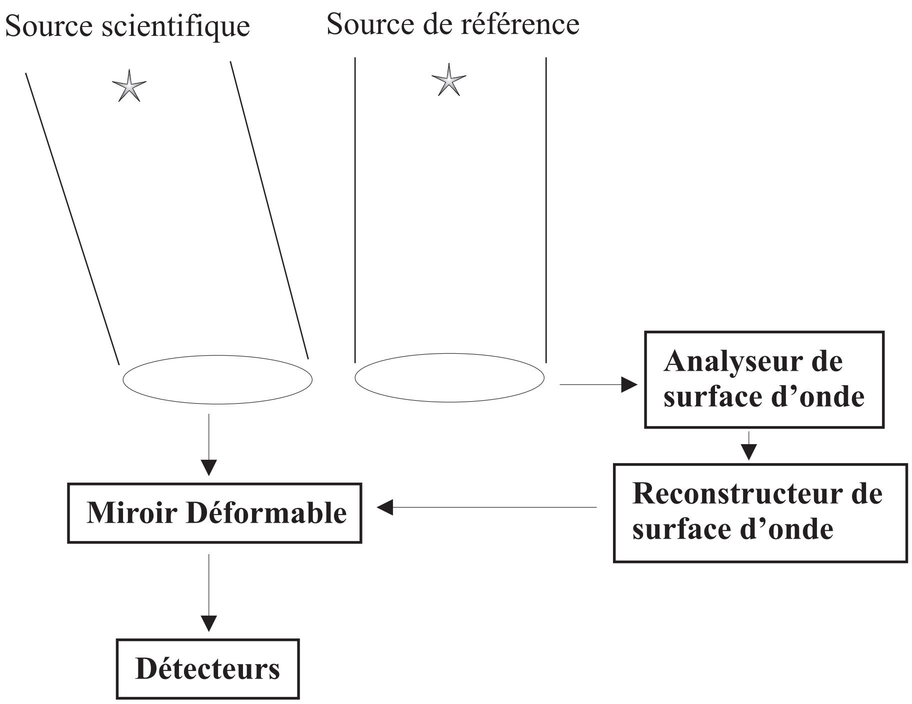


FIG. 4.1 – Schéma de principe d'un système d'optique adaptative.

de courbure qui mesure le laplacien de la phase en différents points du front d'onde sur une pupille divisée en secteurs. D'autres analyseurs existent comme l'interféromètre à diversité de phase [107] ou l'interféromètre à décalage latéral mais ils sont peu usités en astronomie.

Le premier ordre de correction d'un système d'OA est la correction de l'agitation de l'image c'est–à–dire la correction du tip/tilt. Pour le modèle de Kolmogorov, la correction de cet ordre est primordiale car il concentre le majeur parti de l'énergie turbulente du front d'onde et est la principale cause de la dégradation des images long temps de pose. Beaucoup d'études ont donc été consacrées à la quantification de l'amélioration de la qualité des images lorsque le tip/tilt seul ou avec des ordres supérieurs est corrigé [71, 92, 164, 45, 44, 167].

Avec l'augmentation de la taille des télescopes, il est devenu nécessaire d'introduire l'effet de l'échelle externe dans l'évaluation des performances des systèmes d'OA [38, 166, 146, 163, 95, 115] et il est justifié de se poser la question de savoir si, pour un grand télescope en présence de l'échelle externe, le tip/tilt est toujours aussi prépondérant.

Dans ce chapitre, mon étude se restreint à l'analyse des effets de l'échelle externe de cohérence spatiale sur les performances d'un système d'optique adaptative dont la phase est reconstruite sur la base des polynômes de Zernike

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} a_i Z_i \left(\frac{\vec{r}}{R}\right) . \tag{4.1}$$

Les coefficients a_i de chaque mode i sont déduits des mesures effectuées par l'analyseur de surface d'onde.

4.1 Les polynômes de Zernike

Les polynômes de Zernike sont définis pour être orthogonaux sur un cercle de rayon unité. Selon la convention d'ordonnancement des polynômes choisie par Noll [113], ils s'écrivent

$$\left.\begin{array}{ll} Z_{i\,pair}\left(\frac{r}{R},\gamma\right) & = \\ Z_{i\,impair}\left(\frac{r}{R},\gamma\right) & = \\ Z_{i}\left(\frac{r}{R},\gamma\right) & = \end{array}\right\} \sqrt{n+1} R_n^m\left(\frac{r}{R}\right) \left\{\begin{array}{cc} \left.\begin{array}{c} \sqrt{2}\cos(m\gamma) \\ \sqrt{2}\sin(m\gamma) \end{array}\right\} & m \neq 0 \\ 1 & m = 0 \end{array}\right. \tag{4.2}$$

avec

$$R_n^m\left(\frac{r}{R}\right) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s!\,[(n+m)/2-s]!\,[(n-m)/2-s]!} \left(\frac{r}{R}\right)^{n-2s} \tag{4.3}$$

où $[r, \gamma]$ sont les coordonnées polaires sur la pupille ,R le rayon de la pupille et n et m sont respectivement les degrés radiaux et azimutaux. n et m satisfont aux relations $m \leq n$ et $(n-m)$ paire. $R_n^m(r/R)$ vérifie la relation suivante [25]

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r \Pi\left(\frac{r}{R}\right) R_n^m\left(\frac{r}{R}\right) J_n\left(2\pi r f\right) = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{J_{n+1}\left(2\pi R f\right)}{2\pi^2 R f} \tag{4.4}$$

La propriété d'orthogonalité des polynômes de Zernike s'écrit

$$\int \mathrm{d}\vec{r}\, \Pi\left(\frac{r}{R}\right) Z_i\left(\frac{r}{R},\gamma\right) Z_j\left(\frac{r}{R},\gamma\right) = \delta_{ij} \tag{4.5}$$

avec δ_{ij}, le symbole de Kronecker

$$\begin{array}{lll} \delta_{ij} & = 1 & \text{si } i = j \\ & = 0 & \text{sinon} \end{array} \tag{4.6}$$

et $\Pi\left(\frac{r}{R}\right)$, la fonction pupille

$$\begin{array}{lll} \Pi\left(\frac{r}{R}\right) & = \frac{1}{\pi R^2} & \text{si } \left(\frac{r}{R}\right) \leq 1 \\ & = 0 & \text{sinon.} \end{array} \tag{4.7}$$

Une grandeur qui sera utile pour les sections suivantes est la transformée de Fourier $Q_i(f, \phi)$ des polynômes de Zernike

$$Q_i(f,\phi) = \int \mathrm{d}\vec{r}\, \Pi\left(\frac{r}{R}\right) Z_i\left(\frac{r}{R},\gamma\right) \exp\left(-2j\pi \vec{f} \cdot \vec{r}\right) \tag{4.8}$$

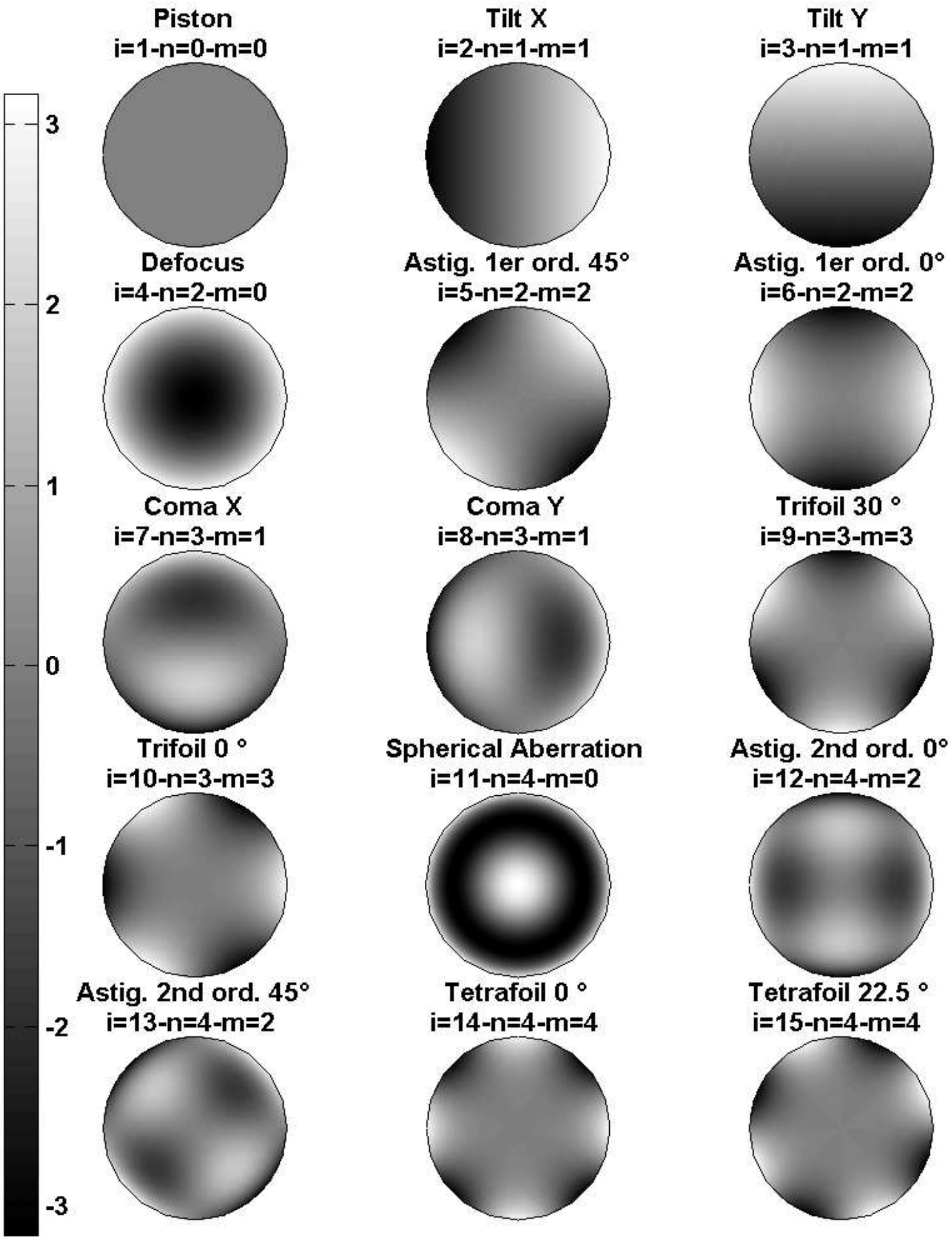


FIG. 4.2 – Représentation des polynômes de Zernike pour les ordres de 1 à 15. n et m sont respectivement leurs degrés radiaux et azimutaux.

L'intégrale selon γ est résolue avec la relation de l'Eq.(1.31) et celle selon r est résolue avec la relation de l'Eq.(4.4) pour obtenir,

$$\left.\begin{array}{ll} Q_{i\,pair}(f,\phi) & = \\ Q_{i\,impair}(f,\phi) & = \\ Q_i(f,\phi) & = \end{array}\right\} \quad \sqrt{n+1}\frac{J_{n+1}(2\pi f R)}{\pi f R} \tag{4.9}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} (-1)^{\frac{n+m}{2}} j^m \sqrt{2}\cos(m\phi) \\ (-1)^{\frac{n+m}{2}} j^m \sqrt{2}\sin(m\phi) \end{array}\right\} \quad m \neq 0 \\ (-1)^{n/2} \qquad\qquad m = 0 \end{array}\right.$$

où f et ϕ sont les coordonnées polaires du vecteur fréquence spatiale $\vec{f}$ conjugué de $\vec{r}$. Cette expression diffère légèrement de celle donnée par Noll [113]. Noll obtient $(-1)^{\frac{n-m}{2}}$ alors que je trouve $(-1)^{\frac{n+m}{2}}$. Cette différence provient de la définition de la transformation de Fourier qui pour Noll est

$$TF\left[f\left(r,\gamma\right)\right]\left(f,\phi\right) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\gamma \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r f\left(r,\gamma\right) \exp\left[2j\pi f r cos\left(\phi-\gamma\right)\right] \tag{4.10}$$

alors que dans cette thèse la convention retenue est

$$TF\left[f\left(r,\gamma\right)\right]\left(f,\phi\right) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\gamma \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r f\left(r,\gamma\right) \exp\left[-2j\pi f r cos\left(\phi-\gamma\right)\right]. \tag{4.11}$$

La figure 4.2 montre les quinze premiers polynômes de Zernike. Pour chacun sont indiqués sa dénomination, son numéro d'ordre, son degré radial et son degré azimutal.

4.2 Covariance des coefficients des polynômes de Zernike

La phase d'un front d'onde perturbé par la turbulence atmosphérique sur une pupille circulaire de rayon R peut se développer sur la base des polynômes de Zernike

$$\varphi(r,\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Z_i\left(\frac{r}{R},\gamma\right) \tag{4.12}$$

Les coefficients a_i sont donnés par

$$a_i = \int \mathrm{d}\vec{r}\,\Pi\left(\frac{r}{R}\right) Z_i\left(\frac{r}{R},\gamma\right)\varphi\left(r,\gamma\right). \tag{4.13}$$

Les propriétés statistiques des coefficients dépendent de celles des fluctuations de la phase. La covariance s'écrit

$$\langle a_i a_{i'}\rangle = \int \mathrm{d}\vec{f}\, W_\varphi(f) Q_i(f,\phi) Q_{i'}(f,\phi). \tag{4.14}$$

4.2.1 Expression de la covariance en présence de l'échelle externe de cohérence spatiale

Expression générale

En introduisant l'Eq.(4.9) dans l'Eq.(4.14) et en résolvant l'intégration selon ϕ à l'aide de l'Eq.(1.31), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle a_i a_{i'} \rangle &= \frac{\Gamma^2(11/6)}{\pi^{14/3}} \left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6} r_0^{-5/3} f_0^{-11/3} R^{-2} \\
&\quad \times \sqrt{(n+1)(n'+1)}(-1)^{(n+n'-m-m')/2}\delta_{mm'} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} \left[1+\left(\frac{x}{\pi D f_0}\right)^2\right]^{-\frac{11}{6}} J_{n+1}(x) J_{n'+1}(x), \\
&\quad \text{si } |i-i'| \text{ est paire ou } m=m'=0 \\
&= 0 \qquad \text{si } |i-i'| \text{ est impaire}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

où $W_\varphi(f)$ est le spectre des fluctuations de phase et D le diamètre de la pupille. Pour le modèle de Von Kármán , $W_\varphi(f)$ est donnée par l'Eq.(3.20). L'intégrale de l'Eq.(4.15) est identique à celle de l'Eq.(2.33) pour $\mu=0$, $\alpha=n+1$, $\beta=n'+1$, $q=2$, $p=11/6$ et $a=\pi D f_0$. On obtient finalement pour $\langle a_i a_{i'} \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle a_i a_{i'} \rangle &= 1,16\left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \sqrt{(n+1)(n'+1)}(-1)^{(n+n'-2m)/2}\delta_{mm'} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&\quad \times \Bigg\{ \Gamma\left[\begin{array}{c} k+\frac{3+n+n'}{2}, k+2+\frac{n+n'}{2}, k+1+\frac{n+n'}{2}, \frac{5}{6}-k-\frac{n+n'}{2} \\ 3+k+n+n', 2+k+n, 2+k+n' \end{array}\right] \\
&\quad \times (\pi D f_0)^{2k+n+n'-5/3} \\
&\quad + \Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{n+n'}{2}-\frac{5}{6}-k, k+\frac{7}{3}, k+\frac{17}{6}, k+\frac{11}{6} \\ \frac{n+n'}{2}+\frac{23}{6}+k, \frac{n-n'}{2}+\frac{17}{6}+k, \frac{n'-n}{2}+\frac{17}{6}+k \end{array}\right] \\
&\quad \times (\pi D f_0)^{2k} \Bigg\}, \\
&\quad \text{si } |i-i'| \text{ est paire ou } m=m'=0 \\
&= 0 \qquad \text{si } |i-i'| \text{ est impaire}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

avec $1,16 = \frac{2\Gamma(11/6)}{\pi^{3/2}}\left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6}$. L'Eq.(4.16) peut s'écrire aussi comme la somme de fonction hypergéométriques généralisées en utilisant les relations des Eqs.(1.17) et (1.14),

$$\begin{aligned}
\langle a_i a_{i'} \rangle &= 1,16\left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \sqrt{(n+1)(n'+1)}(-1)^{(n+n'-2m)/2}\delta_{mm'} \\
&\quad \times \Bigg\{ \Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{3+n+n'}{2}, 2+\frac{n+n'}{2}, 1+\frac{n+n'}{2}, \frac{5}{6}-\frac{n+n'}{2} \\ 3+n+n', 2+n, 2+n' \end{array}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \times (\pi D f_0)^{n+n'-5/3}\, {}_3F_4 \left[\begin{array}{c} \frac{3+n+n'}{2}, 2+\frac{n+n'}{2}, 1+\frac{n+n'}{2}; (\pi D f_0)^2 \\ 3+n+n', 2+n, 2+n', \frac{1}{6}+\frac{n+n'}{2} \end{array} \right] \\
& + \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{n+n'}{2} - \frac{5}{6}, \frac{7}{3}, \frac{17}{6}, \frac{11}{6} \\ \frac{n+n'}{2} + \frac{23}{6}, \frac{n-n'}{2} + \frac{17}{6}, \frac{n'-n}{2} + \frac{17}{6} \end{array} \right] \\
& \times {}_3F_4 \left[\begin{array}{c} \frac{7}{3}, \frac{17}{6}, \frac{11}{6}; (\pi D f_0)^2 \\ \frac{n+n'}{2} + \frac{23}{6}, \frac{n-n'}{2} + \frac{17}{6}, \frac{n'-n}{2} + \frac{17}{6}, \frac{11}{6} - \frac{n+n'}{2} \end{array} \right] \Bigg\}, \\
& \text{si } |i-i'| \text{ est paire ou } m = m' = 0 \\
= \;& 0 \qquad \text{si } |i-i'| \text{ est impaire}
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

On retrouve ici le résultat de Takato & Yamaguchi [146].

Expression asymptotique

Les fonctions hypergéométriques ci–dessus convergent quelle que soit la valeur de $(\pi D f_0)^2$. Cependant, lorsque $(\pi D f_0)^2$ devient grand devant 1, elles convergent lentement, des séries asymptotiques peuvent alors avantageusement remplacer les séries de Taylor. L'intégrale I de l'Eq.(4.15) étant identique à celle de l'Eq.(2.33), elle s'écrit comme l'intégrale de Mellin–Barnes de l'Eq.(2.36)

$$
\begin{aligned}
I \;=\; & \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(11/6)} \frac{1}{2j\pi} \int_{\eta-j\infty}^{\eta+j\infty} \mathrm{d}s\; (\pi D f_0)^{-2s} \\
& \times \Gamma \left[\begin{array}{c} s+1+\frac{n+n'}{2}, \frac{1}{2}-s, 1-s, -s, \frac{11}{6}+s \\ 2-s+\frac{n+n'}{2}, 1-s+\frac{n+n'}{2}, 1-s+\frac{n'-n}{2} \end{array} \right],
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Pour obtenir les séries asymptotiques, le contour est fermé avec C_+ , les pôles sont $s = k+1/2,\ k+1$ et k. I est égale à

$$
I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(p)} (Q_1 + Q_2 + Q_3) \tag{4.19}
$$

avec

$$
Q_1 = \sum_{k=0}^{n_0} \Gamma \left[\begin{array}{c} k+2+\frac{n+n'}{2}, -\frac{1}{2}-k, -1-k, \frac{17}{6}+k \\ 1-k+\frac{n+n'}{2}, -k+\frac{n-n'}{2}, -k+\frac{n'-n}{2} \end{array} \right] (\pi D f_0)^{-2k-2}, \tag{4.20}
$$

$$
Q_2 = \sum_{k=0}^{n_0} \Gamma \left[\begin{array}{c} k+\frac{3}{2}+\frac{n+n'}{2}, \frac{1}{2}-k, -\frac{1}{2}-k, \frac{7}{3}+k \\ \frac{3}{2}-k+\frac{n+n'}{2}, \frac{1}{2}-k+\frac{n-n'}{2}, \frac{1}{2}-k+\frac{n'-n}{2} \end{array} \right] (\pi D f_0)^{-2k-1} \tag{4.21}
$$

et

$$
Q_3 = \sum_{k=0}^{n_0} \Gamma \left[\begin{array}{c} k+1+\frac{n+n'}{2}, \frac{1}{2}-k, 1-k, \frac{11}{6}+k \\ 2-k+\frac{n+n'}{2}, 1-k+\frac{n-n'}{2}, 1-k+\frac{n'-n}{2} \end{array} \right] (\pi D f_0)^{-2k}. \tag{4.22}
$$

Pour les très grandes valeurs de $\pi D f_0$, la première itération de chacune des séries fournit une approximation suffisamment précise. Q_1, Q_2 et Q_3 s'approximent respectivement avec

$$Q_1 \simeq \Gamma\left[\begin{array}{c} 2+\frac{n+n'}{2}, -\frac{1}{2}, -1, \frac{17}{6} \\ 1+\frac{n+n'}{2}, \frac{n-n'}{2}, \frac{n'-n}{2} \end{array}\right] (\pi D f_0)^{-2}, \tag{4.23}$$

$$Q_2 \simeq \Gamma\left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{3} \\ \frac{1}{2}+\frac{n-n'}{2}, \frac{1}{2}+\frac{n'-n}{2} \end{array}\right] (\pi D f_0)^{-1} \tag{4.24}$$

et

$$Q_3 \simeq \Gamma\left[\begin{array}{c} 1+\frac{n+n'}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{6} \\ 2+\frac{n+n'}{2}, 1+\frac{n-n'}{2}, 1+\frac{n'-n}{2} \end{array}\right]. \tag{4.25}$$

Puisque $\Gamma(-1) = +\infty$, Q_1 nécessite un traitement particulier.

Si $n = n'$, Q_1 s'écrit

$$Q_1 \simeq \Gamma\left[\begin{array}{c} 2+n, -\frac{1}{2}, -1, \frac{17}{6} \\ 1+n, 0, 0 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{-2}. \tag{4.26}$$

En remplaçant $\Gamma(0)$ par $-\Gamma(-1)$ dans l'Eq.(4.26), on obtient

$$Q_1 \simeq \Gamma\left[\begin{array}{c} 2+n, -\frac{1}{2}, \frac{17}{6} \\ 1+n, -1 \end{array}\right] (\pi D f_0)^{-2} = 0. \tag{4.27}$$

Si $n \neq n'$, $n - n'$ est paire. Avec $|n - n'| = 2p$ ($p > 0 \in \mathbb{N}^+$), Q_1 s'écrit

$$Q_1 \simeq \Gamma\left[\begin{array}{c} 2+\frac{n+n'}{2}, -\frac{1}{2}, -1, \frac{17}{6} \\ 1+\frac{n+n'}{2}, -p, p \end{array}\right] (\pi D f_0)^{-2} \tag{4.28}$$

Les formules de duplication

$$\Gamma(2)\Gamma(-1) = -\frac{\pi}{\sin(\pi)} \tag{4.29}$$

et

$$\Gamma(1+p)\Gamma(-p) = -\frac{\pi}{\sin(\pi p)} \tag{4.30}$$

donnent

$$\frac{\Gamma(-1)}{\Gamma(-p)} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(2)} = p\Gamma(p). \tag{4.31}$$

On obtient

$$Q_1 \simeq |n - n'|\Gamma\left[\begin{array}{c} 2+\frac{n+n'}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{17}{6} \\ 1+\frac{n+n'}{2} \end{array}\right] (\pi D f_0)^{-2} \tag{4.32}$$

Avec les même notations, Q_3 s'écrit

$$Q_3 \simeq \Gamma\left[\begin{array}{c} 1+\frac{n+n'}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{6} \\ 2+\frac{n+n'}{2}, 1-p, 1+p \end{array}\right] = 0. \tag{4.33}$$

Finalement, La valeur asymptotique de $\langle a_i a_{i'} \rangle$ pour les grandes valeurs de $(\pi D f_0)^2$ est donnée par :

$$
\begin{aligned}
\langle a_i a_{i'} \rangle \quad \simeq \quad & \frac{2\Gamma(11/6)}{\pi^{3/2}} \left[\frac{24}{5} \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \right]^{5/6} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} (\pi D f_0)^{-11/3} \\
& \times \sqrt{(n+1)(n'+1)} (-1)^{(n+n'-2m)/2} \delta_{mm'} \\
& \times \Bigg\{ |n-n'| \Gamma \left[\begin{array}{c} 2 + \frac{n+n'}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{17}{6} \\ 1 + \frac{n+n'}{2} \end{array} \right] (\pi D f_0)^{-2} \\
& + \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{n-n'}{2}, \frac{1}{2} + \frac{n'-n}{2} \end{array} \right] (\pi D f_0)^{-1} \\
& + \frac{2\sqrt{(\pi)}\Gamma(11/6)}{2+n+n'} \delta_{nn'} \Bigg\}, \\
& \text{si } |i-i'| \text{ est paire ou } m = m' = 0 \\
= \quad & 0 \qquad \text{si } |i-i'| \text{ est impaire}
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

Lorsque le produit Df_0 tend vers l'infini c'est–à–dire lorsque l'échelle externe devient très petite devant le diamètre de la pupille, cette expression s'écrit

$$
\langle a_i a_{i'} \rangle \simeq \frac{2\Gamma^2(11/6)}{\pi^{14/3}} \left[\frac{24}{5} \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \right]^{5/6} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} (D f_0)^{-11/3} \delta_{ii'}
\tag{4.35}
$$

Cette expression est indépendante des degrés radiaux et azimuthaux. De plus, les termes non-diagonaux sont nuls. Ceci signifie que lorsque $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ devient plus petite que R les termes non-diagonaux se mettent à décroître plus rapidement que les termes diagonaux et la matrice de covariance $\langle a_i a_{i'} \rangle$ devient très vite quasi-diagonale. De plus, tous les termes diagonaux ont la même valeur. L'effet de l'échelle externe qui est de répartir de façon égale l'énergie entre tous les modes atteint ici son paroxysme.

Pour les cas $Df_0 < 1$, une excellente approximation de $\langle a_i a_{i'} \rangle$ est obtenue en développant les fonction hypergéométrique de l'Eq.(4.17) sur leurs deux premiers termes :

$$
\begin{aligned}
\langle a_i a_{i'} \rangle \quad = \quad & 1,17 \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \sqrt{(n+1)(n'+1)} (-1)^{(n+n'-2m)/2} \delta_{mm'} \qquad (4.36) \\
\times \quad & \Bigg\{ \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{11}{6}, -\frac{5}{6} + \frac{n+n'}{2}, \frac{7}{3}, \frac{17}{6} \\ \frac{23}{6} + \frac{n+n'}{2}, \frac{17}{6} + \frac{n-n'}{2}, \frac{17}{6} + \frac{n'-n}{2} \end{array} \right] \\
& + \Gamma \left[\begin{array}{c} 1 + \frac{n+n'}{2}, \frac{5}{6} - \frac{n+n'}{2}, \frac{3}{2} + \frac{n+n'}{2}, 2 + \frac{n+n'}{2} \\ 3 + n + n', 2 + n, 2 + n' \end{array} \right] (\pi D f_0)^{n+n'-\frac{5}{3}} \\
& - \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{17}{6}, -\frac{11}{6} + \frac{n+n'}{2}, \frac{10}{3}, \frac{23}{6} \\ \frac{29}{6} + \frac{n+n'}{2}, \frac{23}{6} + \frac{n-n'}{2}, \frac{23}{6} + \frac{n'-n}{2} \end{array} \right] (\pi D f_0)^2 \\
& - \Gamma \left[\begin{array}{c} 2 + \frac{n+n'}{2}, -\frac{1}{6} - \frac{n+n'}{2}, \frac{5}{2} + \frac{n+n'}{2}, 3 + \frac{n+n'}{2} \\ 4 + n + n', 3 + n, 3 + n' \end{array} \right] (\pi D f_0)^{n+n'+\frac{1}{3}} \Bigg\}, \\
& \text{si } |i-i'| \text{ est paire ou } m = m' = 0 \\
= \quad & 0 \qquad \text{si } |i-i'| \text{ est impaire}
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

La variance s'obtient pour $i = i'$ [166]

$$
\begin{aligned}
\langle |a_i|^2 \rangle \quad &= 1,17 \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} (n+1) \\
&\times \Bigg\{ \Gamma \left[\begin{array}{c} -\frac{5}{6}+n, \frac{7}{3}, \frac{11}{6} \\ \frac{23}{6}+n, \frac{17}{6} \end{array} \right] {}_2F_3 \left[\begin{array}{c} \frac{11}{6}, \frac{7}{3}; (\pi D f_0)^2 \\ \frac{23}{6}+n, \frac{17}{6}, \frac{11}{6}-n \end{array} \right] \\
&\quad + (\pi D f_0)^{2n-5/3} \Gamma \left[\begin{array}{c} 1+n, \frac{5}{6}-n, \frac{3}{2}+n \\ 3+2n, 2+n \end{array} \right] \\
&\quad \times {}_2F_3 \left[\begin{array}{c} 1+n, \frac{3}{2}+n; (\pi D f_0)^2 \\ 3+2n, 2+n, \frac{1}{6}+n \end{array} \right] \Bigg\} \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

4.2.2 Expression de la covariance pour une échelle externe de cohérence spatiale infinie

Lorsque l'on se place dans le cadre du modèle de Kolmogorov c'est–à–dire pour $f_0 = 0$, les termes $(\pi D f_0)^{2k+n+n'-5/3}$ et $(\pi D f_0)^{2k}$ de l'Eq.(4.16) sont nuls pour $n + n' \geq 5/3$, $\forall k$ pour le premier et $\forall k$ pour le second. On obtient donc la valeur de la matrice de covariance des coefficients des polynômes de Zernike pour une échelle externe infinie et pour les modes supérieurs au mode piston $(i, i' > 1)$,

$$
\begin{aligned}
\langle a_i a_{i'} \rangle &= 2,25 \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \sqrt{(n+1)(n'+1)} (-1)^{(n+n'-2m)/2} \delta_{mm'} \\
&\quad \times \Gamma \left[\begin{array}{c} -\frac{5}{6}+\frac{n+n'}{2} \\ \frac{23}{6}+\frac{n+n'}{2}, \frac{17}{6}+\frac{n-n'}{2}, \frac{17}{6}+\frac{n'-n}{2} \end{array} \right], \\
&\quad \text{si } |i-i'| \text{ est paire ou } m = m' = 0 \\
&= 0 \qquad \text{si } |i-i'| \text{ est impaire} \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

avec $2,25 = \frac{\Gamma(14/3)\Gamma^2(11/6)}{2^{8/3}\pi} \left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6}$. C'est la même expression que celle obtenue par Noll [113] et Wang & Markey [165]. Et pour $i = i' > 1$, on obtient

$$
\langle |a_i|^2 \rangle = \frac{2,25}{\Gamma^2(17/6)} \left(\frac{2R}{r_0}\right)^{5/3} (n+1) \Gamma \left[\begin{array}{c} -\frac{5}{6}+n \\ \frac{23}{6}+n \end{array} \right]. \qquad (4.40)
$$

Les Eqs.(4.17) et (4.38) sont valides quelle que soient les valeurs de i et i'. Lorsque $i = i' = 1$ et que f_0 tend vers 0 dans l'Eq.(4.38), le coefficient du mode piston $\langle |a_1|^2 \rangle$ tend vers l'infini comme le prévoit le modèle de Kolmogorov.

Pour le modèle de Kolmogorov , la matrice de covariance $\langle a_i a_{i'} \rangle$ peut aussi être obtenue directement à partir de son expression intégrale. Pour $f_0 = 0$, l'Eq.(4.15) s'écrit

$$
\begin{aligned}
\langle a_i a_{i'} \rangle &= \frac{4\Gamma^2(11/6)}{\pi} \left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \\
&\quad \times \sqrt{(n+1)(n'+1)} (-1)^{(n+n'-m-m')/2} \delta_{mm'}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \times \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^{-\frac{11}{3}} J_{n+1}(x) J_{n'+1}(x), \\
& \text{si } |i-i'| \text{ est paire ou } m = m' = 0 \\
= \quad 0 \quad & \text{si } |i-i'| \text{ est impaire}
\end{aligned} \tag{4.41}
$$

Cette intégrale est la transformée de Mellin $H(-11/3)$ de la fonction $h(x) = J_{n+1}(x)J_{n'+1}(x)$. $H(-11/3)$ nous est donnée par l'Eq.(1.28)

$$
H(-11/3) = \frac{\Gamma(14/3)}{2^{14/3}} \Gamma \left[\begin{array}{c} -\frac{5}{6} + \frac{n+n'}{2} \\ \frac{23}{6} + \frac{n+n'}{2}, \frac{17}{6} + \frac{n-n'}{2}, \frac{17}{6} + \frac{n'+n}{2} \end{array} \right] \tag{4.42}
$$

où on a utilisé l'égalité

$$
\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{17}{6}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{11/3}}\Gamma\left(\frac{14}{3}\right)
$$

issue de l'Eq.(1.15). $H(-11/3)$ est définie pour $n+n' > 5/3$ soit $i, i' > 1$. En remplaçant l'intégrale de l'Eq.(4.41) par l'Eq.(4.42), on obtient finalement

$$
\begin{aligned}
\langle a_i a_{i'} \rangle \quad = \quad & \frac{\Gamma^2(11/6)\Gamma(14/3)}{2^{8/3}\pi} \left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \\
& \times \sqrt{(n+1)(n'+1)}(-1)^{(n+n'-m-m')/2}\delta_{mm'} \\
& \times \Gamma \left[\begin{array}{c} -\frac{5}{6} + \frac{n+n'}{2} \\ \frac{23}{6} + \frac{n+n'}{2}, \frac{17}{6} + \frac{n-n'}{2}, \frac{17}{6} + \frac{n'+n}{2} \end{array} \right], \\
& \text{si } |i-i'| \text{ est paire ou } m = m' = 0 \\
= \quad 0 \quad & \text{si } |i-i'| \text{ est impaire}
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

où l'on retrouve l'expression de l'Eq.(4.39).

4.2.3 Discussion

La figure 4.3 montre l'évolution de la valeur de la covariance $\langle a_i a_{i'} \rangle$ en fonction du produit Df_0. Le graphique supérieur est pour $i = i'$ et le graphique inférieur pour $i \neq i'$. La covariance est calculée avec la série de l'Eq.(4.17) pour $Df_0 > 5$ et avec l'expression asymptotique donnée par l'Eq.(4.34) pour $Df_0 \leq 5$. Les deux courbes se raccordent presque parfaitement, seulement une légère distorsion est visible aux alentours de la valeur $Df_0 = 5$. Cette distorsion est le signe d'un début de divergence des séries.

Avec ces deux séries de courbes, on s'aperçoit que dès que l'échelle externe est plus petite que le diamètre ($Df_0 > 1$), la covariance décroît rapidement pour le cas $i = i'$ et tend rapidement vers zéro pour le cas $i \neq i'$. $\langle a_i a_{i' \neq i} \rangle$ semblent tendre plus rapidement vers zéro que ne décroît $\langle a_i a_i \rangle$.

Pour s'en convaincre, sur la figure 4.4, nous avons tracé le rapport entre la somme des éléments non–diagonaux sur la somme des éléments diagonaux de la matrice formée par la covariance $\langle a_i a_{i'} \rangle$ pour i et i' allant de 2 à N avec $N = 10$ et 15.

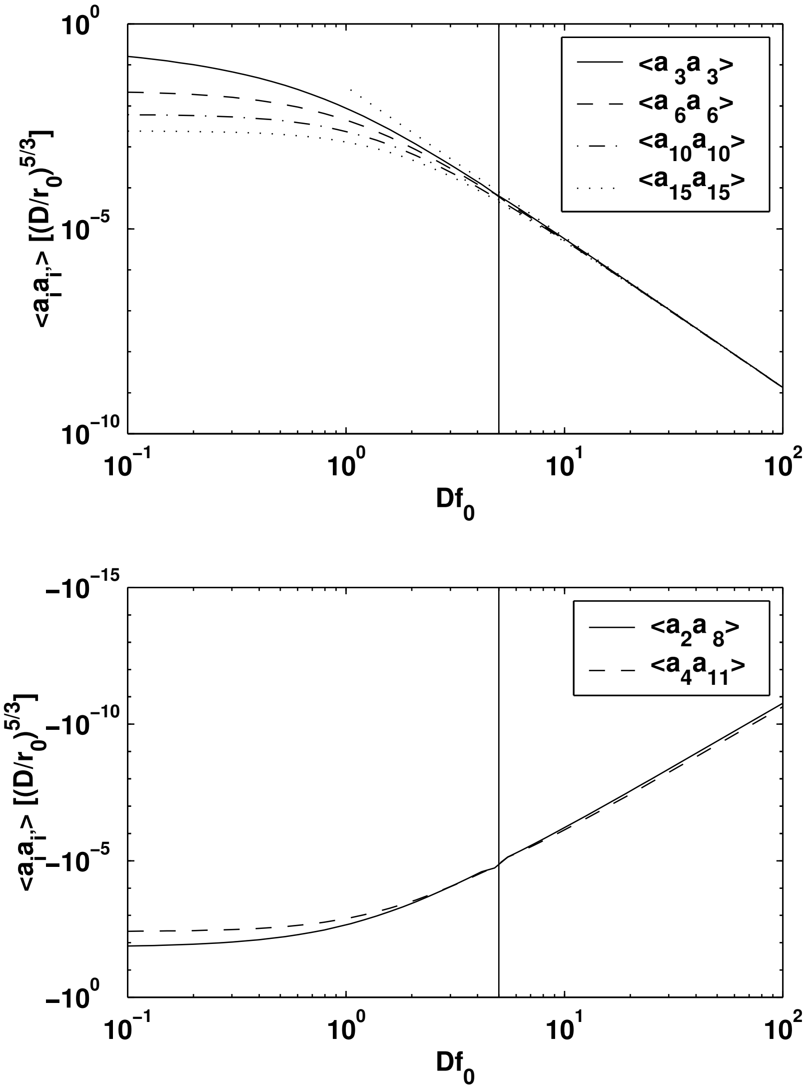


FIG. 4.3 – Variation des coefficients $\langle a_i a_{i'} \rangle$ en fonction de Df_0. Ces coefficients sont exprimés en unité de $(Dr_0)^{5/3}$. Le graphique supérieur donne la valeur de la variance pour $i = i' = 3, 6, 10$ et 15 et le graphique inférieur donne la valeur de la covariance pour $i = 2$ et $i' = 8$ et $i = 4$ et $i' = 11$. $\langle a_i a_{i'} \rangle$ est calculée avec les expression de l'Eq.(4.17) pour $Df_0 < 5$ et de l'Eq.(4.34) pour $Df_0 > 5$.

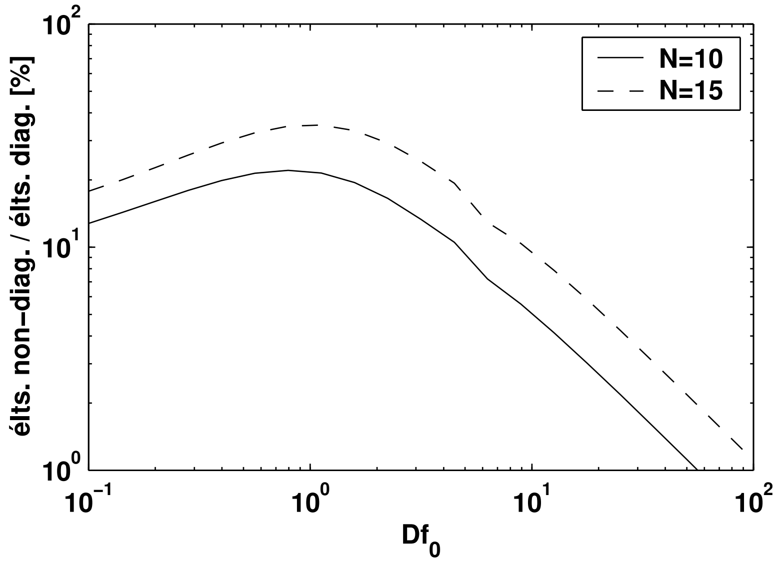


FIG. 4.4 – Rapport de la somme de la valeur absolue des éléments non–diagonaux de la matrice de covariance sur la somme des éléments diagonaux de la matrice de covariance pour N=10 et 15.

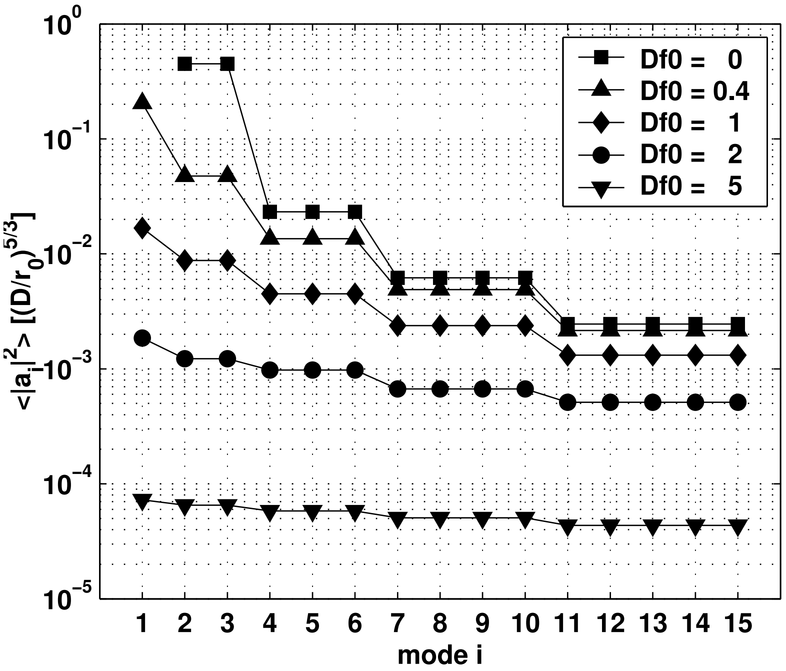


FIG. 4.5 – Variation des coefficients $\langle |a_i|^2 \rangle$ en fonction du mode i pour différentes valeurs de Df_0.

Tant que $Df_0 < 1$, ce rapport croît, ce qui signifie que le poids des éléments non–diagonaux par rapport aux éléments diagonaux augmente lorsque la valeur de l'échelle externe diminue par rapport au diamètre. Mais dès que $Df_0 > 1$, la tendance s'inverse et comme le laissait prévoir la figure précédente, $\langle a_i a_{i' \neq i} \rangle$ tend plus rapidement vers zéro que ne décroît $\langle a_i a_i \rangle$.

Sur la figure 4.5, nous avons représenté la variation de la variance $\langle |a_i|^2 \rangle$ en fonction du mode i et pour différentes valeurs du produit Df_0. Ces courbes mettent en évidence l'effet de l'échelle externe qui est d'équi–répartir l'énergie entre les différents modes de Zernike lorsque $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ décroît par rapport au diamètre. En effet, pour le modèle de Kolmogorov ($Df_0 = 0$), les modes de bas ordres et en particulier le tip–tilt ($i = 2, 3$) concentre la presque totalité de l'énergie. A mesure que le rapport Df_0 croît, l'énergie dans les bas ordres diminue relativement à celle présente dans les ordres plus élevés. Cependant, l'énergie totale n'est pas conservée, elle décroît aussi avec l'augmentation de Df_0. On notera que le coefficient du mode piston $\langle |a_1|^2 \rangle$ a une valeur finie lorsque l'échelle externe est finie.

4.3 Variance des fluctuations de phase résiduelle

Pour un système d'OA qui reconstruit la phase avec N polynômes de Zernike, la phase résiduelle $\varphi_\varepsilon(\vec{r})$ après correction est

$$\varphi_\varepsilon(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) - \sum_{i=1}^{N} a_i Z_i \left(\frac{\vec{r}}{R} \right). \tag{4.44}$$

4.3.1 Variance des fluctuations de phase résiduelle en un point de la pupille

En présence de l'échelle externe de cohérence spatiale

L'erreur à la correction nous est donnée par la variance de $\varphi_\varepsilon(\vec{r})$

$$\begin{aligned}
\langle |\varphi_\varepsilon(\vec{r})|^2 \rangle &= \left\langle \left| \varphi(\vec{r}) - \sum_{i=1}^{N} a_i Z_i \left(\frac{\vec{r}}{R} \right) \right|^2 \right\rangle \\
&= \langle |\varphi(\vec{r})|^2 \rangle + \left\langle \left| \sum_{i=1}^{N} a_i Z_i \left(\frac{\vec{r}}{R} \right) \right|^2 \right\rangle - 2 \sum_{i=1}^{N} Z_i \left(\frac{\vec{r}}{R} \right) \langle \varphi(\vec{r}) a_i \rangle \\
&= \langle |\varphi(\vec{r})|^2 \rangle + \sum_{i=1}^{N} \sum_{i'=1}^{N} \langle a_i a_{i'} \rangle Z_i \left(\frac{\vec{r}}{R} \right) Z_{i'} \left(\frac{\vec{r}}{R} \right) \\
&\quad -2 \sum_{i=1}^{N} Z_i \left(\frac{\vec{r}}{R} \right) C_{\varphi a_i}(\vec{r})
\end{aligned} \tag{4.45}$$

avec

$$C_{\varphi a_i}(\vec{r}) = \langle \varphi(\vec{r}) a_i \rangle . \tag{4.46}$$

En introduisant, l'Eq. (4.13) dans l'Eq. (4.46), $C_{\varphi a_i}$ se réécrit

$$C_{\varphi a_i}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}\vec{r}_1 \Pi\left(\frac{r_1}{R}\right) Z_i\left(\frac{r_1}{R}, \gamma_1\right) \langle \varphi(\vec{r}_1)\, \varphi(\vec{r}) \rangle , \tag{4.47}$$

où l'on reconnaît la covariance des fluctuations de phase $\langle \varphi(\vec{r}_1)\, \varphi(\vec{r}) \rangle$ qui est reliée au spectre des fluctuations de phase par le théorème de Wiener–Khintchine,

$$\langle \varphi(\vec{r}_1)\, \varphi(\vec{r}) \rangle = \int \mathrm{d}\vec{f} W_\varphi(f) \exp\left[2j\pi \vec{f} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)\right] . \tag{4.48}$$

En introduisant l'Eq.(4.48) dans l'Eq.(4.47), il vient

$$\begin{aligned} C_{\varphi a_i}(\vec{r}) &= \int \mathrm{d}\vec{f} W_\varphi(f) \exp\left(2j\pi \vec{f} \cdot \vec{r}\right) \\ &\quad \times \int \mathrm{d}\vec{r}_1 \Pi\left(\frac{r_1}{R}\right) Z_i\left(\frac{r_1}{R}, \gamma_1\right) \exp\left(-2j\pi \vec{f} \cdot \vec{r}_1\right) . \end{aligned} \tag{4.49}$$

La dernière intégrale correspond à la définition de la transformée de Fourier des polynômes de Zernike $Q_i(f, \phi)$, Eq.(4.9). On obtient finalement

$$C_{\varphi a_i}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}\vec{f} W_\varphi(f) Q_i(f, \phi) \exp(2j\pi \vec{f} \cdot \vec{r}). \tag{4.50}$$

En résolvant l'intégration suivant ϕ à l'aide de l'Eq.(1.31), on obtient :

$$\left.\begin{array}{ll} C_{\varphi a_{i\, pair}}(\vec{r}) & = \\ C_{\varphi a_{i\, impair}}(\vec{r}) & = \\ C_{\varphi a_i}(\vec{r}) & = \end{array}\right\} \quad \frac{2\sqrt{n+1}}{R} I_{n,m}(r) \times \left\{ \begin{array}{cc} \left.\begin{array}{c} (-1)^{\frac{n-m}{2}} \sqrt{2} \cos(m\theta) \\ (-1)^{\frac{n-m}{2}} \sqrt{2} \sin(m\theta) \end{array}\right\} & m \neq 0 \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & m = 0 \end{array}\right. \tag{4.51}$$

avec

$$I_{n,m}(r) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}f W_\varphi(f) J_{n+1}(2\pi f R) J_m(2\pi f r). \tag{4.52}$$

et $W_\varphi(f) = \frac{\Gamma^2(11/6)}{2\pi^{11/3}} \left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6} r_0^{-5/3} \left(f^2 + f_0^2\right)^{-11/6}$. En effectuant le changement de variable $f \to x/(2\pi R)$, $I_{n,m}(r)$ devient

$$\begin{aligned} I_{n,m}(r) &= 0.0229 r_0^{-5/3} \frac{(\pi R)^{8/3}}{2} (\pi R f_0)^{-11/3} \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} \left[1 + \left(\frac{x}{2\pi R f_0}\right)^2\right]^{-11/6} J_{n+1}(x) J_m\left(\frac{r}{R} x\right) . \end{aligned} \tag{4.53}$$

Cette intégrale est identique à celle de l'Eq.(2.58) pour $\mu = 1$, $p = 11/6$, $\alpha = n+1$, $\beta = m$, $a = 2\pi R f_0$ et $b = R/r$. Puisque $R > r$, nous retenons la seconde double série comme solution à l'intégrale ce qui impose $\pi R f_0 < 1$ et $\pi r f_0 < 1$ c'est–à–dire que R et r soient plus petits que l'échelle externe. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
I_{n,m}(r) &= 0.0229 r_0^{-5/3} \frac{(\pi R)^{8/3}}{2\Gamma(11/6)} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{(-1)^p}{p!} \\
&\quad \times \left\{ \Gamma \left[\begin{array}{c} l+p+\frac{n+m}{2}+1, \frac{5}{6}-l-p-\frac{n+m}{2} \\ l+n+2, p+m+1 \end{array} \right] \right. \\
&\quad \times (\pi R f_0)^{2l+n-5/3} (\pi r f_0)^{2p+m} \\
&\quad + \Gamma \left[\begin{array}{c} p-l+\frac{n+m}{2}-\frac{5}{6}, l+\frac{11}{6} \\ l-p+\frac{n-m}{2}+\frac{17}{6}, p+m+1 \end{array} \right] \\
&\quad \left. \times (\pi R f_0)^{2l} \left(\frac{r}{R}\right)^{2p+m} \right\}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Lorsque $\pi R f_0$ tend vers l'infini, c'est–à–dire lorsque l'échelle externe devient beaucoup plus petite que le rayon de la pupille, l'Eq.(4.53) s'écrit au premier ordre

$$\begin{aligned}
I_{n,m}(r) = 0.0229 r_0^{-5/3} \frac{(\pi R)^{8/3}}{2} (\pi R f_0)^{-11/3} \\
\times \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} J_{n+1}(x) J_m\left(\frac{r}{R} x\right).
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Cette dernière intégrale est identique à celle de l'Eq.(2.41) pour $\mu = 0$, $\alpha = n+1$, $\beta = m$ et $b = R/r > 1$. On obtient

$$\begin{aligned}
I_{n,m}(r) = 0.0229 r_0^{-5/3} \frac{(\pi R)^{8/3}}{4} (\pi R f_0)^{-11/3} \\
\times \left(\frac{r}{R}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma \left[\begin{array}{c} k+\frac{n+m+1}{2} \\ \frac{n-m}{2}+\frac{3}{2}-k, m+1+k \end{array} \right] \left(\frac{r}{R}\right)^{2k}.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Pour $f_0 = 0$, le terme $(\pi R f_0)^{2l+n-5/3} (\pi r f_0)^{2p+m}$ s'annule pour $n+m > 5/3$ $\forall l, p$ et le terme $(\pi R f_0)^{2p}$ est nul $\forall l > 0$. $n+m$ étant supérieur à $5/3$ pour tous les modes sauf le mode piston, $I_{n,m}(r)$ devient pour $i > 1$

$$I_{n,m}(r) = 0.0229 r_0^{-5/3} \frac{(\pi R)^{8/3}}{2} \tag{4.57}$$

$$\times \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \Gamma \left[\begin{array}{c} p+\frac{n+m}{2}-\frac{5}{6} \\ -p+\frac{n-m}{2}+\frac{17}{6}, p+m+1 \end{array} \right] \left(\frac{r}{R}\right)^{2p+m} \tag{4.58}$$

qui s'écrit aussi comme une fonction hypergéométrique généralisée

$$\begin{aligned} I_{n,m}(r) &= 0.0229 r_0^{-5/3} \frac{(\pi R)^{8/3}}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^m \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{n+m}{2} - \frac{5}{6} \\ \frac{n-m}{2} + \frac{17}{6}, m+1 \end{array} \right] \\ & \times {}_2F_1 \left[\begin{array}{c} \frac{n+m}{2} - \frac{5}{6}, \frac{m-n}{2} - \frac{11}{6}; \left(\frac{r}{R}\right)^2 \\ m+1 \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Pour $f_0 = 0$ et $i = 1$, $I_{n,m}(r)$ est infini.

Pour une échelle externe de cohérence spatiale infinie

Pour le modèle de Von Kármán , $\left\langle |\varphi_\varepsilon(\vec{r})|^2 \right\rangle$ se calcule aisément puisque $\left\langle |\varphi_\varepsilon(\vec{r})|^2 \right\rangle$, $\langle a_i a_{i'} \rangle$ et $C_{\varphi a_i}(\vec{r})$ sont respectivement donnés par les Eqs. (3.21), (4.17) et (4.51) quelles que soient les valeurs de i et i'. Pour le modèle de Kolmogorov, $\left\langle |\varphi_\varepsilon(\vec{r})|^2 \right\rangle$, $\left\langle |a_1|^2 \right\rangle$ et $C_{\varphi a_1}(\vec{r})$ sont infinis, le calcul direct ne peut donc pas s'effectuer. Il faut réécrire l'Eq. (4.45) de la façon suivante

$$\begin{aligned} \left\langle |\varphi_\varepsilon(\vec{r})|^2 \right\rangle &= \left\langle |\varphi(\vec{r})|^2 \right\rangle_P \\ & + \sum_{i=1}^{N} \sum_{i'=1+\delta_{i1}}^{N} \langle a_i a_{i'} \rangle Z_i \left(\frac{\vec{r}}{R}\right) Z_{i'} \left(\frac{\vec{r}}{R}\right) \\ & -2 \sum_{i=2}^{N} Z_i \left(\frac{\vec{r}}{R}\right) C_{\varphi a_i}(\vec{r}) \end{aligned} \tag{4.60}$$

où $\left\langle |\varphi(\vec{r})|^2 \right\rangle_P$ regroupe les termes représentant le piston avec $\left\langle |\varphi(\vec{r})|^2 \right\rangle$:

$$\begin{aligned} \left\langle |\varphi(\vec{r})|^2 \right\rangle_P &= \left\langle |\varphi(\vec{r})|^2 \right\rangle + \left\langle |a_1|^2 \right\rangle - 2C_{\varphi a_1}(\vec{r}) \\ &= \left\langle |a_1^*|^2 \right\rangle - 2C^*_{\varphi a_1}(\vec{r}) \end{aligned} \tag{4.61}$$

avec

$$\left\langle |a_1^*|^2 \right\rangle = \left\langle |a_1|^2 \right\rangle - \left\langle |\varphi(\vec{r})|^2 \right\rangle, \tag{4.62}$$

$$C^*_{\varphi a_1}(\vec{r}) = C_{\varphi a_1}(\vec{r}) - \left\langle |\varphi(\vec{r})|^2 \right\rangle. \tag{4.63}$$

Calcul de $\langle |a_1^*|^2 \rangle$

$$\begin{aligned} \left\langle |a_1^*|^2 \right\rangle &= 2\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{d}f \, f \, W_\varphi(f) \left\{ \left[\frac{2J_1(2\pi R f)}{2\pi R f} \right]^2 - 1 \right\} \\ &= \frac{4\Gamma^2(11/6)}{\pi} \left[\frac{24}{5} \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \right]^{5/6} \left(\frac{2R}{r_0}\right)^{5/3} \\ & \times \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^{-11/3} \left[J_1^2(x) - \frac{x^2}{4} \right] \end{aligned} \tag{4.64}$$

avec $x = 2\pi R f$. L'intégrale est aussi égale à

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^{-11/3} \left\{ \left[J_1(x) - \frac{x}{2} \right]^2 + x \left[J_1(x) - \frac{x}{2} \right] \right\}. \tag{4.65}$$

Avec les transformées de Mellin des Eqs.(1.36) et (1.34), on trouve

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{array}{c} -\frac{5}{6}, \frac{7}{3} \\ \frac{23}{6}, \frac{17}{6} \end{array} \right]. \tag{4.66}$$

On obtient

$$\left\langle |a_1^*|^2 \right\rangle = \frac{512}{2057} \frac{\Gamma\left[-\frac{5}{6}, \frac{7}{3}\right]}{\pi^{3/2}} \left[\frac{24}{5} \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \right]^{5/6} \left(\frac{2R}{r_0} \right)^{5/3} = -1,0324 \left(\frac{2R}{r_0} \right)^{5/3}. \tag{4.67}$$

Calcul de $C^*_{\varphi a_1}(\vec{r})$

$$\begin{aligned} C^*_{\varphi a_1}(\vec{r}) &= 2\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{d}f\, f\, W_\varphi(f) \left[\frac{2J_1(2\pi R f)}{2\pi R f} J_0(2\pi r f) - 1 \right] \\ &= 2^{5/3} \Gamma^2(11/6) \left[\frac{24}{5} \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \right]^{5/6} \left(\frac{2R}{r_0} \right)^{5/3} \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^{-8/3} \left[J_1(x) J_0\left(\frac{r}{R} x\right) - \frac{x}{2} \right] \end{aligned} \tag{4.68}$$

avec $x = 2\pi R f$. En utilisant l'égalité,

$$\begin{aligned} &\left[J_1(x) J_0\left(\frac{r}{R} x\right) - \frac{x}{2} \right] = \\ &\quad \left[J_1(x) - \frac{x}{2} \right] \left[J_0\left(\frac{r}{R} x\right) - 1 \right] + \frac{x}{2} \left[J_0\left(\frac{r}{R} x\right) - 1 \right] + \left[J_1(x) - \frac{x}{2} \right], \end{aligned} \tag{4.69}$$

l'intégrale précédente est la somme des intégrales

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^{-8/3} \left[J_1(x) - \frac{x}{2} \right] \left[J_0\left(\frac{r}{R} x\right) - 1 \right], \tag{4.70}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^{-5/3} \left[J_0\left(\frac{r}{R} x\right) - 1 \right] \tag{4.71}$$

et

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} x^{-8/3} \left[J_1(x) - \frac{x}{2} \right]. \tag{4.72}$$

En appliquant le théorème de convolution de la transformation de Mellin (cf. section 1.1.2) à I_1 et la transformation de Mellin de l'Eq.(1.34) aux fonctions de Bessel $J_1(x) - x/2$ et $J_0(rx/R) - 1$, I_1 devient l'intégrale dans le plan complexe

$$I_1 = \frac{2^{-14/3}}{2j\pi} \int_{\eta-\infty}^{\eta+\infty} \mathrm{d}s \Gamma \left[\begin{array}{c} \frac{s*}{2} - \frac{5}{6}, -\frac{s*}{2} \\ \frac{17}{6} - \frac{s*}{2}, 1 + \frac{s*}{2} \end{array} \right] \left(\frac{R}{r} \right)^{-s}, \quad 0 < \mathrm{Re}(s) < \frac{5}{3}. \tag{4.73}$$

Après le changement de variable $s \to 2s$, I_1 s'écrit

$$I_1 = \frac{2^{-11/3}}{2j\pi} \int_{\eta-\infty}^{\eta+\infty} \mathrm{d}s \Gamma \left[\begin{array}{c} s* - \frac{5}{6}, -s* \\ \frac{17}{6} - s*, 1 + s* \end{array} \right] \left(\frac{R}{r} \right)^{-2s}, \quad 0 < \mathrm{Re}(s) < \frac{5}{3}. \tag{4.74}$$

Le paramètre Δ définit par l'Eq.(2.10) étant égal à 0 et R/r étant supérieur à 1, d'après les résultats du tableau 2.1, les pôles sont $s = n$ et $s = 5/6$. On obtient

$$I_1 = 2^{-11/3} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma \left[\begin{array}{c} n - \frac{5}{6} \\ \frac{17}{6} - n, 1 + n \end{array} \right] \left(\frac{r}{R} \right)^{2n} - \Gamma \left[\begin{array}{c} -\frac{5}{6} \\ \frac{11}{6} \end{array} \right] \left(\frac{r}{R} \right)^{5/3} \right\} \tag{4.75}$$

La sommation débute à l'indice $n = 1$ pour respecter les propriétés des transformées de Mellin des fonctions de Bessel auxquelles a été retranché le premier terme de leur développement en série (cf. section 1.2).

Les intégrales I_2 et I_3 sont déduites de la transformation de Mellin donnée par l'Eq.(1.34),

$$I_2 = 2^{-11/3} \left(\frac{r}{R} \right)^{5/3} \Gamma \left[\begin{array}{c} -\frac{5}{6} \\ \frac{11}{6} \end{array} \right] \tag{4.76}$$

et

$$I_3 = 2^{-11/3} \Gamma \left[\begin{array}{c} -\frac{5}{6} \\ \frac{17}{6} \end{array} \right]. \tag{4.77}$$

Finalement, $C^*_{\varphi a_1}(\vec{r})$ est égale à

$$\begin{aligned} C^*_{\varphi a_1}(\vec{r}) &= \frac{\Gamma^2(11/6)}{4} \left[\frac{24}{5} \Gamma \left(\frac{6}{5} \right) \right]^{5/6} \left(\frac{2R}{r_0} \right)^{5/3} \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma \left[\begin{array}{c} m - \frac{5}{6} \\ \frac{17}{6} - m, 1 + m \end{array} \right] \left(\frac{r}{R} \right)^{2m} \\ &= \frac{\Gamma^2(11/6)}{4} \left[\frac{24}{5} \Gamma \left(\frac{6}{5} \right) \right]^{5/6} \left(\frac{2R}{r_0} \right)^{5/3} \\ &\quad \times \Gamma \left[\begin{array}{c} -\frac{5}{6} \\ \frac{17}{6} \end{array} \right] {}_2F_1 \left[\begin{array}{c} -\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}; \left(\frac{r}{R} \right)^2 \\ 1 \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{4.78}$$

$\left\langle|\varphi_\varepsilon(\vec{r})|^2\right\rangle$ est un estimateur de l'erreur à la reconstruction en un point de la pupille. Il permet d'établir une carte d'erreur sur la pupille. Habituellement, l'erreur à la reconstruction est quantifiée par la valeur moyenne sur la pupille Δ_N de $\left\langle|\varphi_\varepsilon(\vec{r})|^2\right\rangle$ qui se calcule plus aisément. Cependant, les grandeurs qui interviennent dans le calcul de $\left\langle|\varphi_\varepsilon(\vec{r})|^2\right\rangle$ ne sont pas seulement utile ici mais sont importantes pour le calcul d'autres quantités plus connues comme Δ_N et le rapport de Strehl. $\left\langle|a_i|^2\right\rangle$ sert pour le calcul de Δ_N et $\langle a_i a_{i'}\rangle$ et $C^*_{\varphi a_i}(\vec{r})$ sont utiles pour le calcul du rapport de Strehl.

4.3.2 Variance des fluctuations de phase résiduelle en moyenne sur la pupille

La valeur moyenne Δ_N sur la pupille de $\left\langle|\varphi_\varepsilon(\vec{r})|^2\right\rangle$ s'écrit [113]

$$\begin{aligned}\Delta_N &= \int \mathrm{d}\vec{r}\,\Pi\left(\frac{r}{R}\right)\left\langle|\varphi_\varepsilon(\vec{r})|^2\right\rangle \\ &= \left\langle|\varphi(\vec{r})|^2\right\rangle - \sum_{i=1}^{N}\left\langle|a_i|^2\right\rangle \end{aligned} \tag{4.79}$$

En introduisant les relations des Eqs.(3.21) et (4.38) dans l'Eq.(4.79), on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_N &= \frac{\Gamma(11/6)\Gamma(5/6)}{2\pi^{8/3}}\left[\frac{24}{5}\Gamma(6/5)\right]^{5/6}(r_0\mathbf{f_0})^{-5/3} \\ &-\frac{2\Gamma(11/6)}{\pi^{3/2}}\left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6}\left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3}\sum_{i=1}^{N}(n_i+1) \\ &\times\left\{\Gamma\left[\begin{array}{c}-\frac{5}{6}+n_i,\frac{7}{3},\frac{11}{6}\\ \frac{23}{6}+n_i,\frac{17}{6}\end{array}\right]{}_2F_3\left[\begin{array}{c}\frac{11}{6},\frac{7}{3};(\pi D f_0)^2\\ \frac{23}{6}+n_i,\frac{17}{6},\frac{11}{6}-n_i\end{array}\right]\right. \\ &+(\pi D f_0)^{2n_i-5/3}\Gamma\left[\begin{array}{c}1+n_i,\frac{5}{6}-n_i,\frac{3}{2}+n_i\\ 3+2n_i,2+n_i\end{array}\right] \\ &\left.\times\,{}_2F_3\left[\begin{array}{c}1+n_i,\frac{3}{2}+n_i;(\pi D f_0)^2\\ 3+2n_i,2+n_i,\frac{1}{6}+n_i\end{array}\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.80}$$

qui s'écrit encore

$$\begin{aligned}\Delta_N &= -\frac{2\Gamma(11/6)}{\pi^{3/2}}\left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6}\left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3}\sum_{i=1}^{N}(n_i+1) \\ &\times\left\{\Gamma\left[\begin{array}{c}-\frac{5}{6}+n_i,\frac{7}{3},\frac{11}{6}\\ \frac{23}{6}+n_i,\frac{17}{6}\end{array}\right]{}_2F_3\left[\begin{array}{c}\frac{11}{6},\frac{7}{3};(\pi D f_0)^2\\ \frac{23}{6}+n_i,\frac{17}{6},\frac{11}{6}-n_i\end{array}\right]\right. \\ &+(\pi D f_0)^{2n_i-5/3}\Gamma\left[\begin{array}{c}1+n_i,\frac{5}{6}-n_i,\frac{3}{2}+n_i\\ 3+2n_i,2+n_i\end{array}\right] \\ &\left.\times\left[{}_2F_3\left[\begin{array}{c}1+n_i,\frac{3}{2}+n_i;(\pi D f_0)^2\\ 3+2n_i,2+n_i,\frac{1}{6}+n_i\end{array}\right]-\delta_{i1}\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.81}$$

où δ_{i1} est le symbole de Kronecker.

Lorsque f_0 tend vers 0, $\langle |a_i|^2 \rangle$ est donné par l'Eq.(4.35). Δ_N s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta_N &\simeq \frac{\Gamma(11/6)\Gamma(5/6)}{2\pi^{8/3}}\left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6}(r_0\mathbf{f_0})^{-5/3} \\ &\quad -N\frac{2\Gamma^2(11/6)}{\pi^{14/3}}\left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6}\left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3}(Df_0)^{-11/3} \\ &\simeq \frac{2\Gamma^2(11/6)}{\pi^{14/3}}\left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6}\left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3}(Df_0)^{-11/3}\left[\frac{3}{10}(\pi Df_0)^2 - N\right]\end{aligned} \tag{4.82}$$

Pour une échelle externe infinie, Δ_N s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta_N &= \left[\langle |\varphi(\vec{r})|^2 \rangle - \langle |a_1|^2 \rangle\right] - \sum_{i=2}^{N}\langle |a_i|^2 \rangle \\ &= -\langle |a_1^*|^2 \rangle - \sum_{i=2}^{N}\langle |a_i|^2 \rangle .\end{aligned} \tag{4.83}$$

Les expressions de $\langle |\varphi(\vec{r})|^2 \rangle$ et $\langle |a_i|^2 \rangle$ sont respectivement données par les Eqs.(4.67) et (4.40). Ces relations introduites dans l'Eq.(4.83) donnent

$$\Delta_N = -\frac{2\Gamma^2(11/6)}{\pi^{3/2}}\left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]^{5/6}\left(\frac{2R}{r_0}\right)^{5/3}\sum_{i=1}^{N}(n_i+1)\Gamma\left[\begin{array}{c} -\frac{5}{6}+n_i, \frac{7}{3} \\ \frac{23}{6}+n_i, \frac{17}{6}\end{array}\right]. \tag{4.84}$$

Le même résultat est obtenue en posant $f_0 = 0$ dans l'Eq. (4.81).

4.3.3 Discussion

La figure 4.6 montre l'évolution de Δ_N déduite de l'Eq.(4.81) en fonction de Df_0 pour $N = 3$, 6, 11 et 15. Δ_N décroît très rapidement dès que $Df_0 > 1$ et tend vers la valeur limite donnée par l'Eq.(4.82) pour $Df_0 \to 0$.

Les figures 4.7, 4.8 et 4.9 présentent respectivement les lignes de niveaux de Δ_N en fonction du nombre de modes corrigés N et de l'échelle externe pour $D = 8$, 30 et 100 m. L'axe supérieur des abscisses indique la valeur de Δ_N en unité de $(D/r_0)^{5/3}$ pour une échelle externe infinie et pour N égale à la valeur correspondante sur l'axe inférieur des abscisses. Il y a une ligne de niveau correspondante à chaque valeur de Δ_N calculée pour $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ infinie. Ainsi, chaque ligne de niveau tend vers sa valeur limite sur l'axe supérieur des abscisses lorsque la valeur de l'échelle externe augmente.

A partir de cet abaque, il est possible de déterminer quelle est la valeur maximale de l'échelle externe pour laquelle le nombre de modes à corriger N peut être réduit d'une unité sans accroître l'erreur résiduelle Δ_N sachant que la valeur supérieure de Δ_N est imposée par la valeur donnée par l'axe supérieur des abscisses. Il en résulte la ligne brisée formée par les carrés noirs.

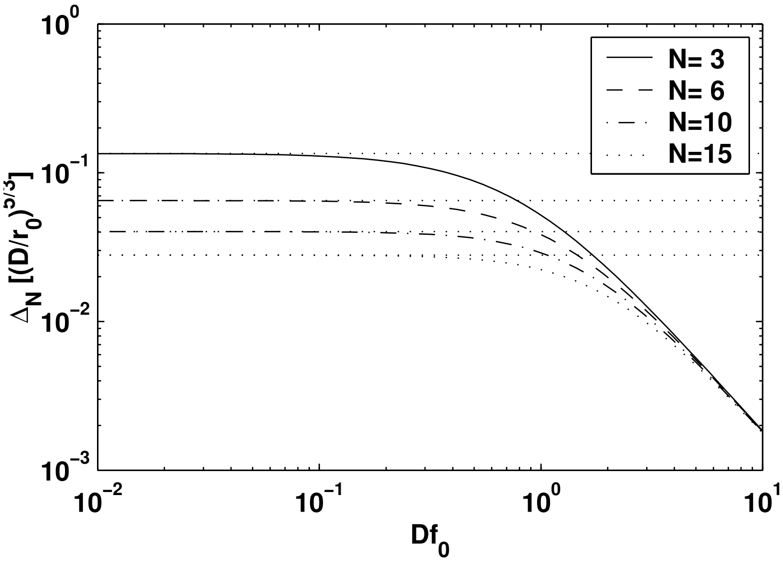


FIG. 4.6 – Variation de Δ_N en fonction de Df_0 pour $N = 3$, 6, 11 et 15. Δ_N est exprimé en unité de $(D/r_0)^{5/3}$. Les courbes pointillées donnent la valeur de Δ_N pour une échelle externe infinie.

Chaque segment décroissant de cette courbe correspond à un degré radial n. Δ_N ne dépendant que de n, lorsque N croît tandis que n reste identique, la même quantité est soustraite à la variance totale des fluctuations de phase, d'ou cette décroissance presque linéaire mais dès que n augmente la valeur de Δ_N associée est plus faible que la précédente (cf. Fig.(4.5)) ce qui relaxe la valeur de $\mathfrak{L}_\mathbf{0}$.

Avec des valeurs de l'échelle externe inférieures à celles imposées par la courbe brisée, le nombre de modes N peut être réduit de plusieurs unités tout en respectant la condition sur Δ_N. Cette réduction de N sera d'autant plus importante que le diamètre D sera grand.

4.4 Caractérisation par le rapport de Strehl de la phase partiellement corrigée d'une onde plane

4.4.1 Calcul du rapport de Strehl

Dans le chapitre précédent, on a vu que le rapport de Strehl était défini par (Eq.(3.50))

$$SR = \frac{\langle F(0) \rangle}{\langle F_T(0) \rangle} \tag{4.85}$$

$\langle F(0) \rangle$ est le pouvoir de résolution du système télescope+atmosphère et $\langle F_T(0) \rangle$ le pou-

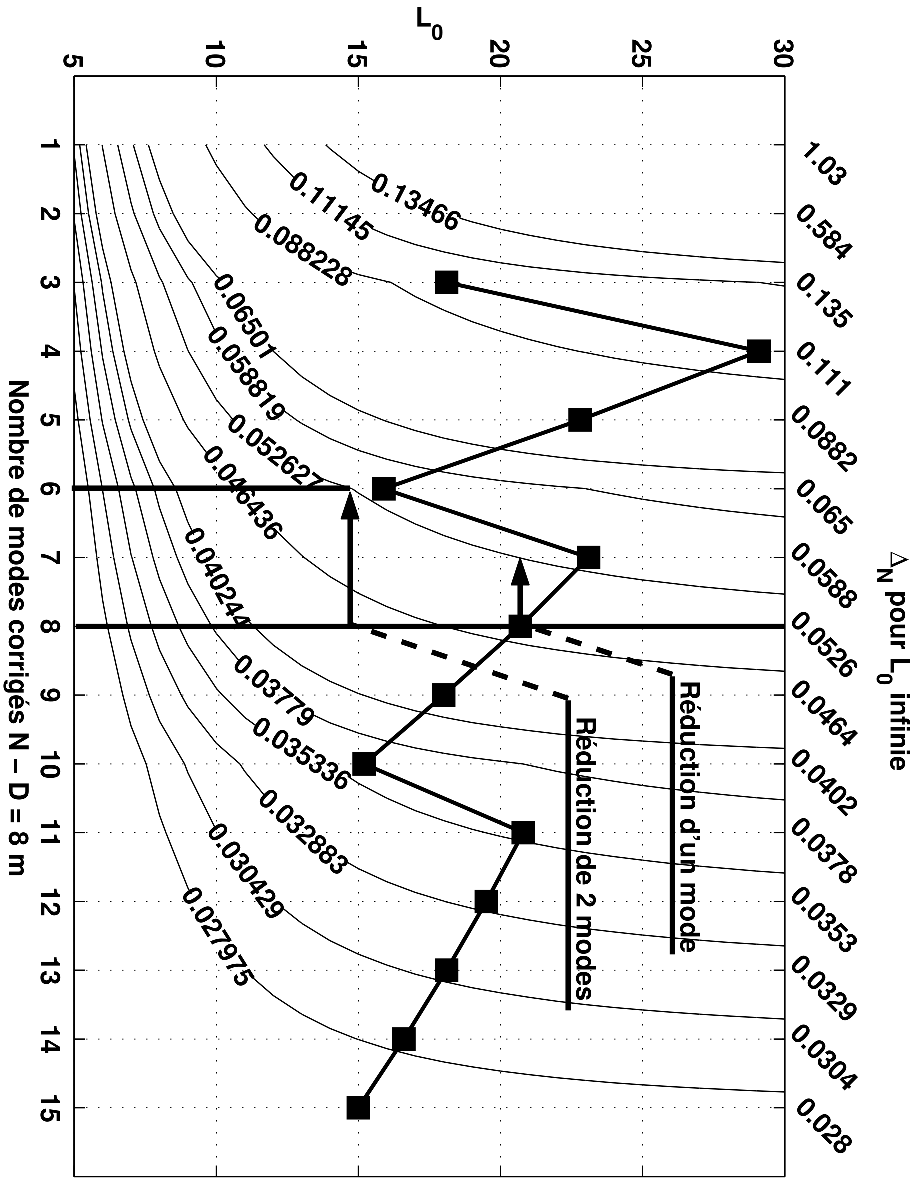


FIG. 4.7 – Lignes de niveaux de Δ_N en fonction du nombre de modes corrigés N et de l'échelle externe $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ pour $D = 8$ m. L'axe supérieur des abscisses indique la valeur de Δ_N en unité de $(D/r_0)^{5/3}$ pour une échelle externe infinie et pour la valeur de N portée sur l'axe inférieur des abscisses.

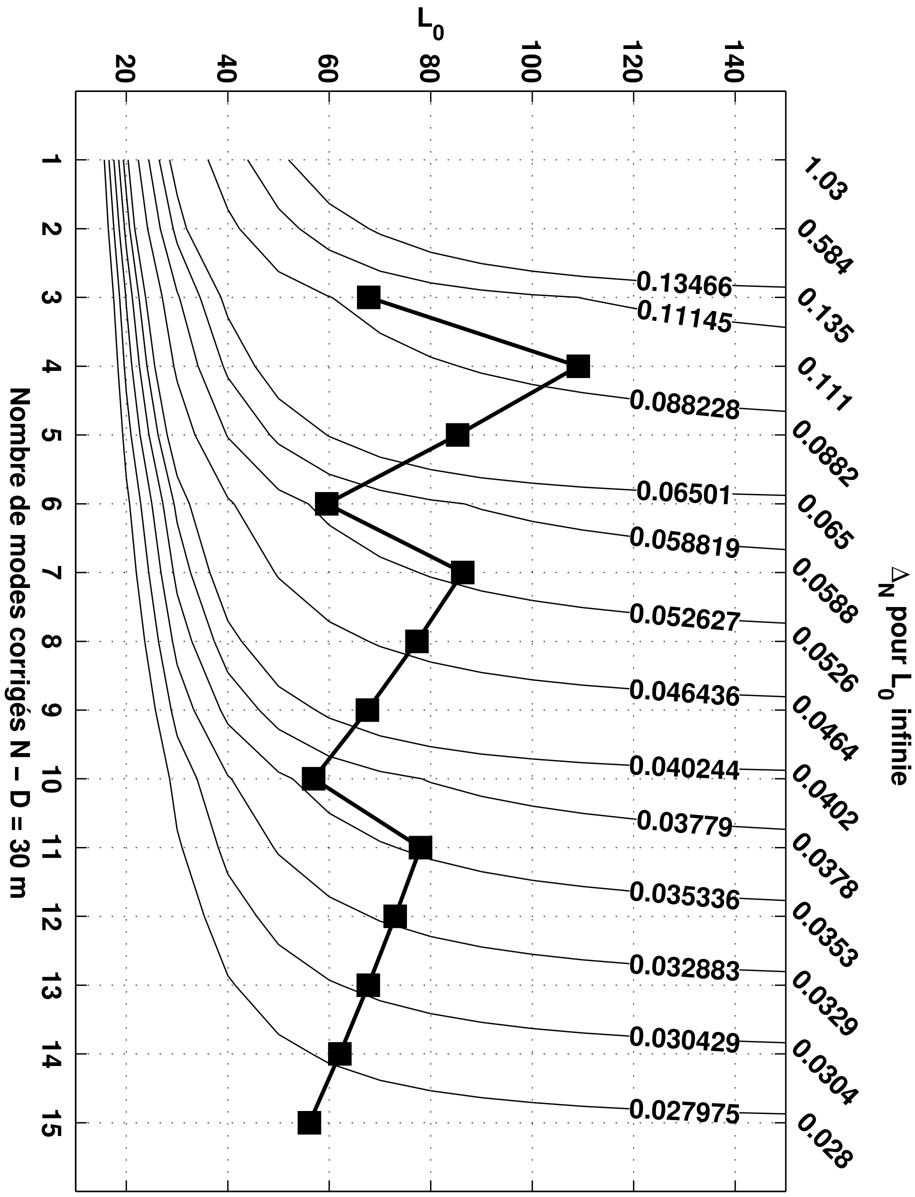


FIG. 4.8 – Lignes de niveaux de Δ_N en fonction du nombre de modes corrigés N et de l'échelle externe $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ pour $D = 30$ m. L'axe supérieur des abscisses indique la valeur de Δ_N en unité de $(D/r_0)^{5/3}$ pour une échelle externe infinie et pour la valeur de N portée sur l'axe inférieur des abscisses.

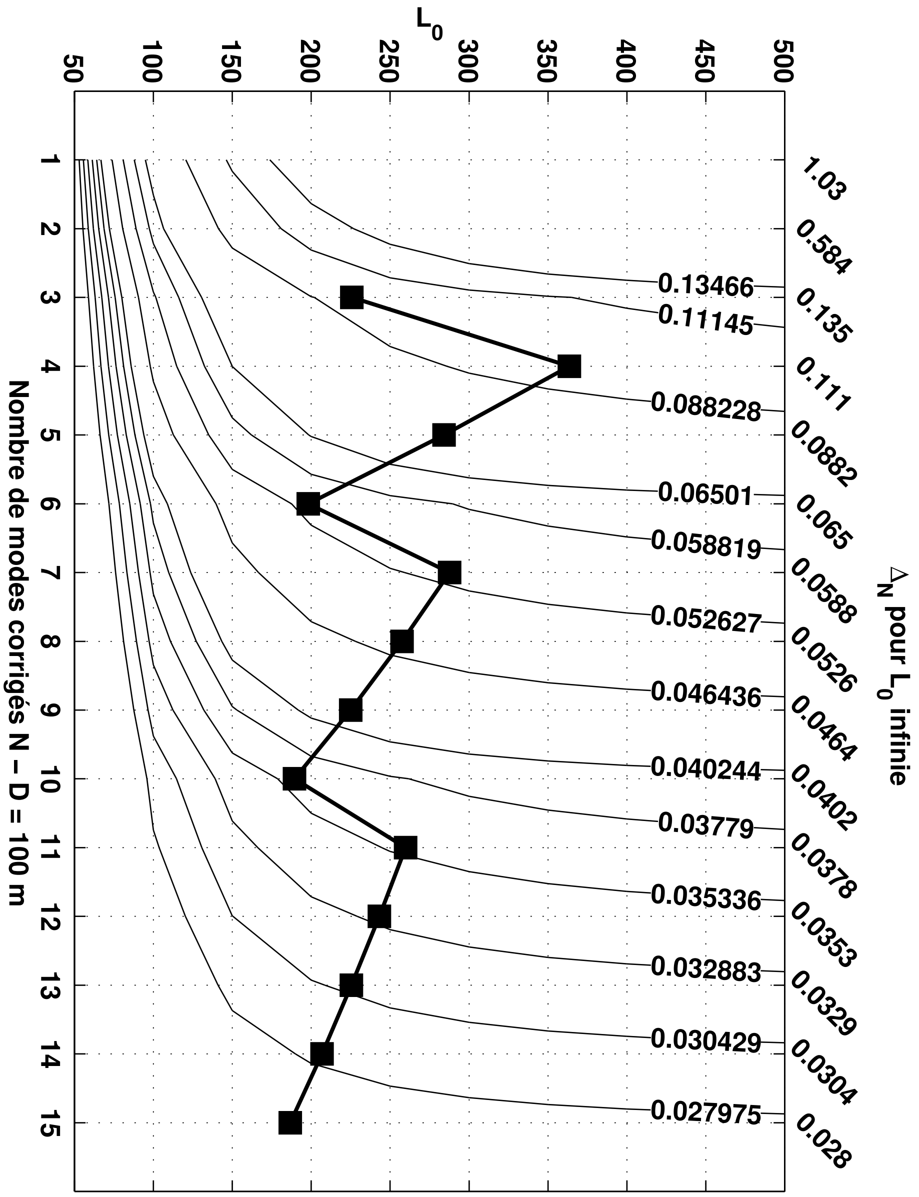


FIG. 4.9 – Lignes de niveaux de Δ_N en fonction du nombre de modes corrigés N et de l'échelle externe $\mathcal{L}_0$ pour $D = 100$ m. L'axe supérieur des abscisses indique la valeur de Δ_N en unité de $(D/r_0)^{5/3}$ pour une échelle externe infinie et pour la valeur de N portée sur l'axe inférieur des abscisses.

voir de résolution de l'instrument sans atmosphère,

$$\langle F_T(0)\rangle = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D}{\lambda}\right)^2, \tag{4.86}$$

pour un télescope sans obstruction centrale et

$$\langle F(0)\rangle = \int \mathrm{d}\vec{f}\langle\widehat{F}\left(\vec{f}\right)\rangle. \tag{4.87}$$

où $\langle\widehat{F}\left(\vec{f}\right)\rangle$ est la fonction de transfert optique du système télescope+atmosphère. Elle s'écrit (Eqs. (3.32) et (3.33))

$$\left\langle\widehat{F}\left(\vec{f}\right)\right\rangle = \int \mathrm{d}\vec{u}C_\Psi\left(\lambda\vec{u},\lambda(\vec{u}+\vec{f})\right)\Pi\left(\lambda\vec{u}\right)\overline{\Pi\left(\lambda(\vec{u}+\vec{f})\right)} \tag{4.88}$$

où $C_\Psi\left(\lambda\vec{u},\lambda(\vec{u}+\vec{f})\right)$ est la fonction de cohérence de l'onde dont la phase partiellement corrigée est donnée par l'Eq. (4.44) :

$$\begin{aligned} C_\Psi\left(\lambda\vec{u},\lambda(\vec{u}+\vec{f})\right) &= \left\langle\exp\left\{j\left[\varphi_\varepsilon\left(\lambda\vec{u}\right)-\varphi_\varepsilon\left(\lambda(\vec{u}+\vec{f})\right)\right]\right\}\right\rangle \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}D_{\varphi_\varepsilon}\left(\lambda\vec{u},\lambda\left(\vec{u}+\vec{f}\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.89}$$

$D_{\varphi_\varepsilon}(\lambda\vec{u},\lambda(\vec{u}+\vec{f}))$ est la fonction de structure des fluctuations de la phase résiduelle. En effectuant les changements de variables $\lambda D\vec{f}=\vec{\rho}$ et $\lambda D\vec{u}=\vec{r}-\vec{\rho}/2$ dans l'Eq.(4.88), on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle\widehat{F}\left(\frac{\vec{\rho}}{\lambda D}\right)\right\rangle &= \frac{4}{(\lambda D)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{r_\theta}\mathrm{d}rC_\Psi\left(\frac{\vec{r}-\vec{\rho}/2}{D},\frac{\vec{r}+\vec{\rho}/2}{D}\right) \\ &\quad\times\Pi\left(\frac{\vec{r}-\vec{\rho}/2}{D}\right)\Pi\left(\frac{\vec{r}+\vec{\rho}/2}{D}\right) \end{aligned} \tag{4.90}$$

avec

$$r_\theta = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{D}\cos\left(\theta-\gamma\right)-\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{D}\right)^2\sin^2\left(\theta-\gamma\right)}. \tag{4.91}$$

En deux point $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ de la pupille du télescope, $D_{\varphi_\varepsilon}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ est donnée par

$$\begin{aligned} D_{\varphi_\varepsilon}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) &= \left\langle\left|\varphi_\varepsilon(\vec{r}_1)-\varphi_\varepsilon(\vec{r}_2)\right|^2\right\rangle \qquad (4.92) \\ &= \left\langle\left|\left[\varphi_\varepsilon(\vec{r}_1)-\sum_{i=1}^{N}a_iZ_i\left(\frac{\vec{r}_1}{R}\right)\right]\right.\right. \\ &\qquad\left.\left.-\left[\varphi_\varepsilon(\vec{r}_2)-\sum_{i=1}^{N}a_iZ_i\left(\frac{\vec{r}_2}{R}\right)\right]\right|^2\right\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= D_\varphi\left(|\vec{r}_2-\vec{r}_1|\right)\\
&\quad +\sum_{i=1}^{N}\sum_{i'=1}^{N}\langle a_i a_{i'}\rangle\\
&\quad\times\left[Z_i\left(\frac{\vec{r}_1}{R}\right)-Z_i\left(\frac{\vec{r}_2}{R}\right)\right]\left[Z_{i'}\left(\frac{\vec{r}_1}{R}\right)-Z_{i'}\left(\frac{\vec{r}_2}{R}\right)\right]\\
&\quad -2\sum_{i=1}^{N}\left[Z_i\left(\frac{\vec{r}_1}{R}\right)-Z_i\left(\frac{\vec{r}_2}{R}\right)\right]\left[C_{\varphi a_i}\left(\vec{r}_1\right)-C_{\varphi a_i}\left(\vec{r}_2\right)\right].
\end{aligned}
$$

Cette fonction de structure n'est pas stationnaire, comme la fonction de structure des fluctuations de phase, elle dépend à la fois de $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ [71, 165].

En introduisant l'Eq.(4.92) dans l'Eq.(4.90) et en effectuant l'intégration, on obtient la fonction de transfert $\langle\widehat{F}(\vec{f})\rangle$. Puis, $\langle\widehat{F}(\vec{f})\rangle$ est introduite dans l'Eq.(4.87) pour obtenir $\langle F(0)\rangle$ qui est à son tour injectée dans l'Eq.(4.85) ce qui nous donne finalement le rapport de Strehl. C'est en suivant cette procédure que nous calculons, l'expression exacte du rapport de Strehl.

Cependant, pour exprimer le rapport de Strehl, il est aussi possible d'utiliser des formules approchées. Une limite inférieure au rapport de Strehl est donnée par l'approximation de Maréchal [96, 25, 94]

$$SR \geq \left(1-\frac{\Delta_N}{2}\right)^2. \tag{4.93}$$

Pour des faibles variations des fluctuations de phase résiduelle, la corrélation $\langle\varphi_\varepsilon(\vec{r}_1)\varphi_\varepsilon(\vec{r}_2)\rangle$ décroît rapidement et la fonction de structure peut s'approximer par la somme des variance $\left\langle|\varphi_\varepsilon(\vec{r}_1)|^2\right\rangle+\left\langle|\varphi_\varepsilon(\vec{r}_2)|^2\right\rangle$. De plus, dans le cadre de l'hypothèse des faibles perturbations, la valeur de ces variances en un point de la pupille est peu différente de la valeur moyenne de la variance sur la pupille Δ_N. Dans ce cas, $D_{\varphi_\varepsilon}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ devient

$$D_{\varphi_\varepsilon}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\approx 2\Delta_N. \tag{4.94}$$

Le rapport de Strehl s'écrit alors

$$SR\approx\exp\left(-\Delta_N\right). \tag{4.95}$$

Pour les très faibles perturbations, les Eqs. (4.93) et (4.95) donnent le même résultat $1-\Delta_N$ pourvu que l'on néglige les termes quadratiques et supérieurs.

4.4.2 Discussion

La figure 4.10 montre l'évolution du rapport de Strehl SR en fonction du produit Df_0 pour $N=3$, 6 et 10. Le rapport D/r_0 est fixé à 10. Les courbes en trait pointillé indiquent la valeur de SR pour une échelle externe infinie. En trait tireté est tracé le rapport de Strehl déduit de l'Eq.(4.95).

La valeur exacte du SR est tracée pour $Df_0 < 1.5$. Cette valeur limite résulte d'un compromis entre précision et rapidité de convergence des séries. Le SR est obtenu en suivant la procédure précédemment décrite. Les valeurs de $\langle a_i a_{i'} \rangle$ et $C_{\varphi a_i}$ dans l'expression de la fonction de structure des fluctuations de phase résiduelle Eq.(4.92) sont déduites des Eqs.(4.17) et (4.54), respectivement.

Pour $Df_0 > 1.5$, $\langle a_i a_{i'} \rangle$ et $C_{\varphi a_i}$ sont estimées avec leurs expressions asymptotiques c'est–à–dire avec les Eqs.(4.34) et (4.56), respectivement. Si la valeur du SR est pertinente pour $N = 3$ dans ce cas, elle n'est réellement valable pour les modes plus élevés que pour les plus grandes valeurs de Df_0.

Cependant, on remarque aussi que pour $Df_0 > 1$, l'expression du SR donnée par l'Eq.(4.95) est suffisante puisqu'elle se situe dans le prolongement des courbes déduites de la formule exacte et elle tend vers la bonne valeur asymptotique. Cette expression fournit aussi une excellente approximation de SR sur tout le domaine de variation de Df_0 pour les plus hauts ordres ($N = 10,\ 15,\ \ldots$).

Pour conclure, le SR peut être déduit de l'expression de l'Eq.(4.95) pour toutes les valeurs de Df_0 et pour les plus hauts ordres. Pour les bas ordres, le SR est obtenu avec la même formule pour $Df_0 > 1$ et avec l'expression exacte pour $Df_0 < 1$. De plus, on remarque, que pour tous les ordres, le SR tend vers la même valeur asymptotiquement.

La figure 4.11 reproduit de la figure précédente le SR déduit, pour $N = 6,\ 10,\ 15$, de l'Eq.(4.95) (traits en pointillé) et pour $N = 6$ et 10 et $Df_0 < 1.5$, de la formule exacte. Elle présente l'évolution du SR en fonction du produit Df_0 pour des corrections à l'ordre 6, 10 et 15 mais sans correction du tip–tilt. Pratiquement, cela signifie que les sommes de l'Eq.(4.92) débutent à l'indice 4 au lieu de 1. Ces rapports de Strehl ont été calculés avec les expressions exactes de $\langle a_i a_{i'} \rangle$ et $C_{\varphi a_i}$ pour $Df_0 < 1.5$ et leurs expressions asymptotiques pour $Df_0 > 1.5$.

De même que précédemment, l'expression asymptotique du SR n'est pertinente que pour les bas ordres et devient quantitativement insuffisante pour les ordres plus élevés. Mais pour notre étude qualitative, elle est assez précise pour montrer que lorsque $Df_0 > 1$, une correction qui ne prend pas en compte le tip–tilt ne dégrade pas de façon significative le rapport de Strehl. Ceci est d'autant plus vrai que l'ordre de correction est élevé ou que le produit Df_0 est grand.

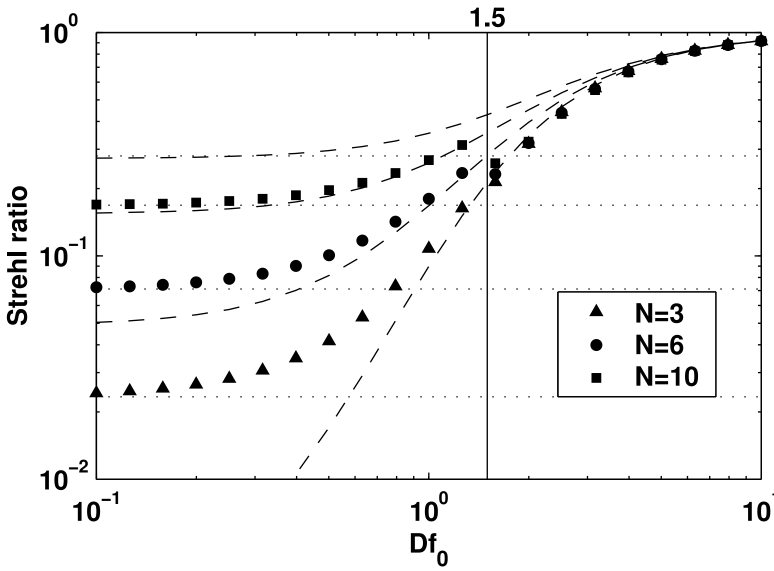


FIG. 4.10 – Variation du rapport de Strehl en fonction de Df_0 pour $N = 3$, 6 et 10. Le rapport D/r_0 est égal à 10. Les courbes en pointillé donnent la valeur du SR pour une échelle externe infinie. Les courbes en tiret donnent la valeur du SR déduite de l'Eq.(4.95). Les courbes tracées avec les marqueurs ▲, • et ■ donnent les valeurs du SR pour $N = 3$, 6 et 10 respectivement et sont calculées avec les expressions exactes de $\langle a_i a_{i'} \rangle$ et $C_{\varphi a_i}$ pour $Df_0 < 1,5$ et leurs expressions asymptotiques pour $Df_0 > 1,5$.

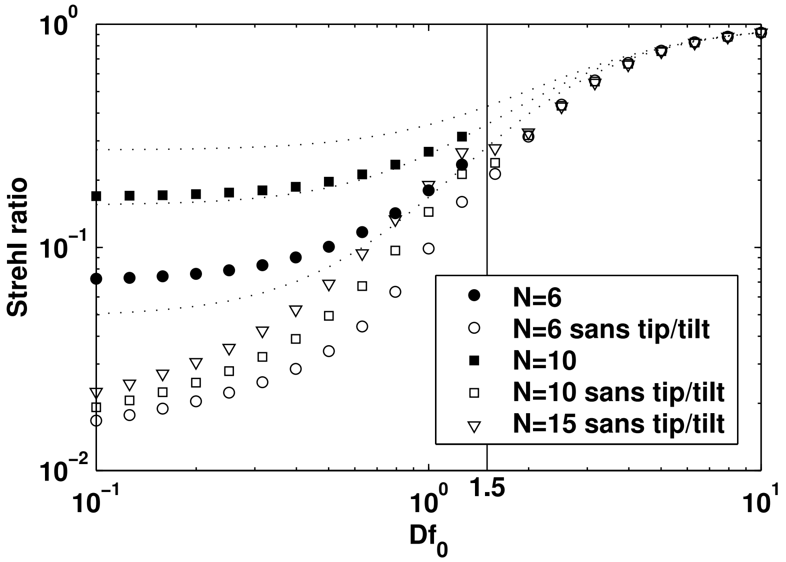


FIG. 4.11 – Variation du rapport de Strehl en fonction de Df_0 pour $N = 6$, 10 et 15. Le rapport D/r_0 est égal à 10. Les courbes en pointillé donnent la valeur du SR déduite de l'Eq.(4.95) pour $N = 6$, 10 et 15 de bas en haut. Les marqueurs pleins indiquent que le tip/tilt est corrigé tandis que les marqueurs vides indiquent que la correction débute au mode $N = 4$. Les courbes tracées avec les marqueurs donnent les valeurs du SR pour $N = 6$, 10 et 15 et sont calculées avec les expressions exactes de $\langle a_i a_{i'} \rangle$ et $C_{\varphi a_i}$ pour $Df_0 < 1,5$ et leurs expressions asymptotiques pour $Df_0 > 1,5$.

Chapitre 5

Effets de l'échelle externe sur les performances optimales d'un interféromètre à grands télescopes et à longues bases

L'interférométrie avec des télescopes indépendants a vu le jour en 1973 avec l'expérience I2T d'Antoine Labeyrie [80] qui su profiter des progrès technologiques de l'époque pour adapter les idées des grands précurseurs qu'ont été Fizeau et Michelson [148]. Depuis, de constants efforts ont été entrepris pour obtenir des franges d'interférence avec des télescopes de plus en plus grands et de plus en plus éloignés. En France, à I2T a succédé GI2T[1] [109, 17] qui pendant longtemps a été le seul interféromètre européen. Le second interféromètre européen est l'interféromètre anglais COAST[2] [13]. En Australie, l'interféromètre d'amplitude SUSI[3] [47] a été construit après une série d'expériences avec l'interféromètre à intensité NSII[4]. Contrairement à GI2T, COAST et SUSI ne sont pas équipés de télescopes mais de sidérostats. Aux Etat–Unis, différents interféromètres ont été construits avec des sidérostats : ISI[5], IOTA[6], NPOI[7] [5] et PTI[8] [33].

L'interféromètre CHARA[9] est le dernier avoir été mis en service. Il est actuellement le plus grand réseau de télescopes optiques avec ses six télescopes de 1,8 m. Les derniers projets d'interférométrie ont pour objectifs d'allier la haute résolution angulaire à un grand pouvoir collecteur en faisant interférer la lumière provenant de télescopes de la

[1]Grand Interféromètre à 2 Télescopes
[2]Cambridge Optical Aperture Synthesis Telescope
[3]Sydney University Stellar Interferometer
[4]Narrabri Stellar Intensity Interferometer
[5]Infrared Spatial Interferometer
[6]Infrared-Optical Telescope Array
[7]Navy Prototype Optical Interferometer
[8]Palomar Testbed Interferometer
[9]Center for High Angular Resolution Astronomy

classe des 8–10 mètres. Parmi ces projets, citons le VLTI[10] qui ambitionne de former des franges d'interférence avec une combinaison des quatre télescopes de 8m du VLT et un ensemble de télescopes de taille plus modeste. Sur le même principe il y a le projet du "Keck Interferometer" qui utilisera le potentiel des télescopes segmentés de 10m de diamètre Keck I et Keck II associés à de plus petits télescopes. Citons enfin le projet LBT[11] qui consiste à faire de l'interférométrie avec deux télescopes de 8m sur la même monture.

Pour obtenir des franges d'interférence, les chemins optiques entre le recombinateur et les différents télescopes doivent tous être de la même longueur. Ceci est obtenu soit en déplaçant le recombinateur, soit par le biais de lignes à retard. Même si cette opération d'égalisation des chemins optiques était parfaitement maîtrisée, il resterait une différence de marche (ddm) aléatoire due aux fluctuations aléatoires de l'indice de réfraction atmosphérique.

Depuis la création des premiers interféromètres à grandes bases, il a été fait état d'une atténuation de la valeur de la ddm par rapport aux variations prévues dans le modèle de Kolmogorov [99, 19, 29, 28, 46]. Cette atténuation peut s'interpréter comme un effet de l'échelle externe. En effet, pour un modèle prenant en compte la valeur finie de $\mathcal{L}_0$, la ddm atteint un régime de saturation lorsque la valeur de $\mathcal{L}_0$ est plus grande que la dimension de la base B alors que, pour le modèle de Kolmogorov ($\mathcal{L}_0$ infinie), la ddm croit selon la loi de puissance $B^{5/6}$.

L'article suivant traite du problème de la différence de marche atmosphérique entre deux télescopes de diamètre D et séparés de la distance B en tenant compte des effets de l'échelle externe $\mathcal{L}_0$. Cette ddm est proportionnelle à la racine carrée de la fonction de structure des fluctuations de phase en moyenne sur la pupille dont l'expression intégrale est

$$\mathcal{D}_\varphi(B) = 4\pi \times 0,0229 r_0^{-5/3} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}f\, f \left(f^2 + f_0^2\right)^{-11/6} \left[1 - J_0(2\pi B f)\right] \left[\frac{2J_1(\pi D f)}{\pi D f}\right]^2 . \quad (5.1)$$

En effectuant le changement de variable $f \to x/(\pi D)$, l'Eq.(5.1) se réécrit

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\varphi(B) &= \frac{16}{\pi} \times 0,0229 \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} (Df_0)^{-11/3} \\ &\times \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} \left[1 + \left(\frac{x}{\pi D f_0}\right)^2\right]^{-11/6} \left[1 - J_0\left(\frac{2B}{D}x\right)\right] J_1^2(x). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Cette intégrale a été calculée en utilisant les méthodes exposées dans la première partie. Trois solutions ont été obtenues selon les valeurs relatives du diamètre D, de la base B et de la fréquence spatiale f_0 associée à l'échelle externe :

[10] Very Large Telescope Interferometer
[11] Large Binocular Telescope

1. $D < B < \dfrac{1}{\pi f_0}$,

2. $D < \dfrac{1}{\pi f_0} < B$,

3. $\dfrac{1}{\pi f_0} < D < B$.

La solution pour le premier cas est déduite de l'Eq.(2.113) où $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\mu = 0$ et $p = 11/6$. Une légère différence existe par rapport à l'Eq.(2.113) car dans l'Eq.(5.2) il a été retranché à la fonction $J_0\left(\frac{2B}{D}x\right)$ le premier terme de son développement en série. La transformée de Mellin de cette nouvelle fonction est donnée par l'expression de l'Eq.(1.34). Il en résulte que la somme sur n dans le premier terme de l'Eq.(5.11) débute à 1.

La solution du second cas est un exemple de résultat que l'on peut obtenir par la méthode de “steepest–descent”. Ce cas correspond aux pôles 1 dans le tableau 2.3 qui montre qu'il s'agit d'une série asymptotique. Par conséquent, la solution est la somme des résidus pour la paire de pôle 1 et des termes de “steepest–descent”. L'expression des résidus est donnée par l'Eq.(2.89). Ils sont nuls quelles que soient les valeurs de n et m. La solution est donc égale à la somme des termes de “steepest–descent”. Cette méthode n'a pas été explicitée dans le première partie car son usage est exceptionnel dans cette thèse et que très souvent la valeur des termes de “steepest–descent” est négligeable par rapport aux résidus. Cependant, dans ce cas particulier, c'est la seule méthode permettant d'obtenir la solution.

Pour le dernier cas, l'Eq.(5.2) s'écrit au premier ordre

$$\mathcal{D}_\varphi(B) \simeq \frac{16}{\pi} \times 0,0229 \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} (Df_0)^{-11/3} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} \left[1 - J_0\left(\frac{2B}{D}x\right)\right] J_1^2(x). \tag{5.3}$$

La solution à cette intégrale est obtenue en appliquant le théorème de la convolution multiplicative et en utilisant les transformées de Mellin des Eqs.(1.34) et (1.27). Le premier terme de la série obtenue donne la solution.

Pour compenser la ddm aléatoire, les interféromètres sont souvent munis d'un compensateur de ddm atmosphérique qui est constitué de deux éléments principaux : un senseur de franges et une ligne à retard rapide. L'expression de la ddm en sortie d'un tel système a été calculée en tenant compte de deux sources d'erreurs possible que sont le temps d'exposition du senseur de frange et le retard à la commande de la ligne à retard rapide.

L'effet de l'échelle externe sur chacune de ces grandeurs est étudié. Une analyse statistique de la ddm attendue avec le VLT a aussi été réalisée à l'aide des expressions établies avec les mesures de $\mathcal{L}_0$ effectuées par le GSM à l'observatoire du Paranal (VLT).

5.1 Article paru dans le proceeding du Colloque Interferometry in Optical Astronomy (SPIE, 4006) à Munich (Allemagne, Mars 2000)

Titre : Measurements of the wave–front outer scale at Paranal : influence of this parameter in interferometry

Auteurs : R. Conan[1], A. Ziad[1], J. Borgnino[1], F.Martin[1] and A. Tokovinin[2]

Résumé : The Generalized Seeing Monitor (GSM) has undertaken a campaign of measurement of the optical turbulent parameters : the Fried's parameter, the outer scale ($\mathcal{L}_0$) and the isoplanatic patch, at Paranal, the site of the VLT, in December 1998. The principle aim of this mission was to measure $\mathcal{L}_0$ values at Paranal. In a first part, we present the GSM, the results of the mission and particularly the statistics of $\mathcal{L}_0$. In a second part, we emphasize the effect of $\mathcal{L}_0$ on the optical path difference (OPD) values for the co–phasing of an interferometer. We derive the exact formulation of the OPD for the Von Kármán model and we give the expected OPD at Paranal with $\mathcal{L}_0$ values measured by the GSM. We give also the expression of the residual OPD at the output of a fringe tracker system as a function of $\mathcal{L}_0$, of the exposure time of the fringe sensor and of the frequency of the closed–loop of the system.

5.1.1 Introduction

The GSM instrument

The Generalized Seeing Monitor (GSM)[105, 153] is a monitor of the optical turbulent parameters (OTP) : the Fried's parameter r_0, the spatial coherence outer scale of the wave front $\mathcal{L}_0$ and the isoplanatic patch θ_0. All are calculated for a wavelength $\lambda = 500$ nm. It measures one component of the gradient of the wave front (the angle–of–arrival AA fluctuations) simultaneously at four points. It is constituted of four telescopes (Ref. [105] fig.1) with 10 cm of pupil diameter. Two of them are supported by the same equatorial mount in order to be able to work in a differential mode to measure the r_0 without beeing corrupted by vibrations. Both telescopes on the same mount are 0.25 m apart, 1 m in the East direction is the second one and the third one is 0.8 m in the South direction. This layout gives 6 baselines and so 6 cross–correlations used for the determination of the $\mathcal{L}_0$. A standard automatic acquisition of the AA progresses as it follows : first, with an exposure time of 5 ms, the AA are measured every 5 ms during 2 mn, then, the acquisition process is interrupted for 2 mn of data processing leading to the computation of the r_0, $\mathcal{L}_0$ and θ_0 and the acquisition process is re–launched.

[1]U.M.R. 6525 Astrophysique, Université de Nice–Sophia–Antipolis, F–06108 Nice Cedex 2, France
[2]Sternberg Astronomical Institute, Universitestsky prosp., 13, 119899 Moscow, Russia

The campaign of measurement at Paranal

The measurements started up the November 27 1998 and ceased the December 20 1998. The campaign is divided in two sets of continuous nights from the November 27 to the December 08 and from the 14 to the 20 of December. The median values, over the whole mission, of the seeing ε, $\mathcal{L}_0$ and θ_0 are respectively 0.9 arcsec, 22 m and 1.9 arcsecond. Due to the particularly clear nights at Paranal without any clouds, this campaign was the most fruitful of all the GSM missions with an average of 6h30mn of effective measurement time per night and a total of 1884 measurements of each parameter shared among the 19 nights of the missions.

The outer scale measured at Paranal

The $\mathcal{L}_0$ values are deduced from the spatial covariances of the AA fluctuations. The layout of the four telescopes of the GSM permits the computation of 6 covariances. These covariances are normalized by the structure function computed from the AA measured by both telescopes on the differential mount. This structure function is not affected by vibrations. The covariances are also not affected by vibrations, wind shake effects or tracking errors since it has been checked that the noises from each telescope are uncorrelated. Therefore, the normalized covariances depend only on the $\mathcal{L}_0$. The best fit of the experimental normalized covariances by theoretical ones gives the $\mathcal{L}_0$ value. The theoretical normalized covariances have been computed from the spectrum of the wave–front phase fluctuations for the Von Kármán [11, 62, 93, 118] model :

$$W_\varphi(f) = 0.0229 r_0^{-5/3} \left(f^2 + \left(\frac{1}{\mathcal{L}_0} \right)^2 \right)^{-11/6}, \tag{5.4}$$

where f is the spatial frequency and $0.0229 = \dfrac{\Gamma^2(11/6)}{2\pi^{11/3}} \left[\dfrac{24}{5} \Gamma(6/5) \right]^{5/6}$.

The statistic of the $\mathcal{L}_0$ at Paranal[102] contains 1884 values. It follows a log–normal distribution (Fig. 5.1) with a mean value equal to 24 m and 68% of the values of the distribution of $\log(\mathcal{L}_0)$ lies between 15 m and 37 m. One has noted, for several nights, some periods of great stability of $\mathcal{L}_0$ values associated with low values (typically around 15 m) leading to the lowest night average values ever measured by the GSM. Two nights gave uncommon high values ($\sim$ 45 m). During these nights the wind blown from the South which is a non–typical situation for the Paranal. As already mentioned during previous campaigns of the GSM[104, 105, 153, 152], bursts of $\mathcal{L}_0$ values were noticed. And as for other sites, no effective correlation between r_0 and $\mathcal{L}_0$ values has been underscored.

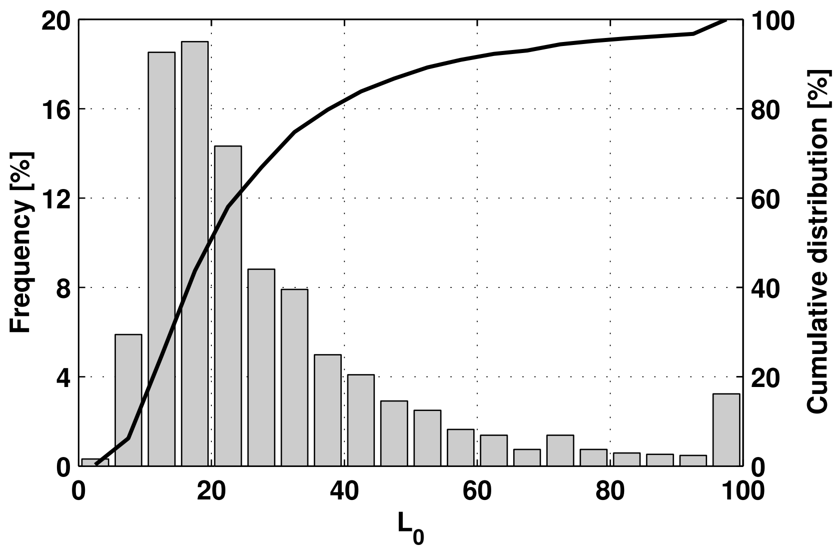


FIG. 5.1 – Histogram of $\mathcal{L}_0$ values. The $\mathcal{L}_0$ values larger than 100 m are not taken into account in the histogram since they represent less than 3% of the whole data.

5.1.2 Co–phasing and wave–front outer scale

The Optical Path Difference

Theory The randomly fluctuations of the optical path difference (OPD), due to the propagation of light beams into the atmosphere, between two telescopes separated by a distance B is a fundamental limitations to performances of interferometers.

The variance of the OPD between two points is given by

$$\sigma_{OPD}^2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \langle|\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}+\vec{B})|^2\rangle, \tag{5.5}$$

where $\varphi(\vec{r})$ is the phase of the wave front and $\vec{B}$ is the baseline vector. Since $\langle|\varphi(\vec{r})-\varphi(\vec{r}+\vec{B})|^2\rangle$ is the well–known structure function of phase fluctuations $\mathcal{D}_\varphi(\vec{B})$ (or differential phase variance), the standard deviation of the OPD is

$$\sigma_{OPD} = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\mathcal{D}_\varphi(\vec{B})}. \tag{5.6}$$

In the rest of the paper, all the calculus will be made for $\mathcal{D}_\varphi(\vec{B})$ as Eq. (5.6) gives straightforwardly the corresponding σ_{OPD}. In the framework of the Kolmogorov model[57, 122] , the expression of $\mathcal{D}_\varphi(\vec{B})$ is

$$\mathcal{D}_\varphi(B) = 6.88\left(\frac{B}{r_0}\right)^{5/3}. \tag{5.7}$$

But Equation (5.7) diverges when B tends towards infinity as it is valid only in the inertial range, i.e. when B values lie between the inner and outer scale values (from few centimeters to few tens of meters).

For large baselines (close to or larger than the outer scale), $\mathcal{D}_\varphi(\vec{B})$ is expected to saturate, which leads to an attenuation of the spectrum of the phase fluctuations in low frequencies regime as for the spectrum of the Von Kármán model.

$\mathcal{D}_\varphi(\vec{B})$ is deduced from the phase spectrum $W_\varphi(f)$ by the relation

$$\mathcal{D}_\varphi(B) = 4\pi \int_0^{+\infty} f W_\varphi(f)[1 - J_0(2\pi B f)] df. \tag{5.8}$$

Putting Equation (5.4) into Equation (5.8) and performing the integration give the following expression of the structure function[149, 128, 157] in the framework of the Von Kármán model

$$\mathcal{D}_\varphi(B) = 0.1717 \left(\frac{r_0}{\mathcal{L}_0}\right)^{-5/3} \left[1.0056 - \left(\frac{2\pi B}{\mathcal{L}_0}\right)^{5/6} K_{5/6}\left(\frac{2\pi B}{\mathcal{L}_0}\right)\right] \tag{5.9}$$

where $K_{5/6}(x)$ is the Mac–Donald function, $0.1717 = \frac{2^{1/6}\Gamma(11/6)}{\pi^{8/3}} \left[\frac{24}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\right]$ and $1.0056 = \frac{\Gamma(5/6)}{2^{1/6}}$. Equation (5.9) is valid for all baselines larger than the inner scale and when the pupil diameter D of the telescope is much smaller than the correlation scale of the phase fluctuations.

Taking into account the finite size D of the pupil permits to rewrite Equation (5.8) in a more general formulation

$$\mathcal{D}_\varphi(B) = 4\pi \int_0^{+\infty} f W_\varphi(f)[1 - J_0(2\pi B f)] \left[\frac{2J_1(\pi D f)}{\pi D f}\right]^2 df. \tag{5.10}$$

The solution of Equation (5.10) can be divided into three regimes :

1. $D < B < \frac{\mathcal{L}_0}{\pi}$,
2. $D < \frac{\mathcal{L}_0}{\pi} < B$,
3. $\frac{\mathcal{L}_0}{\pi} < D < B$.

For cases 1 and 2, Equation (5.10) is expanded in series[137] with fast convergence and for the last case, an asymptotic solution is given.

1. $D < B < \frac{\mathcal{L}_0}{\pi}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\varphi(B) &= -\frac{4\Gamma(11/6)}{\pi^{3/2}} \left[\frac{24}{5}\Gamma(6/5)\right]^{5/6} \left(\frac{B}{r_0}\right)^{5/3} \times \\ & \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^m}{m!} (\pi B f_0)^{2n-5/3} (\pi D f_0)^{2m} \right. \\ & \times\Gamma \left[\begin{array}{l} n+m+1, 5/6-n-m, m+3/2 \\ n+1, m+3, m+2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{(-1)^m}{m!}(\pi B f_0)^{2n}\left(\frac{D}{B}\right)^{2m} \\
&\times\Gamma\left[\begin{array}{l} m-n-5/6, n+11/6, m+3/2 \\ n-m+11/6, m+3, m+2 \end{array}\right]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

2. $D < \frac{\mathcal{L}_0}{\pi} < B$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_\varphi(B) \;=\;& \frac{4\Gamma(11/6)}{\pi^{7/3}}\left[\frac{24}{5}\Gamma(6/5)\right]^{5/6} \\
&\times\Bigg\{\pi^{-5/6}(r_0 f_0)^{-5/3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\pi D f_0)^{2n} \\
&\times\Gamma\left[\begin{array}{l} n+1, 5/6-n, n+3/2 \\ n+3, n+2 \end{array}\right] \\
&-\left(\frac{B}{r_0}\right)^{5/3}(Bf_0)^{-4/3}\exp(-2\pi B f_0)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\pi D f_0)^{2n} \\
&\times\Gamma\left[\begin{array}{l} n+3/2 \\ n+3, n+2 \end{array}\right]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

3. $\frac{\mathcal{L}_0}{\pi} < D < B$:

$$
\mathcal{D}_\varphi(B) = \frac{4\Gamma^2(11/6)}{\pi^{14/3}}\left[\frac{24}{5}\Gamma(6/5)\right]^{5/6}\left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3}(Df_0)^{-11/3} \tag{5.13}
$$

where $f_0 = \dfrac{1}{\mathcal{L}_0}$.

Asymptotic solutions for Eqs. (5.11) and (5.12) are found in expanding each sum with the first values of n and m. The asymptotic solutions for the different regimes are summarized below :

1. $D < B \ll \frac{\mathcal{L}_0}{\pi}$:

$$
\mathcal{D}_\varphi(B) = 6.88\left(\frac{B}{r_0}\right)^{5/3}\left[1 - 1.49\left(\frac{B}{\mathcal{L}_0}\right)^{1/3}\right], \tag{5.14}
$$

2. $D \ll \frac{\mathcal{L}_0}{\pi} \ll B$:

$$
\mathcal{D}_\varphi(B) = 0.17\left(\frac{\mathcal{L}_0}{r_0}\right)^{5/3}, \tag{5.15}
$$

3. $\frac{\mathcal{L}_0}{\pi} \ll D < B$:

$$
\mathcal{D}_\varphi(B) = 0.06\left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3}\left(\frac{D}{\mathcal{L}_0}\right)^{-11/3}. \tag{5.16}
$$

Equation (5.14) tends towards Equation (5.7) when $\mathcal{L}_0$ goes to infinity as B falls in the inertial range. Equation (5.15) shows that when the $\mathcal{L}_0$ is much larger than D but much lower than B, the structure function and so the standard deviation of the OPD are independent of both the pupil diameter and the baseline. This noteworthy property had been already underscored by Mariotti (Ref. [98]). For $\mathcal{L}_0$ values small compared to B and D values, $\mathcal{D}_\varphi(B)$ and σ_{OPD} are functions of the ratios D/r_0 and $D/\mathcal{L}_0$ but are independent of the baseline values.

The last two equations show that when baseline values are larger than $\mathcal{L}_0$ values, we can expect than the OPD variance will not vary notably from one baseline to another one as the saturation of $\mathcal{D}_\varphi(B)$ is reached. This is put in evidence in Figs. 5.2 and 5.3. Figure 5.2 shows structure functions plotted as functions of the baseline B. They are computed from Equation (5.9) for $\mathcal{L}_0$= 25 m (dashed line), from Equation (5.7) for $\mathcal{L}_0= \infty$ (dashed–dotted line) and from Equation (5.10) for D = 1, 5 and 10 m and $\mathcal{L}_0$= 25 m. When $B > \mathcal{L}_0$, structure functions grow asymptotically towards the saturation level. In Figure 5.3, σ_{OPD} is computed versus B and $\mathcal{L}_0$ for D = 10 m and r_0 = 10 cm and the isolines (full lines) are displayed. The label of each isoline gives the value of σ_{OPD} in wavelength unit. The first diagonal which corresponds to the case $B = \mathcal{L}_0$ is also drawn (dashed line). As previously, for a fixed $\mathcal{L}_0$, σ_{OPD} does not vary noticeably when B becomes larger than $\mathcal{L}_0$.

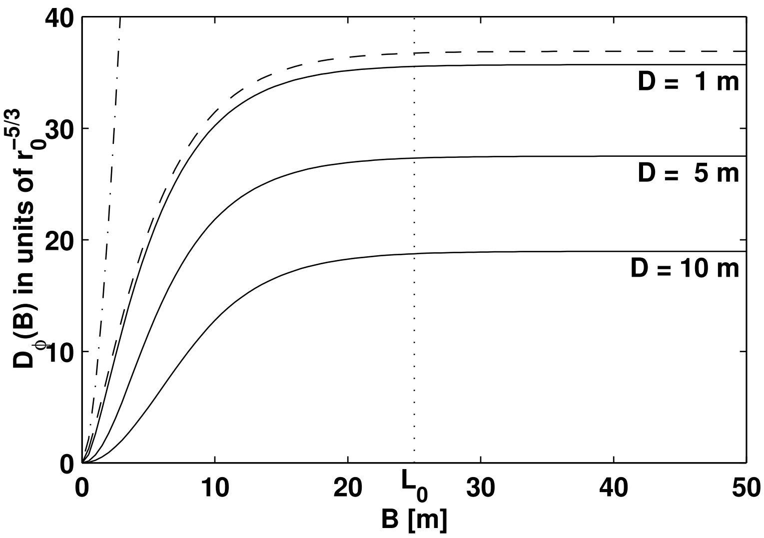


FIG. 5.2 – Structure function of the phase fluctuations in units of $r_0^{-5/3}$ computed from Equation (5.9) for $\mathcal{L}_0$= 25 m (dashed line) and for $\mathcal{L}_0= \infty$ (dashed–dotted line) and from Equation (5.10) for D = 1,5 and 10 m and $\mathcal{L}_0$= 25 m (full lines).

Experimental results Assuming the validity of the Von Kármán spectrum to modelize the structure function of the phase out of the inertial range, we can deduce the

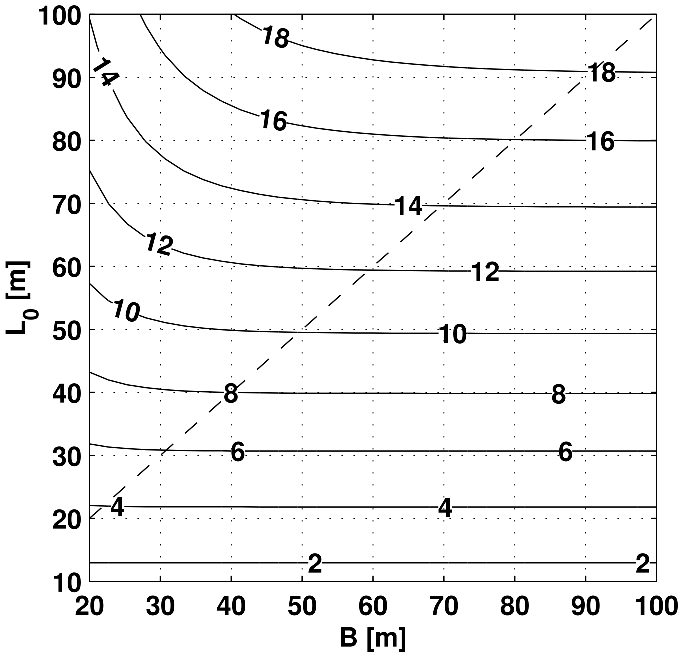


FIG. 5.3 – Isoline of the standard deviation of the OPD in units of wavelength as a function of B and $\mathcal{L}_0$ for D = 10 m and r0 = 10 cm.

expected OPD at Paranal during the campaign of the GSM. Computing Equation (5.4) with all the couples $(r_0; \mathcal{L}_0)$ measured by the GSM at Paranal and putting them into Equation (5.10) and performing the integral for baselines 40, 100 and 200 m with D = 8.2 m lead to the values of σ_{OPD} using Equation (5.6).

Figure 5.4 shows the histograms of σ_{OPD} calculated in this way in the framework of the Kolmogorov model (a) and of the Von Kármán model (b). σ_{OPD} is given in wavelength unit. The comparison of the OPD statistics between both models shows than the OPD is reduced by a factor 10 when $\mathcal{L}_0$ values are taken into account. Moreover, as 80% of the $\mathcal{L}_0$ values are lower than the smallest baseline ($B = 40$ m) (see Fig. 5.1), the OPD with finite $\mathcal{L}_0$ is almost insensible to baseline variations.

OPD residual after correction by a fringe tracker

In the previous section, we have shown how if we estimate the OPD holding into account the finite size of the outer scale, OPD values are considerably reduced compared to those given for an infinite outer scale. However, the remaining OPD due to random atmospheric phase fluctuations have to be compensated to attenuate the blurring of long exposure interferograms in order to obtain sufficiently accurate measurements of the fringes visibility.

In this aim, interferometers[142, 46, 5, 33] are all equipped with a fringe tracker system, a simplified sketch of which is given in Figure 5.5 for a two apertures interfero-

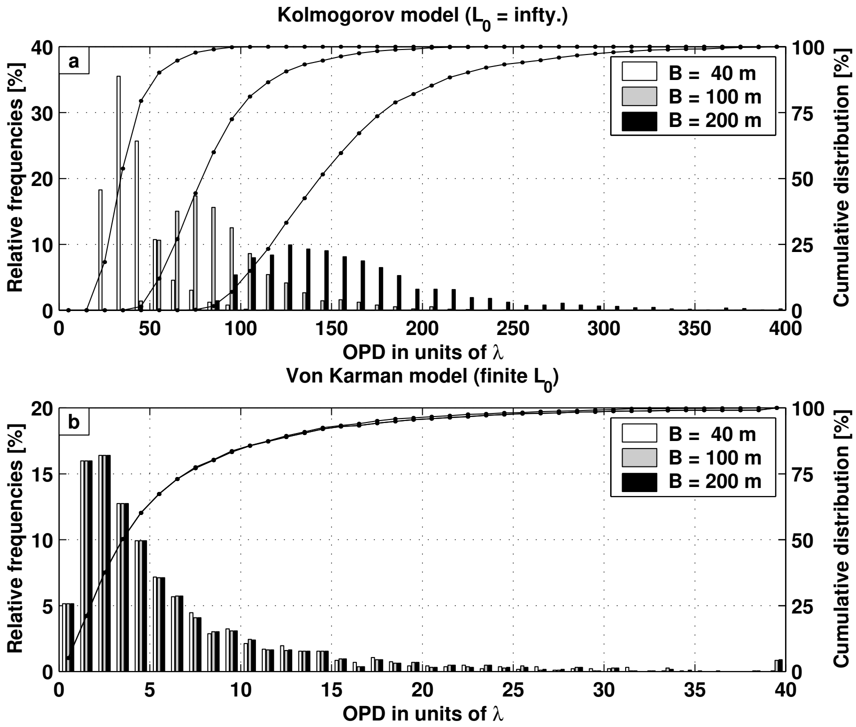


FIG. 5.4 – Histograms of the standard deviation of the OPD in units of wavelength for the Kolmogorov model (a) and for the Von Kármán model (b) for baselines B = 40,100 and 200 m, for a aperture diameter D = 8.2 m and for all the values of r_0 and $\mathcal{L}_0$ measured by the GSM at Paranal.

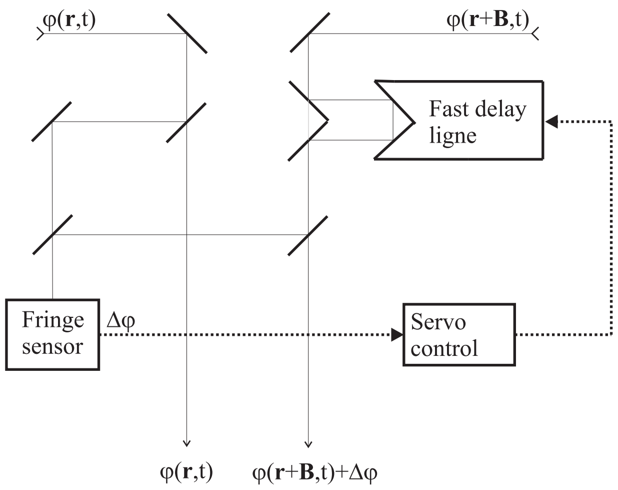


FIG. 5.5 – Simplified sketch of a fringe tracker system.

meter. A fringe tracker system is composed of a fringe sensor, a servo–control and a fast delay line (FDL). The fringe sensor measures the difference $\Delta\varphi$ between the averaged phase of each aperture, this phase difference is transmitted to the servo–control which converts $\Delta\varphi$ into OPD and drives the FDL to add $\Delta\varphi$ to one of the incoming phase.

The residual phase difference $\Delta\varphi_r$ at the output of the fringe tracker is

$$\Delta\varphi_r = \varphi(\vec{r}+\vec{B},t) + \Delta\varphi - \varphi(\vec{r},t) \ , \tag{5.17}$$

and its variance is

$$\sigma^2_{\Delta\varphi_r} = \left\langle \left| \varphi(\vec{r}+\vec{B},t) + \Delta\varphi - \varphi(\vec{r},t) \right|^2 \right\rangle = \mathcal{D}_{\varphi_r}(\vec{B}) \ , \tag{5.18}$$

which is equal to the structure function $\mathcal{D}_{\varphi_r}(\vec{B})$ of the residual phase.

Among the different errors susceptible to affect the measurement of $\Delta\varphi$, we consider only the effects of the finite exposure time T of the fringe sensor and the finite response time τ of the servo–control which is the time difference between the date of the measurement of $\Delta\varphi$ and the date of the corresponding compensation introduced by the FDL. With these two errors, $\Delta\varphi$ can be written

$$\Delta\varphi = \varphi_T(\vec{r}+\vec{B},t+\tau) - \varphi_T(\vec{r},t+\tau) \ , \tag{5.19}$$

where

$$\varphi_T(\vec{r},t+\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\Pi\left(\frac{(t+\tau)-t'}{T}\right)\varphi(\vec{r},t') \ . \tag{5.20}$$

$\Pi\,(t)$ is the rectangle function[26] :

$$\begin{aligned} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) &= 1, \text{ if} \left|\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right| \leq \frac{1}{2} \\ &= 0, \text{ otherwise.} \end{aligned} \tag{5.21}$$

Putting Equation (5.19) into Equation (5.18), we obtain :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\varphi_r}(\vec{B}) &= \Big\langle \Big| \Big(\varphi(\vec{r},t) - \varphi(\vec{r}+\vec{B},t)\Big) - \quad (5.22)\\
&\quad \Big(\varphi_T(\vec{r},t+\tau) - \varphi_T(\vec{r}+\vec{B},t+\tau)\Big)\Big|^2 \Big\rangle, \\
&= \Big\langle \Big| \Big(\varphi(\vec{r},t) - \varphi(\vec{r}+\vec{B},t)\Big)\Big|^2 \Big\rangle + \quad (5.23)\\
&\quad \Big\langle \Big| \Big(\varphi_T(\vec{r},t+\tau) - \varphi_T(\vec{r}+\vec{B},t+\tau)\Big)\Big|^2 \Big\rangle - \\
&\quad 2\Big\langle \Big| \Big(\varphi(\vec{r},t) - \varphi(\vec{r}+\vec{B},t)\Big) \Big(\varphi_T(\vec{r},t+\tau) - \varphi_T(\vec{r}+\vec{B},t+\tau)\Big)\Big| \Big\rangle
\end{aligned}$$

The two first terms are respectively the structure function $\mathcal{D}_{\varphi}(\vec{r},t)$ of the instantaneous phase and the structure function $\mathcal{D}_{\varphi_T}(\vec{r},t)$ of the phase averaged for an exposure time T and the last term is a coupling term $\mathcal{C}_{\varphi}(\vec{B},T,\tau)$ between the instantaneous phase and the averaged phase.

$$\mathcal{D}_{\varphi_r}(\vec{B}) = \mathcal{D}_{\varphi}(\vec{B}) + \mathcal{D}_{\varphi_T}(\vec{B}) - 2\mathcal{C}_{\varphi}(\vec{B},T,\tau) \quad (5.24)$$

where

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\varphi}(\vec{B},T,\tau) &= 2\Big[\langle\varphi(\vec{r},t)\varphi_T(\vec{r},t+\tau)\rangle - \langle\varphi(\vec{r},t)\varphi_T(\vec{r}+\vec{B},t+\tau)\rangle\Big] \quad (5.25)\\
&= \frac{2}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \Pi\left(\frac{\tau-t}{T}\right)\Big[\mathcal{B}_{\varphi}(-t\vec{V}) - \mathcal{B}_{\varphi}(\vec{B}-t\vec{V})\Big] \quad (5.26)\\
&= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \Pi\left(\frac{\tau-t}{T}\right)\Big[\mathcal{D}_{\varphi}(\vec{B}-t\vec{V}) - \mathcal{D}_{\varphi}(-t\vec{V})\Big] \quad (5.27)
\end{aligned}$$

where we make use of the Taylor hypothesis to assume $\mathcal{B}_{\varphi}(\vec{B},t) = \mathcal{B}_{\varphi}(\vec{B}-t\vec{V})$.

We have now to determine the expression of $\mathcal{D}_{\varphi_T}(\vec{r},t)$ which is an estimation of $\mathcal{D}_{\varphi}(\vec{r},t)$ for a finite exposure time. In the case of finite exposure time, the time averaging acts like a low–pass filter[106] . The attenuation of high frequency components of phase fluctuations will lead to an underestimation of $\mathcal{D}_{\varphi}(\vec{r},t)$.

To obtain $\mathcal{D}_{\varphi_T}(\vec{r},t)$, we derive first the spatio–temporal correlation $\mathcal{B}_{\varphi_T}(\vec{B},\tau)$ of the phase fluctuations φ_T averaged for an exposure time T,

$$\mathcal{B}_{\varphi_T}(\vec{B},\tau) = \left\langle \left[\frac{1}{T}\varphi(\vec{r},t) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] \overline{\left[\frac{1}{T}\varphi(\vec{r}+\vec{B},t+\tau) * \Pi\left(\frac{t+\tau}{T}\right)\right]} \right\rangle \quad (5.28)$$

where $*$ and $\bar{}$ stand for the convolution and the complex conjugate, respectively and $\Pi(t)$ is the rectangle function. Equation (5.28) can be easily rewritten

$$\mathcal{B}_{\varphi_T}(\vec{B},\tau) = \frac{1}{T}\mathcal{B}_{\varphi}(\vec{B},\tau) * \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right) \quad (5.29)$$

where $\mathcal{B}_\varphi(\vec{B},\tau)$ is the spatio-temporal correlation of the instantaneous phase and $\Lambda\left(\tau\right)$ is the triangle function[26] :

$$\begin{aligned}\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right) &= 1-\left|\frac{t}{T}\right|,\ \text{if}\left|\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right|\leq 1\\ &= 0,\ \text{otherwise.}\end{aligned} \tag{5.30}$$

For $\tau=0$, Equation (5.29) gives

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\varphi_T}(\vec{B},0) &= \mathcal{B}_{\varphi_T}(\vec{B})\\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} du\mathcal{B}_\varphi(\vec{B},u)\Lambda\left(\frac{u}{T}\right)\\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} du\mathcal{B}_\varphi(\vec{B}-u\vec{V})\Lambda\left(\frac{u}{T}\right)\end{aligned} \tag{5.31}$$

where we make use of the Taylor hypothesis to assume $\mathcal{B}_\varphi(\vec{B},u)=\mathcal{B}_\varphi(\vec{B}-u\vec{V})$. $\mathcal{D}_{\varphi_T}(\vec{r},t)$ is deduced from Equation (5.31) by the relation :

$$\mathcal{D}_{\varphi_T}(\vec{B}) = 2\left[\mathcal{B}_{\varphi_T}(0)-\mathcal{B}_{\varphi_T}(\vec{B})\right] \tag{5.32}$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} du\Lambda\left(\frac{u}{T}\right)\left[\mathcal{B}_\varphi(-u\vec{V})-\mathcal{B}_\varphi(\vec{B}-u\vec{V})\right] \tag{5.33}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} du\Lambda\left(\frac{u}{T}\right)\left[\mathcal{D}_\varphi(\vec{B}-u\vec{V})-\mathcal{D}_\varphi(-u\vec{V})\right] \tag{5.34}$$

The OPD measured for an exposure time T is given by Eq. (5.6) where the structure function is given by Eq. (5.32). The error Υ_{OPD} between the instantaneous OPD and the averaged OPD is

$$\Upsilon_{OPD}=\frac{OPD(0)-OPD(T)}{OPD(0)}\ . \tag{5.35}$$

Finally, the structure function of the residual phase $\mathcal{D}_{\varphi_r}(\vec{B})$ is

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\varphi_r}(\vec{B}) &= \mathcal{D}_\varphi(\vec{B})+\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\left[\mathcal{D}_\varphi(\vec{B}-t\vec{V})-\mathcal{D}_\varphi(-t\vec{V})\right]\\ &\quad -\frac{2}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\Pi\left(\frac{\tau-t}{T}\right)\left[\mathcal{D}_\varphi(\vec{B}-t\vec{V})-\mathcal{D}_\varphi(-t\vec{V})\right]\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{D}_\varphi(\vec{B}) \\
&+\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) - 2\Pi\left(\frac{\tau - t}{T}\right)\right]\left[\mathcal{D}_\varphi(\vec{B} - t\vec{V}) - \mathcal{D}_\varphi(-t\vec{V})\right],
\end{aligned} \tag{5.37}
$$

and the residual OPD is deduced from Eq. (5.6).

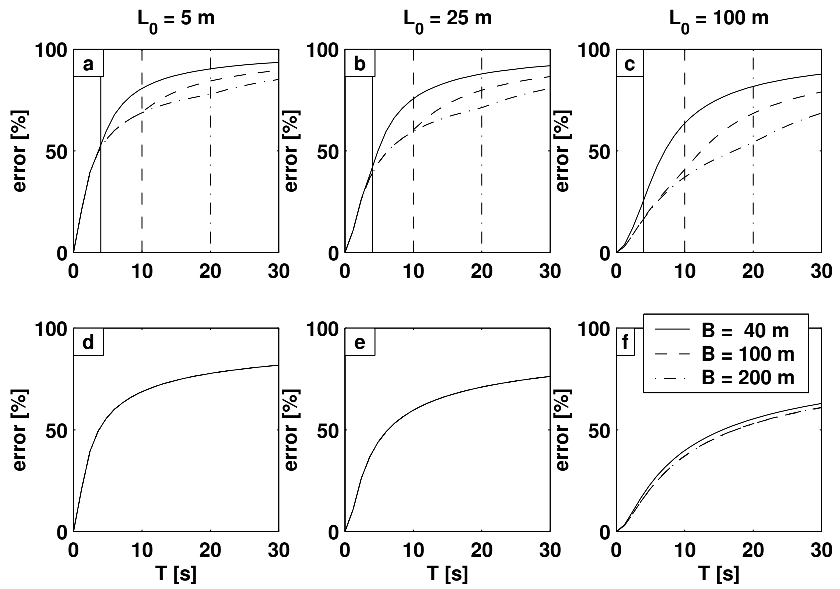


FIG. 5.6 – Υ_{OPD} versus T for different values of $\mathcal{L}_0$ and of the baseline B. The wind speed is equal to 10m.s^{-1} and the wind direction is parallel to the baseline for graphs a, b and c and perpendicular for graphs d, e and f. The diameter D is equal to 10m and r_0 is equal to 10cm. Vertical lines show the time B/V taken by turbulent eddies carried by the wind to cross the distance B between both telescopes.

TAB. 5.1 – Variation of Υ_{OPD} with different parameters. $\nearrow$ means that Υ_{OPD} increases when the parameter increases and $\searrow$ means that Υ_{OPD} decreases when the parameter increases

Parameters $\nearrow$	T	$\mathcal{L}_0$	B	D	V	$\arg(\vec{V})$
Υ_{OPD}	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Examples of the variations of Υ_{OPD} and of the residual OPD with the exposure time are given in Figs. (5.6) and (5.7) respectively, for different values of $\mathcal{L}_0$, B and $\arg(\vec{V})$ and for D, r_0 and V equal to 10m, 10cm and 10m.s^{-1}, respectively.

Tables 5.1 and 5.2 summarize the variation of Υ_{OPD} and of the residual OPD, respectively, for the parameters T, τ, r_0, $\mathcal{L}_0$, B, D, V and $\arg(\vec{V})$ when the value of each parameter is increased.

TAB. 5.2 – Variation of the residual OPD with different parameters. $\nearrow$ means that the residual OPD increases when the parameter increases and $\searrow$ means that Υ_{OPD} decreases when the parameter increases.

Parameters $\nearrow$	T	τ	r_0	$\mathcal{L}_0$	B	D	V	$\arg(\vec{V})$
Residual OPD	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

5.1.3 Conclusion

For the first time, a set of continuous nights of outer scale measurements has been undertaken at Paranal by the GSM. The mean value of $\mathcal{L}_0$ is 24 m and the log–statistics of $\mathcal{L}_0$ shows that the range [15m–37m] contains 68% of the $\mathcal{L}_0$ values measured at Paranal.

The exact formulation of the structure function of the phase fluctuations is derived for both cases with and without the filtering effect of an aperture of diameter D. These expressions directly related to the standard deviation of the OPD show that for baselines larger than $\mathcal{L}_0$, the OPD becomes independent of baseline values. It has been found that, at Paranal, for the diameter of one U.T. (8.2m), for baseline values typical for the VLTI (40m, 100m, 200m) and with the r_0 and $\mathcal{L}_0$ values measured by the GSM, the OPD is reduced by a factor 10 compared to a model with an infinite outer scale (Kolmogorov model). Moreover, the effect of baseline values on OPD value can be neglected.

The expression of the residual OPD at the output of a fringe tracker system is also derived for two sources of error : the finite exposure time T of the fringe sensor and the finite frequency of the closed–loop of the system i.e. the finite response time τ of the servo–control. The finite size of $\mathcal{L}_0$ permits, for fixed values of T and τ, to diminish the residual OPD value or to increase T and τ values keeping the residual OPD below a critical value (Fig. 5.7 and Table 5.2).

Finally, we have seen the gain for the co–phasing of an interferometer if we take into account the outer scale and, consequently, the finite size of $\mathcal{L}_0$ should be considered for the design and the technical specifications of the new Optical Long Baseline Interferometers.

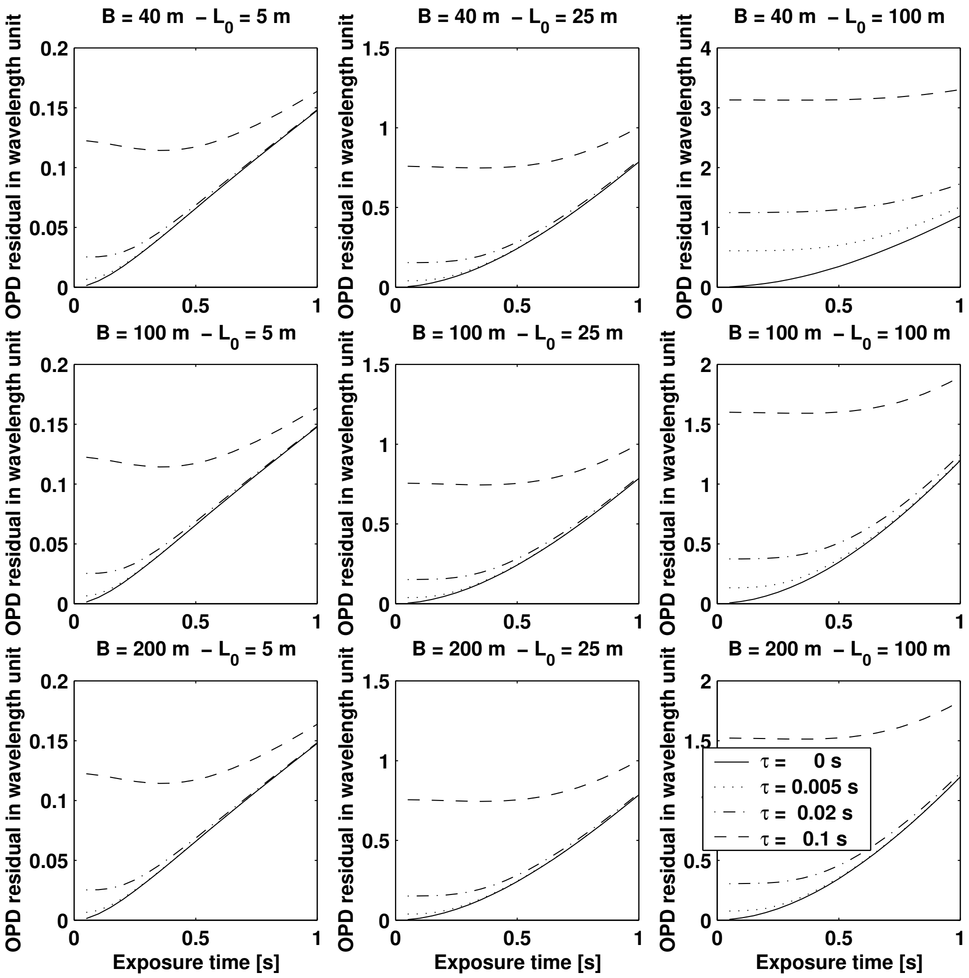


FIG. 5.7 – Residual OPD plotted as a function of the exposure time T for different values of $\mathcal{L}_0$: 5, 25 and 100 m from the left to the right, of B : 40, 100 and 200 m from the top to the bottom and of τ : 0ms(full line), 5ms(dotted line), 20ms(dotted–dashed line) and 100ms(dashed line). D, V and r_0 are equal to 10m, 10m.s^{-1} and 10cm, respectively and the wind direction is perpendicular to the baselines.

Conclusion

Dans cette partie, nous avons souligné l'importance de l'échelle externe de cohérence spatiale pour la Haute Résolution Angulaire en Astronomie qui ne doit pas être confondue avec l'échelle externe de turbulence qui donne la limite supérieure du domaine inertiel selon le critère retenu par Tatarski.

Les expressions pour le modèle de Von Kármán de la variance, de la covariance et de la fonction de structure des fluctuations de phase sont rappelées. Alors qu'avec le modèle de Kolmogorov, la variance est infinie, pour le modèle de Von Kármán , elle a une valeur finie.

La qualité d'une image long temps de pose est évaluée en présence de l'échelle externe $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ à travers les valeurs de la largeur à mi–hauteur de la réponse impulsionnelle et du rapport de Strehl. On note globalement une amélioration de ces deux grandeurs c'est–à–dire une augmentation du rapport de Strehl et une diminution de la largeur à mi–hauteur. Cette amélioration peut être très importante lorsque $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ est plus petit que le diamètre D du télescope et/ou lorsque le rapport D/r_0 diminue. On donne aussi, pour la première fois à notre connaisance, une expression exacte du seeing.

L'effet de l'échelle externe sur la taille du domaine d'isoplanétisme et sur la valeur de l'indice de scintillation est aussi étudiée. Des expressions originales de l'angle d'isoplanétisme θ_0 et de l'indice de scintillation prenant en compte la valeur de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ ont été établies. La valeur de θ_0 croit avec $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ et d'autant plus que la longueur d'onde est grande. L'influence de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ sur l'indice de scintillation n'est significative que pour les faibles valeurs du rapport $D/\mathcal{L}_\mathbf{0}$.

L'expression exacte de la covariance des angles d'arrivée (AA) lorsque l'on tient compte à la fois de la valeur finie de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ et du filtrage imposé par le diamètre du télescope est donnée. Se basant sur l'hypothèse de Taylor, on déduit de cette covariance, la corrélation temporelle des AA et de celle–ci une expression nouvelle pour le temps de décorrélation des AA.

Dans le second chapitre, nous avons étudié l'effet de l'échelle externe sur les performances d'un système d'OA. La covariance des coefficients des polynômes de Zernike a d'abord été calculée. L'expression de la covariance a été retrouvée à partir des solutions des intégrales généralisées établies dans la première partie. Pour les valeurs de Df_0 supérieures à 1 où f_0 est la fréquence spatiale associée à l'échelle externe, une expression asymptotique de la covariance est donnée. Ainsi, la covariance a pu être calculée pour tout le domaine de variation de Df_0. On constate que lorsque Df_0 croît la variance de tous les modes diminue et celle des modes de bas ordre croît plus rapidement que celle des modes d'ordre plus élevé. Ceci conduit à une égalisation de la variance de tous les modes pour les grandes valeurs de Df_0.

Ensuite, l'erreur après correction de la phase du front d'onde avec N polynômes de Zernike a été calculée. Cette erreur est égale à la moyenne sur la pupille de la variance des fluctuations de phase résiduelle Δ_N. On trouve que cette erreur décroît avec l'augmentation du produit Df_0. Cette décroissance est très significative pour $Df_0 > 1$. Δ_N tend vers une limite commune à tous les ordres de correction lorsque Df_0 tend vers l'infini. On montre aussi que lorsque l'on choisit comme valeur limite de Δ_N celle donnée par le modèle de Kolmogorov, le nombre de modes N peut être réduit en présence de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ sans accroître la valeur de Δ_N.

La dernière grandeur calculée dans ce chapitre est le rapport de Strehl après correction de la phase. Ce rapport de Strehl est calculé d'abord de façon exacte à partir des expressions de la covariance des coefficients des polynômes de Zernike et de la corrélation entre la phase et ces coefficients, puis à partir de la formule approchée : $\exp(-\Delta_N)$. On a vérifié que cette approximation est valable pour les faibles valeurs de Δ_N. La valeur du rapport de Strehl lorsque le tip/tilt n'est pas corrigé est aussi donnée. Lorsque le produit Df_0 est supérieur à 1, ce rapport de Strehl est peu altéré par la non prise en compte du tip/tilt car pour les grandes valeurs de Df_0, l'énergie du tip/tilt est du même ordre que celle des autres ordres. On en déduit que pour un très grand télescope dont le diamètre serait égal à quelques $\mathcal{L}_\mathbf{0}$, on peut se passer de la correction du tip/tilt. Cette propriété a son importance pour les étoiles de référence artificielles [147, 119, 84] qui ne peuvent pas être utilisées pour mesurer le tip/tilt. Pour les très grands télescopes, ceci n'est plus un handicap. Il faut cependant souligner que ceci n'est valable que pour des systèmes d'optique adaptative de bas ordre ou pour les plus grandes valeurs de Df_0 ($Df_0 \gg 5$).

Dans le dernier chapitre de cette partie, l'influence de l'échelle externe sur la différence de marche atmosphérique (ddm) d'un interféromètre est étudiée. L'expression de la ddm en fonction du diamètre, de la base et de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ est donnée. On montre que la ddm attendue à l'Observatoire du Paranal entre 2 UT du VLT avec les valeurs de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ mesuré au moyen du "Generalized Seeing Monitor" est dix fois moindre que celle donnée par le modèle de Kolmogorov. De plus, elle est presque complètement insensible aux variations de la base.

Troisième partie

Présentation et analyse de la base de données du "Generalized Seeing Monitor"

Introduction

La modélisation des effets de la turbulence atmosphérique pour la Haute Résolution Angulaire en Astronomie est une étape nécessaire pour les spécifications des instruments des grands télescopes et interféromètres. Cependant, cette modélisation doit s'accompagner de mesures sur site des différents paramètres qui la caractérisent : le paramètre de Fried r_0, l'angle d'isoplanétisme et l'échelle externe. Le r_0 ou son équivalent l'angle de seeing fait l'objet depuis longtemps de campagnes de mesures dans les différents Observatoires du monde [111, 161, 27, 49, 28, 133, 100, 65]. L'angle d'isoplanétisme est devenu un paramètre majeur des systèmes d'OA et l'importance de l'échelle externe est d'abord apparue en Interférométrie. Un seul instrument permet de mesurer ces trois paramètres majeurs sur n'importe quel site et sur plusieurs nuits en continu : le "Generalized Seeing Monitor" (GSM).

Le premier chapitre de cette partie décrit le fonctionnement du GSM ainsi que les traitements des données qu'il effectue en temps réel et en temps différé. Le second chapitre présente chacune des six campagnes de mesures réalisées par le GSM. Le troisième chapitre analyse les corrélations spatio–temporelles des AA mesurés au moyen du GSM. On y décrit les méthodes d'interprétation de ces corrélations avec les limites de ces méthodes. Le quatrième chapitre reprend les résultats en OA obtenus dans la seconde partie et les applique à l'Observatoire du VLT au Paranal avec les valeurs de r_0 et $\mathcal{L}_0$ mesurés sur ce site au moyen du GSM.

Chapitre 6

Présentation du “Generalized Seeing Monitor”

Une analyse détaillée des caractéristiques techniques de l’instrument et de l’influence des différentes sources de bruit sur la mesure se trouve dans divers documents [1, 101, 7, 172]. Dans la première section, je rappellerai brièvement le principe de fonctionnement du “Generalized Seeing Monitor” (GSM) et dans la seconde je donnerai les différentes étapes du traitement des données.

6.1 Description de l’instrument

Le GSM est composé de quatre télescopes de 10 cm auxquels sont associés des modules de mesure des fluctuations d’angle d’arrivée (AA). Il en résulte une mesure des perturbations du front d’onde en quatre points à la manière d’un Shack–Hartmann. Deux télescopes partagent la même monture équatoriale et sont destinés aux mesures différentielles. Les deux autres télescopes possèdent leur propre monture comme le montre la figure 6.1.

Le schéma optique des modules d’acquisition des AA est montré sur la figure 6.2. L’image d’une étoile non résolue est formée sur une grille de Ronchi après avoir été réfléchie par un miroir galvanométrique. Ce miroir oscille à la fréquence de 200 Hz et son amplitude d’oscillation est égale à une période de la grille. Derrière la grille, le flux de l’étoile, modulé sinusoïdalement, est mesuré au moyen d’un photo–multiplicateur. Durant une période de balayage de la grille, quatre mesures de flux sont effectuées pour des déphasages de 0, $\pi/2$, π et $3\pi/2$.

Par un algorithme de type “ABCD” [43], on déduit de ces quatre mesures la phase et le contraste de la sinusoïde. La phase nous donne directement la valeur de l’AA et le contraste est un des facteurs de qualité de la mesure.

L’article suivant présente le GSM dans sa dernière version et étudie l’influence de différents bruits sur la mesure des AA et leur impact sur les paramètres optiques de la turbulence que l’on en déduit. Il donne aussi un bref résumé de l’ensemble des missions

Fig. 6.1 – GSM sur le site du plateau de Calern (Observatoire de la Cote d'Azur – France). En arrière–plan, on distingue la coupole du télescope du système Laser–Lune.

effectuées par le GSM.

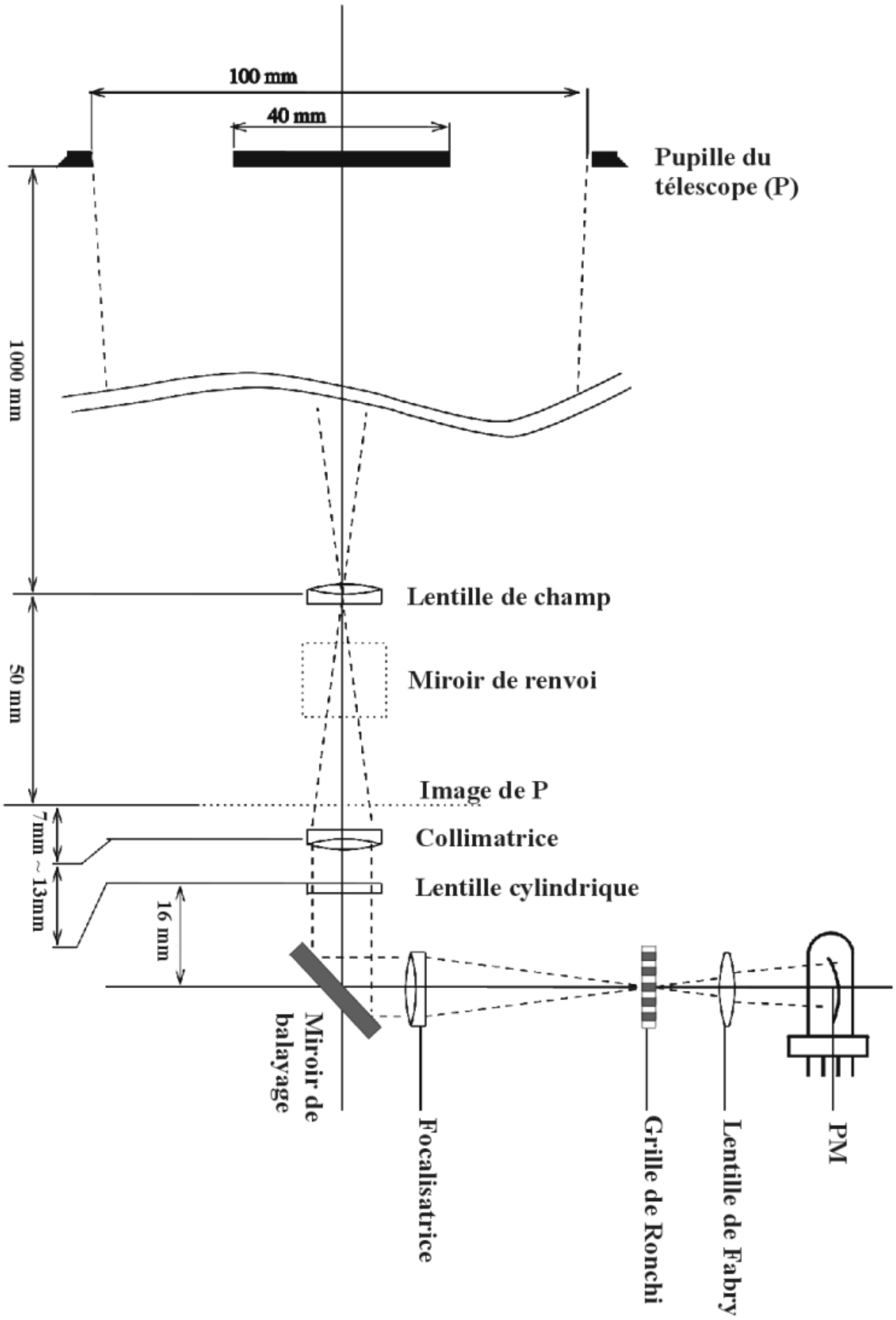


FIG. 6.2 – Schéma optique des modules d'acquisition des AA.

6.1.1 Article paru dans Applied Optics vol.29 no.38 en Octobre 2000

Titre : From the Grating Scale Monitor to the Generalized Seeing Monitor (GSM)

Auteurs : Aziz Ziad[1], Rodolphe Conan[1], Andrei Tokovinin[2], François Martin[1], and Julien Borgnino[1]

Résumé : The Grating Scale Monitor has been developed a few years ago at Nice University to measure the outer scale $\mathcal{L}_0$ from the angle of arrival (AA) fluctuations of the perturbed wavefront. The AA is detected with 5 ms time resolution by modulating the stellar image in a small telescope with a grating. The normalized covariance of AA fluctuations is used to estimate $\mathcal{L}_0$. A new version of this instrument, called Generalized Seeing Monitor, is described. It consists of 4 identical modules measuring the AA at 4 locations on the wavefront. The spatio-temporal analysis of these data leads to the determination of the seeing ϵ_0, the outer scale $\mathcal{L}_0$, and the wavefront speed. In addition, the isoplanatic angle θ_0 is determined from scintillation, making the turbulence characterization with GSM almost complete.

We give the instrument description and a detailed analysis of its performance and accuracy. Now, several site testing campaigns have been made with GSM over the world : La Silla (Chile), Oukaïmeden (Morocco), Maidanak (Uzbekistan), Cerro Pachon and Cerro Paranal (Chile). The main results of these campaigns are presented and discussed.

Introduction

Advances in understanding the formation of astronomical images through the terrestrial atmosphere have an important contribution in improving the resolution of ground based optical instruments. To optimize the performances of High Angular Resolution (HAR) techniques, e.g. Adaptive Optics (AO) and Long Baseline Interferometry (LBI), a good knowledge of the Atmospheric Optical Parameters (AOP) related to the perturbed wavefront is needed [169, 170]. Among these parameters are the well-known Fried diameter r_0 related to the seeing angle $\epsilon_0 = 0.98\lambda/r_0$, the isoplanatic angle θ_0, the wavefront outer scale $\mathcal{L}_0$ and the wavefront coherence time τ_0.

Many studies show the effect of a finite $\mathcal{L}_0$ on the HAR techniques but few measurements have been done so far [137, 166, 22]. In addition this parameter is controversed because the available measurements provide values scattered from a few meters to kilometric values [11]. This optical parameter $\mathcal{L}_0$, also called spatial coherence outer scale of the perturbed wavefront, must be differentiated from the local outer scale $L_0(h)$ depending on local conditions and so on altitude h [41]. The $\mathcal{L}_0$ is defined as a distance where the phase structure function saturates. $\mathcal{L}_0$ can be also interpreted as a combination of outer scales in different atmospheric layers weighted with the refractive index structure

[1]U.M.R. 6525 Astrophysique, Université de Nice–Sophia–Antipolis, F–06108 Nice Cedex 2, France
[2]Sternberg Astronomical Institute, Universitestsky prosp., 13, 119899 Moscow, Russia

constant profile $C_N^2(h)$ [23, 89]. The outer scale values provided by the GSM correspond to $\mathcal{L}_0$ parameter in the Von Karman model of the phase spectrum (Eq. (6.14)). Thus, the $\mathcal{L}_0$ measured with GSM are model-dependent and the use of another model would change the outer scale values. The effect of the model on the $\mathcal{L}_0$ estimations will be analyzed in Sect.6.1.1.

The initial version of our instrument, called Grating Scale Monitor, was intended for $\mathcal{L}_0$ measurements [103]. Recently some technical improvements and theoretical developments have been made and now it is possible to measure with GSM ϵ_0, $\mathcal{L}_0$, τ_0 and θ_0. Hence, the name of the instrument was changed to Generalized Seeing Monitor. For the first time it is now possible to monitor the temporal evolution of the outer scale.

In Sect. 6.1.1 we describe the instrument and data reduction procedures. Then, in Sect. 6.1.1 we analyze the measurement errors, including the influence of finite exposure time on the derived AOP. The dependence of $\mathcal{L}_0$ on the turbulence model used in data reduction will be investigated in Sect.6.1.1. In addition, the methods used to estimate isoplanatic angle and wavefront speed are described respectively in Sects. 6.1.1 and 6.1.1. Finally, in Sect. 6.1.1 the summary of the measurement campaigns made with GSM at five observatories over the world will be given.

Generalized Seeing Monitor (GSM) instrument

The GSM instrument consists of four identical modules, each module measuring the atmospheric angle of arrival (AA) fluctuations at the selected position on the wavefront, like in a Shack-Hartmann sensor. The operation of individual module will be described first. Then, we describe the data analysis procedure used to derive the atmospheric optical parameters.

Module description Each GSM module comprises a Maksutov telescope ($D = 100$ mm, $F = 1$ m) with a detector box. All four modules are pointed to the same star and are controlled by a single PC computer via a custom-made interface board. Modules 1 and 2 are installed on the same mount and act as a Differential Image Motion Monitor [135].

CCD detectors offer a standard solution to measure the image position. However, the time needed to read the detector is still too long for fast and continuous monitoring of AA fluctuations. This is why we have developed an alternative modulation technique for fast AA measurements in one direction.

The image of the observed star is formed on a Ronchi grating. It is shifted by a galvanometric mirror commanded with a triangular signal of 200 Hz. The grating is scanned over one grating period (Fig. 6.3). The flux transmitted through the grating is detected by a photomultiplier working in the photon counting mode. Four flux measurements per modulation period are taken, corresponding to phase shifts 0, $\pi/2$, π, and $3\pi/2$. We denote the corresponding numbers of detected photons as A, B, C, D (Fig. 6.3). If flux modulation is sinusoidal, the phase Φ of this sinusoid can be calculated as[43] :

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{D-B}{A-C} \right). \tag{6.1}$$

The modulation contrast γ is also estimated from the same A, B, C, D fluxes as :

$$\gamma = \frac{\pi^2}{2} \frac{(C-A)^2 + (D-B)^2}{(A+B+C+D)^2} \tag{6.2}$$

Here we take into account the integration of the signal during the 1/4 period when accumulating the $ABCD$ counts, so that γ is the "true" contrast ($\gamma = 1$ for perfect sinusoidal modulation).

This technique is widely used in interferometric measurements [43], and is sometimes called the "ABCD" method (the term *phase* used here to denote image position was borrowed from interferometry). In Eq. (6.1) the phase is expressed in grating period unit. The angle of arrival $\alpha = p\ \Phi$, where p is the angular period of the grating in radians or arcseconds ($p \approx 10''$ for GSM). If image motion exceeds one grating period, the integer number of periods can be restored by continuity, provided that the rapid fluctuations are less than $p/2$ (in practice it means that seeing must be better than $\approx 3''$, otherwise "phase jumps" of 1 period may occur in the restored phases). The particular choice of the grating period is a compromise between the AA measurement accuracy (which improves with decreasing p) and the necessity to have high-contrast modulation without phase jumps even under relatively poor seeing.

Image modulation is provided by a galvanometric mirror. A formidable problem of achieving fast and linear response is solved by using the inertial properties of the oscillating mirror. Modulation is linear to better than 1% and perfectly synchronous in all 4 modules. During the 5 ms modulation period the forward and backward scans take 2 ms each, and the remaining 2x0.5 ms is a dead time needed to change the scan direction. The $ABCD$ counts for forward and backward scans are averaged to compute the phase each 5 ms. Further details can be found in Ref. [103].

Optical layout of the GSM detector box is shown in Fig. 6.4. A 4-mm aperture in the focal plane of the telescope limits the field to $14'$, reducing the contribution of the sky background. Field lens (1) in front of the aperture forms the pupil image near the collimator (2). The parallel beam is deflected by 90° with the modulator mirror (4) and refocused on the Ronchi grating (6) (40 μm period). A cylindric lens (3) is located near the collimator to elongate the stellar image along grating lines in order to reduce the possible effects of dust particles or grating defects.

Apart from optics, each detector box contains the photomultiplier (8) (Hamamatsu R2949), its high voltage supply, pulse amplifier and modulator control circuits. A viewer is used to point and center the star. Typically, a 2^m star gives a count rate of $\approx 6 \cdot 10^5$ counts per second, and the associated shot noise (see below) is much less than the AA signal.

All four GSM modules receive the same signal that controls modulation timing. Detected photons are counted each 0.5 ms by the interface board and transferred to

PC memory by interrupts. The software provides all necessary functions for instrument testing (e.g. modulation amplitude control, flux measurements, etc.), data acquisition and processing. After the accumulation of data (typically during 120 s) the processing results are shown on the screen and entered into the database.

Data processing Data ($ABCD$ counts) are stored on a computer disk as a sequence of 2-byte integer numbers (16 numbers each 5 ms). The parameters of each acquisition and the results of its processing are kept in a separate file which serves the purpose of the database. Data processing includes the following steps :

- The phases are computed for each channel using the Eq. (6.1), with restoration of the integer number of grating periods. In case of poor signal-to-noise ratio the phase jumps are successfully removed by a digital filter.
- The parabolic trend is fitted and subtracted, leaving only random phase fluctuations. Thus, GSM can accommodate for linear drift of the source during acquisition, which is useful for observations of the Polar star without tracking.
- The 4 variances and 6 covariances of the AA fluctuations, corresponding to all possible combinations of the 4 modules, are computed. The variances are corrected from the contribution of the photon and scintillation noise, as explained below.
- The auxiliary quantities are computed as well, namely the mean modulation contrast, the mean flux in each module and its dispersion, which provides a measure of scintillation index.

The last step of data processing is the calculation of the AOP of interest which proceeds in the following way :

The Fried parameter r_0 is estimated from the AA differential variance [135, 169] obtained with the modules 1 and 2 which share the common mount. We remove the noise contribution and apply a correction for the finite exposure time (see below). We compute also the estimates of r_0 from the AA variances obtained with each module. When corrected from the effects of the outer scale [169, 24], these variances usually agree well with the "differential" r_0, ensuring that the AA measurements are not seriously affected by telescope vibrations.

The wavefront outer scale $\mathcal{L}_0$ is determined for each pair of modules by computing the ratio of AA covariance to the differential AA variance obtained with modules 1 and 2. These normalized covariances Γ are then compared to the grid of theoretical covariances calculated for different baseline coordinates and different values of the $\mathcal{L}_0$ parameter in the Von Karman model [93]. Theoretical Γ are interpolated for the specific value of the baseline (actually, a projection of the baseline on the wavefront plane is computed first for the moment of observation from the site and source coordinates) and the appropriate $\mathcal{L}_0$ which fits the measured Γ is found. The final adopted value of $\mathcal{L}_0$ is taken as the median of the 6 individual values corresponding to the different baselines.

The configuration of GSM modules is shown in Fig. 6.5. The baseline lengths were chosen for the optimal sensitivity of the covariances to the outer scale. Thus, the longitudinal baseline is shorter than the transversal baseline because Γ decreases more rapidly in the longitudinal direction than in the transverse one [11].

The *isoplanatic angle* θ_0 is calculated from the scintillation index using the formulae given in Sect. 6.1.1.

The two-dimensional configuration of GSM permits to derive the effective wavefront speed from the temporal cross-correlation of AA signals at different baselines. Thus, the *wavefront coherence time* τ_0 can be found. However, this option is not yet a part of the standard signal processing. Examples of the spatio-temporal AA analysis and the problems encountered in estimating τ_0 will be discussed in Sect. 6.1.1.

Error analysis

In this section we estimate the various sources of errors affecting the AOP measurements with GSM. Most of them affect the AA measurements in each module. Let us denote the measured AA signal as α. It will be different from the atmospheric AA fluctuations α_a due to the contributions of several noise sources and can be written as :

$$\alpha = \alpha_a + \alpha_p + \alpha_s + \alpha_g + \alpha_m, \tag{6.3}$$

where α_p is the photon noise, α_s is the scintillation noise, α_g is the "modulation noise" which arises due to the imperfect validity of Eq. (6.1), and, finally, α_m is the mechanical noise due to telescope motions. After considering all these terms we shall take into account the error arising from the averaging of α_a during the GSM exposure time of 5 ms. Finally, the statistical errors of the computed variances and covariances will be estimated and the expressions for the errors of the AOP measured with GSM will be provided.

Photon noise The numbers of photons A, B, C, D entering into Eq. (6.1) are subject to the statistical fluctuations due to the Poisson statistics of photodetection process. We may safely assume these fluctuations to be uncorrelated. As described in Sect. 6.1.1, the four fluxes A, B, C, D recorded per modulation can be written as : $I_i = N(1 + \gamma\ cos(\Phi + \psi_i))$ where ψ_i are the A, B, C, D phase shifts corresponding, respectively, to $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, and N is the mean count. Assuming that the mean phase Φ is equal to zero, the mean recorded counts can be written as : $\overline{A} = N(1+\gamma)$; $\overline{B} = N$; $\overline{C} = N(1-\gamma)$ and $\overline{D} = N$.

Differentiating Eq. (6.1), we relate the photon-noise phase dispersion σ_p (in units of grating period) to the modulation contrast γ :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{64N\gamma^2}. \tag{6.4}$$

In order to check this expression an experiment has been performed in the laboratory. It consisted in making measurements without turbulence and using the difference of

AA between two modules. A comparison between the differential variance $\sigma^2_{diff} =< (\alpha_1 - \alpha_2)^2 >$ and the sum $\sigma^2_{p_1} + \sigma^2_{p_2}$ calculated by Eq. (6.4) shows that they are within $\pm 5\%$ from each other for various levels of the photon flux N and contrast γ.

Scintillation noise The stellar flux exhibits fluctuations due to atmospheric turbulence [122], called scintillation. Generally, the scintillation is characterized by an index σ^2_I defined as the ratio of the flux variance to the mean flux squared. The scintillation perturbs the $ABCD$ counts just as well as the photon noise does, and hence is a source of noise in the AA measurements. However, only a specific portion of the scintillation temporal spectrum contributes to the noise, because the fluctuations on time scale longer than 5 ms affect all counts in the same way and do not change the phase. So, there is no unique relation between the r.m.s. scintillation phase noise σ_s and σ^2_I.

The solution of this problem consists in measuring the rapid contrast fluctuations, which are also related to the scintillation noise. As in case of photon noise, we suppose that the scintillation-induced fluctuations of $ABCD$ are mutually independent, and their relative r.m.s. amplitude is δ $(\frac{\sigma^2_A}{\overline{A}^2} = \frac{\sigma^2_B}{\overline{B}^2} = \frac{\sigma^2_C}{\overline{C}^2} = \frac{\sigma^2_D}{\overline{D}^2} = \delta)$. Then, taking into account both scintillation and photon noises, the Eq. (6.4) becomes :

$$\sigma^2_{ps} = \frac{\delta}{64\gamma^2}. \tag{6.5}$$

Using Eq. (6.2) to deduce the expression of the dispersion σ^2_γ of the measured contrast and the A, B, C, D mean counts as defined in the previous section $(\overline{A^2} = N^2(1+\gamma)^2(1+\delta)\,;\, \overline{B^2} = N^2(1+\gamma)^2 = \overline{D^2}\,;\, \overline{C^2} = N^2(1-\gamma)^2(1+\delta))$, leads to the expression for δ :

$$\delta = \frac{\sigma^2_\gamma}{1+0.5\gamma^2}. \tag{6.6}$$

Instead of using Eq. (6.4) we can estimate the photon noise from the contrast fluctuations using Eqs. (6.5,6.6). This technique works also when both those noise sources are present. We verified in the laboratory (with photon noise only) that when δ was estimated from the contrast fluctuations using Eq. (6.6), the product δN was within 20% from unity.

In data processing the contrast fluctuations are calculated as one half of the dispersion of the difference of two consecutive contrast values. We implicitly assume that additional sources of rapid contrast fluctuations (e.g. small-scale turbulence or very rapid telescope vibrations) are small ; if it is not the case, the photon and scintillation noises are overestimated.

Mechanical errors

Telescope guiding errors The AA are measured in the declination direction and hence must not be sensitive to guiding errors. However, a small slow component was still present in the signal of some modules. It arises presumably because of the mechanical coupling of telescope motions in hour angle and declination due to the imperfect worm-gear adjustment. The period of the hour drive worm is 4 min., and in the 2 min standard acquisitions a low frequency component appears as a half-period of a sinusoid. Fortunately, most of it is removed when a parabolic trend is subtracted.

Telescope high-frequency vibrations They are caused by the stepping of the hour drive which produces a fundamental frequency of 37.5 Hz. Its higher and lower harmonics are also seen in the spectrum of the AA signal. The existence of this vibration was already seen during the laboratory tests of the mount made with sensitive accelerometric equipment. However, the total power of vibrations is negligible compared to the AA fluctuations. Indeed, when those vibrations are removed during the processing by signal filtering the results obtained do not differ by more than their standard errors.

Modulation noise Modulation noise is the difference between the true and measured phases due to the imperfect validity of Eq. (6.1) : non-sinusoidal signal, non-linearity of photon counting, errors in the modulation amplitude, etc. Those errors were extensively discussed by Creath [43]. During the laboratory study the positions of the artificial star on the Ronchi grating were compared to those measured by GSM, and it was shown that the modulation error does not exceed 1% of the grating period [103]. The corresponding error of the AA variance is no more than 2%.

Statistical noise The statistical quantities like AA variance σ^2_α and covariance C_α are calculated from samples of finite size and hence contain statistical uncertainties. They cannot be computed simply from the sample size because at a sampling rate of 5 ms the individual AA values are not necessarily independent.

Statistical error of r_0 estimation If the AA measurements are accumulated during the time interval T, the relative error of the differential variance σ^2_{diff} is given by [15, 60] :

$$\frac{\delta\sigma^2_{diff}}{\sigma^2_{diff}} = \sqrt{2\frac{\tau}{T}}. \tag{6.7}$$

The parameter τ is an equivalent width of the AA correlation defined as :

$$\tau = \frac{1}{\left(C^2_{diff}(0)\right)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} C^2_{diff}(t)dt, \tag{6.8}$$

where $C_{diff}(t)$ is the temporal cross-correlation of the AA difference at two apertures i and j (for r_0 measurements $i = 1$ and $j = 2$),

$$C_{diff}(\tau) = \langle(\alpha_i(t) - \alpha_j(t))\ (\alpha_i(t+\tau) - \alpha_j(t+\tau)\rangle = 2[C_{ii}(\tau) - C_{ij}(\tau)]. \tag{6.9}$$

Here $C_{ii}(\tau)$ is the AA temporal autocorrelation function of the pupil i and $C_{ij}(\tau)$ is the temporal cross-correlation of AA at the two apertures i and j ; they are defined as :

$$\begin{aligned} C_{ii}(\tau) &= \langle \alpha_i(t)\alpha_i(t+\tau)\rangle, \\ C_{ij}(\tau) &= \langle \alpha_i(t)\alpha_j(t+\tau)\rangle. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Using the results of Avila et al. [11] we computed the AA difference cross-correlation time τ for the Von Karman turbulence model and Taylor hypothesis (for a 10 cm circular pupil). It depends on the outer scale $\mathcal{L}_0$, on the wind velocity $\vec{v}$ and on the baseline. In the case of La Silla GSM campaign ($v \approx 10$m/s and parallel to NS direction, $\mathcal{L}_0 \approx 24$ m and baseline of 25 cm) τ is equal to 24ms. For the GSM integration time $T = 120$ s the relative error of the AA differential variance is hence equal to 2% and the statistical relative error of the r_0 estimation ($\frac{\delta r_0}{r_0} = \frac{3}{5}\frac{\delta\sigma^2_{diff}}{\sigma^2_{diff}}$) is equal to 1.2%.

Statistical error of $\mathcal{L}_0$ estimation The outer scale $\mathcal{L}_0$ is deduced from the AA normalized covariance Γ [11]. We take into account the statistical errors of both covariance and its normalization factor and arrive to the following formula[15] :

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma} = \sqrt{\frac{\tau}{T\,\Gamma^2} + \frac{\tau_c}{T}}, \tag{6.11}$$

where τ is defined by Eq. (6.8). The time constant τ_c is related to the temporal cross-correlation $C_{ij}(t)$ of AA at the two apertures i and j defined in Eq. (6.10) :

$$\tau_c = \frac{1}{C^2_{ij}(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{ij}(t)\, C_{ij}(-t)\, dt \qquad \text{with} \quad i \neq j \text{ and } i, j = 1, 2, 3, 4. \tag{6.12}$$

The time constant τ_c was evaluated in the case of the Von Karman model and frozen turbulence (Taylor hypothesis). Indeed, using the study of Avila et al. [11] it has been shown that this parameter depends on the wind speed v, the outer scale $\mathcal{L}_0$ and the baseline. In the case of La Silla campaign, the τ_c values are between 108 and 275 ms for the mean atmospheric conditions ($v = 10$ m/s and $\mathcal{L}_0 = 24$ m) and baseline varying from 25 cm to 1 m. According to the Eq. (6.11) the statistical error of $\mathcal{L}_0$ depends on Γ and so one can not give its general estimation. Thus, for each particular $\mathcal{L}_0$ we deduce the corresponding error of Γ and consequently of $\mathcal{L}_0$.

Exposure time During data processing the exposure time can be artificially increased by binning the data. We used this option to show that temporal averaging for 5 ms has negligible effect on the computed AA covariances. However, it is important for AA variance and differential variance because their spectra have more power at high temporal frequencies. If this effect is not taken into account it introduces an important systematic bias, increasing the derived r_0 and $\mathcal{L}_0$.

In Fig. 6.6 (a) the dependence of the differential AA variance on the exposure time is shown for the 3 data sets with different ground wind speeds. Smooth curves fitted to the points suggest that we can extrapolate linearly the variance σ^2 to zero exposure time :

$$\sigma^2\,(0ms) = 2\sigma^2\,(5ms) - \sigma^2\,(10ms)\,. \tag{6.13}$$

This formula is incorporated in the standard data processing, thus eliminating the exposure-time bias.

On the other hand, the frequency bandwidth of stellar scintillation is known to be much higher than that of AA fluctuations. However, the same 5ms exposure time is used for both quantities. So, as shown in Fig. 6.6 (b) an even higher correction have to be applied to the scintillation index. Thus, to avoid this effect of the exposure time, the GSM measured scintillation index is corrected in the same manner than of AA fluctuations (Eq. (6.13)). With this correction, the isoplanatic angle deduced from the scintillation index (Sect. 6.1.1) is correctly estimated.

Martin [106] has studied the effect of a finite exposure time in order to explain the difference between longitudinal and transverse seeing measurements obtained with the Differential Image Motion Monitor (DIMM). We tried to fit the $\sigma^2(t)$ curves with theoretical curves as suggested by Martin [106], but with only partial success. The reason is that theoretical curves are computed for a single turbulent layer using the Taylor's frozen turbulence hypothesis, while in fact there are usually several layers with different wind speed and direction.

Effect of atmospheric turbulence model As explained above, the outer scale $\mathcal{L}_0$ is determined as a parameter of the Von Karman[93] turbulence model that fits the normalized AA covariances. Other models[37, 87, 88, 162], like Greenwood-Tarazano [62] (GT) one, have been proposed in the literature to describe the deviation of the turbulence spectrum from the inertial model of Kolmogorov-Tatarski[122] at low frequencies. Thus, the power spectra of the phase shift ϕ introduced by air-index fluctuations corresponding to these models are expressed as :

$$W_{\phi,VK}(f) = 0.0229\; r_0^{-5/3}\; (f^2 + \frac{1}{\mathcal{L}_0^2})^{-11/6}, \tag{6.14}$$

$$W_{\phi,GT}(f) = 0.0229\; r_0^{-5/3}\; (f^2 + \frac{f}{\mathcal{L}_0})^{-11/6}, \tag{6.15}$$

where f is the spatial frequency. A difference is expected when estimating $\mathcal{L}_0$ from both models, especially for large outer scale values. This is due to low frequency extrapolation difference between the 2 models. We reduced data using also the Greenwood-Tarazano model. In Fig. 6.7 we compare the corresponding outer scale estimates $\mathcal{L}_{0VK}$ and $\mathcal{L}_{0GT}$ for two nights. A very good correlation between these estimates is immediately seen ; a relation between these two parameters can be represented by a quadratic formula

$$\mathcal{L}_{0GT} = -5.544 + 1.588\mathcal{L}_{0VK} + 0.0037\mathcal{L}_{0VK}^2. \tag{6.16}$$

This formula can be used to transform GSM results into GT model. A more general correspondence between the outer scale parameters of different turbulence models is yet to be found, as well as the relation of these wavefront outer scales to the geophysical turbulence outer scale L_0. While this is not yet done, the $\mathcal{L}_{0VK}$ values provided by GSM can be used to derive the wavefront statistics, e.g. for the purpose of HRA techniques (AO and LBI) optimization.

Measurement of the isoplanatic angle θ_0 The isoplanatic angle θ_0 for adaptive optics is given by[79] :

$$\theta_0^{-5/3} = 114.7\lambda^{-2}\cos^{-8/3}(z)\int dh C_N^2(h)h^{5/3}, \tag{6.17}$$

where z is the zenith angle. It was noted in Refs. [79, 85] that θ_0 can be derived from the scintillation index measured with a 10 cm aperture. We review briefly the associated theory.

The scintillation index σ_I^2 (flux variance normalized by the square of mean flux) is related to the $C_N^2(h)$ turbulence profile by

$$\sigma_I^2 = 9.62\lambda^{-2}\int dh\, C_N^2(h)P(h), \tag{6.18}$$

where λ is the wavelength, h is the altitude, and $P(h)$ is a weighting function which depends on the pupil shape. For a circular pupil of diameter D with a central obscuration ratio ε the weighting function is

$$\begin{aligned} P(h) &= \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2}\int_0^\infty df\; f^{-8/3}\sin^2(\pi\lambda h f^2) \\ &\quad \times \left[\frac{2J_1(\pi D f)}{\pi D f} - \varepsilon^2\left(\frac{2J_1(\varepsilon\pi D f)}{\varepsilon\pi D f}\right)\right]^2, \end{aligned} \tag{6.19}$$

where f is the spatial frequency, J_1 is the first order Bessel function. It was shown in Ref. [122] that for small D, $P(h) \propto h^{5/6}$, while for large D, $P(h) \propto h^2$. It happens that for GSM pupil ($D = 10$ cm, $\varepsilon = 0.4$) $P(h)$ is rather close to the $h^{5/3}$ exponent required to measure the θ_0.

Thus we may write $P(h) \approx P(h_0)(h/h_0)^{5/3}$. It follows immediately that

$$\theta_0^{-5/3} = K\sigma_I^2, \tag{6.20}$$

where K is a constant given by

$$K = 11.93 \cos^{-8/3}(z) \frac{h_0^{5/3}}{P(h_0)}. \tag{6.21}$$

The parameter h_0 is defined as the altitude giving the same isoplanatic angle with both Eqs. (6.17) and (6.20) using $C_N^2(h)$ profiles. Indeed, with Hufnagel's average C_N^2 profile corresponding to night-time conditions[72] and the GSM weighting function, the altitude h_0 obtained is equal to 10 km. This result was confirmed with C_N^2 profiles obtained with SCIDAR on San Pedro Màrtir Observatory[10] (Mexico).

The scintillation index is calculated from GSM data as a normalized dispersion of the sum of $ABCD$ counts (so that the flux modulation with Ronchi grating is annulated). It is corrected for the finite exposure time in the same manner as the AA variance (Eq. (6.13)). Of course, GSM was not originally designed for the scintillation measurements. During the Maidanak campaign the scintillation measurements were made simultaneously with a 4-channel stellar photometer[78] in the B, V, R photometric bands with time resolution of 1 ms. An aperture was exactly the same as that of GSM, stars near zenith were used. In Fig. 6.8 a very good agreement is seen between the isoplanatic angles measured with both these instruments, despite a fairly large correction of GSM data for zenith angle (it observed Polar star with $z = 52°$). Thus the isoplanatic angle measurements with GSM seem to be well validated.

Fig. 6.9 presents the isoplanatic angle measurements for $\lambda = 0.5$ μm obtained during La Silla campaign. From those measurements one can remark that θ has a log-normal statistics.

Spatio-temporal analysis

The temporal cross-correlation of the AA fluctuations measured with GSM modules i and j separated by a baseline $\vec{B}$ is defined as :

$$C_{ij}(\vec{B}, \tau) =< \alpha_i(\vec{r}, t)\alpha_j(\vec{r} + \vec{B}, t + \tau) >, \tag{6.22}$$

where $i, j = 1, 2, 3, 4$ and $i \neq j$. Assuming that the whole atmosphere is a frozen turbulence moving with a wind speed $\vec{v}$ (Taylor hypothesis), the temporal cross-correlation in Eq. (6.22) is reduced to a spatial covariance [11] :

$$C_{ij}(\vec{B},\tau) = C_{ij}(\vec{B} - \vec{v}\tau) \tag{6.23}$$

The shape of the cross-correlation is characterized by a single peak delayed with $\Delta\tau_{ij}$ which is equal to the transport time of the eddies from pupil i to pupil j. The delay $\Delta\tau_{ij}$ is related to the projection of the wind on the baseline [11, 36] :

$$\Delta\tau_{ij} = \frac{B_{ij}cos(\varphi_{ij} - \eta)}{v}, \tag{6.24}$$

where B_{ij} is the modulus of the baseline, ϕ_{ij} is its angle relative to the direction of AA measurements, v is the modulus of the wind speed and η is its direction.

Measurements at two non-colinear baselines (two different φ_{ij}) are necessary to determine the coordinates (v, η) of the wind speed vector. GSM with 6 baselines (Fig. 6.10) offers 11 different $\Delta\tau_{ij}$ measurements (we neglect 4 baseline pairs which are parallel or nearly parallel) which is enough to have a good accuracy of the wind speed determination. Thus, the wavefront lifetime for adaptive optics and Michelson interferometry can be deduced [124].

Now, in the case of an atmosphere stratified in different turbulent layers, the AA cross-correlations display several peaks. Each peak corresponds to a turbulent layer, its localization is related to the layer wind speed (Eq. 6.24) and the height of the peak is related to the energy in this layer. In the case of multilayer turbulence we choose the predominant layer (the highest peak) to estimate the wind speed vector $\vec{v}(v, \eta)$.

Results of the AOP measurements with GSM and $\mathcal{L}_0$ statistics

The summary of the different campaigns made with GSM is presented in Table 6.1. All atmospheric parameters are calculated for the wavelength $\lambda = 0.5\,\mu m$. We draw attention to the larger number of measurements at La Silla and at Cerro Paranal, compared to other sites. Another remark is that the mean values of outer scale $\mathcal{L}_0$ at all visited sites are rather similar with different dispersions. The distributions of the AOP ϵ_0, $\mathcal{L}_0$ and θ_0 are well fitted by a log-normal law.

The poor seeing ($\sim 1.7''$) measured at La Silla was due to the jet stream conditions which prevailed during our mission. The reputation of the sites having good seeing conditions is confirmed, especially for Maidanak observatory ($0.69''$). From Table 6.1 one can remark that the correlation between outer scale and seeing is not significant. Some anti-correlation between the mean seeing and the mean isoplanatic angle (or scintillation) may be noted. However, during the Maidanak campaign the measurements of the free-atmosphere seeing were obtained by a new scintillation-based technique[151] and demonstrated that the seeing was dominated by the contribution from the boundary layer.

Figure 6.11 presents the $\mathcal{L}_0$ measurements obtained during one night (09/14/1997) at La Silla observatory (Chile). These measurements are presented with error bars estimated in two different ways. The first error bars (limited by triangles in Fig. 6.11) are obtained by taking into account all GSM instrumental errors studied above. A second estimate of errors (limited by bars in Fig. 6.11) is obtained by computing the $\pm\sigma$ uncertainty from the scatter of $\mathcal{L}_0$ at 6 baselines. One can remark that the "instrumental" error bars are larger than the statistical ones.

For the first time it is now possible to monitor $\mathcal{L}_0$ with GSM, to follow its temporal evolution and its changes from one observatory to another. At the time scale of one night the $\mathcal{L}_0$ presents decametric values with a log-normal distribution [104] and some bursts corresponding to a newly generated turbulence. These bursts have been noticed at all visited sites and last typically for few minutes. Similar bursts which lasted for few minutes have been detected in C_N^2 profiles by Avila et al. [10]. One can remark that during a typical night the $\mathcal{L}_0$ temporal variability is strong even without taking into account the bursts. It has been shown that $\mathcal{L}_0$ temporal variability is stronger than that of seeing. It means that for the optimization of Adaptive Optic systems and Long Baseline Interferometry observations it would be desirable to monitor the outer scale.

Fig. 6.12 shows the night by night evolution of $\mathcal{L}_0$ and ϵ_0 measurements obtained at the different sites visited by GSM. Each night is represented by the mean values of $\mathcal{L}_0$ and ϵ_0. The bars indicate intervals containing 68% of nightly values ($\pm 1\sigma$ of the log-normal nightly distributions). One can remark that the AOP have less temporal variability compared to one night measurements (Fig. 6.11).

Conclusions

The results presented here show the scope and quality of atmospheric measurements that can be carried out with the GSM. Indeed, for the first time the wavefront outer scale $\mathcal{L}_0$ was monitored continuously for several nights at different astronomical sites over the world. The GSM instrument provides also measurements of the seeing ϵ_0, the isoplanatic angle θ_0 and the wind speed of turbulent layers (to deduce the wavefront constant time τ_0). Thus, the GSM instrument is the first monitor providing almost complete characterization of astronomical sites for HAR techniques.

A quantification of the different error sources of the GSM has been done. Thus, we know how accurately the AOP are measured and error bars are provided for all GSM data. In addition, the effect of the model describing the atmospheric turbulence on the wavefront outer scale $\mathcal{L}_0$ estimation has been evaluated : results obtained using Von Karman and Greenwood-Tarazano models are different, but closely related to each other (Eq. 6.16).

The GSM instrument has already produced an important data bank for the major astronomical sites over the world : La Silla, Cerro Paranal, Cerro Pachon (Chile) ; Oukaïmeden (Morocco) and Maidanak (Uzbekistan). All these data are presently studied to compare the different sites, to analyze the temporal evolution of the atmospheric optical parameters and to investigate their correlations.

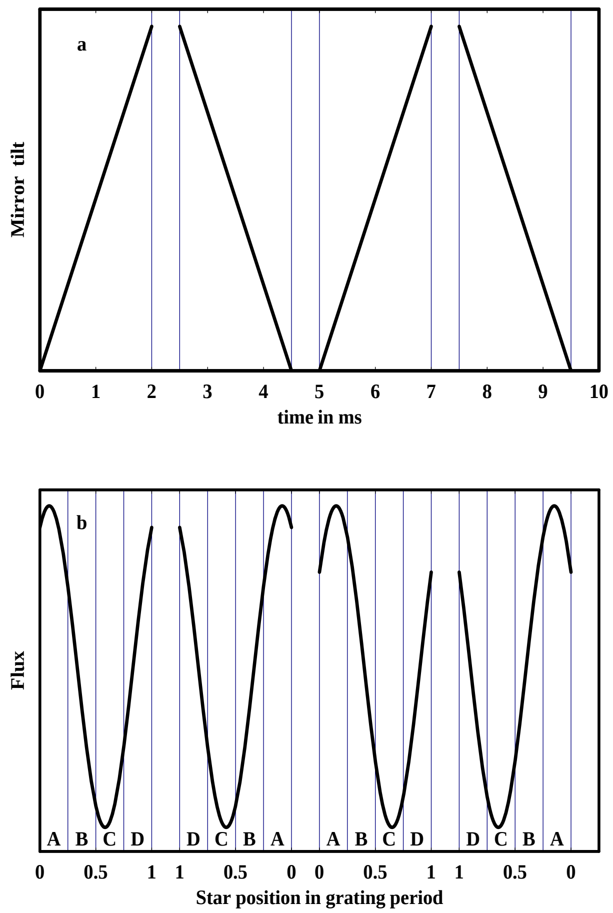


FIG. 6.3 – The signal detected by the GSM photomultiplier (b) corresponds to the transmitted flux of the star image during its displacement on a Ronchi grating. The image position is shifted by means of an oscillating mirror (a). A, B, C and D are photon counts integrated over 0.5 ms. The $ABCD$ counts for forward and backward scans are averaged to compute the phase shift of flux sinusoid corresponding to AA fluctuation.

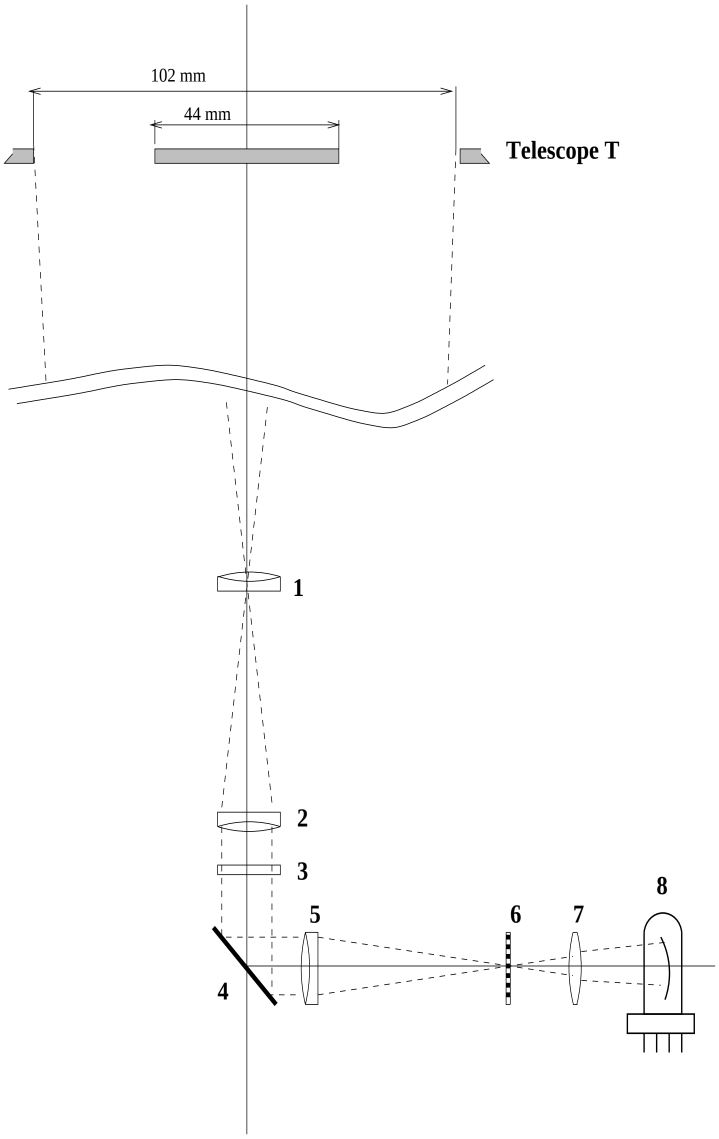


FIG. 6.4 – Optical scheme of each GSM module. The telescope is of Maksutov-Cassegrain type with 10 cm diameter, 1) field lens, 2) collimating lens, 3) cylindric lens, 4)modulating mirror, 5) focusing lens, 6) Ronchi grating, 7) Fabry lens, 8) photomultiplier.

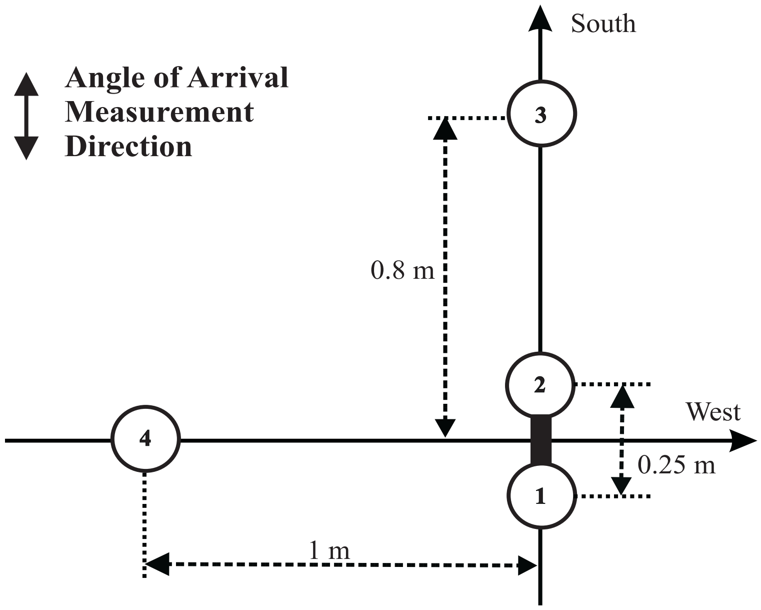


FIG. 6.5 – GSM configuration : modules 1 and 2 are installed on the same mount and work in a differential mode.

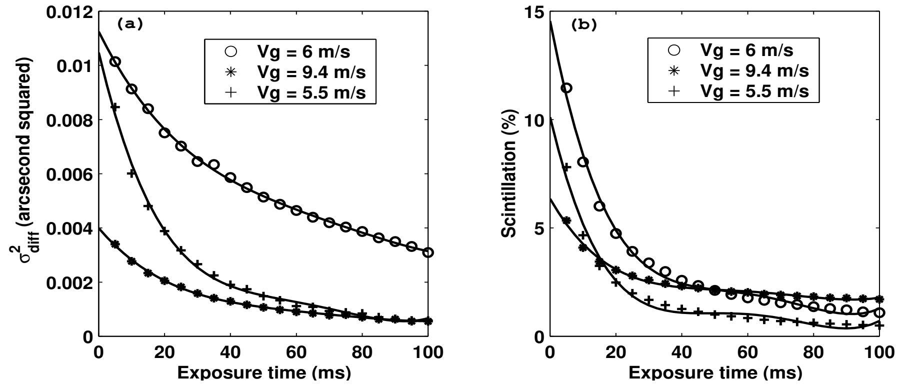


FIG. 6.6 – Effect of the finite exposure time on the measured AA differential variance (a) and on the scintillation index (b) for different wind speed V_g at ground level. In each case the wind was parallel to the baseline. The data have been obtained at La Silla observatory during the campaign of August/September 1997 and binned during processing to increase the exposure time.

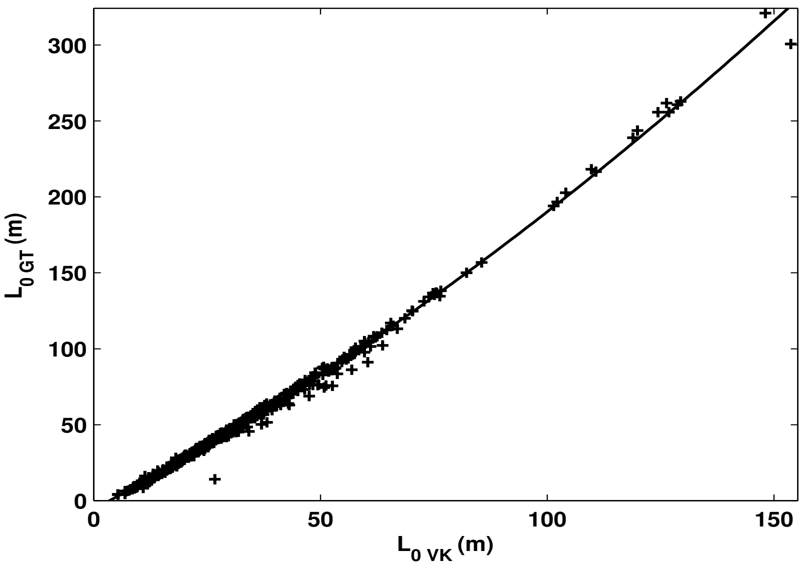


FIG. 6.7 – Effect of the atmospheric turbulence model on $\mathcal{L}_0$ estimation with GSM. $\mathcal{L}_{0VK}$ and $\mathcal{L}_{0GT}$ are the outer scale values obtained using the Von Karman and Greenwood-Tarazano models, respectively. The data have been obtained during the campaign of August/September 1997 at La Silla observatory.

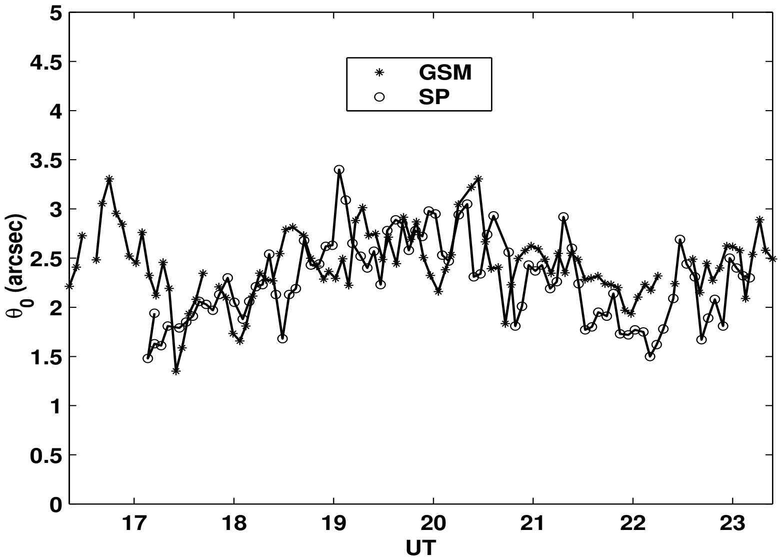


FIG. 6.8 – Isoplanatic angle measurements obtained with GSM (stars) at Maidanak observatory during the night of 07/22/98. The measurements of θ_0 obtained simultaneously using a scintillometer (circles) are presented for comparison.

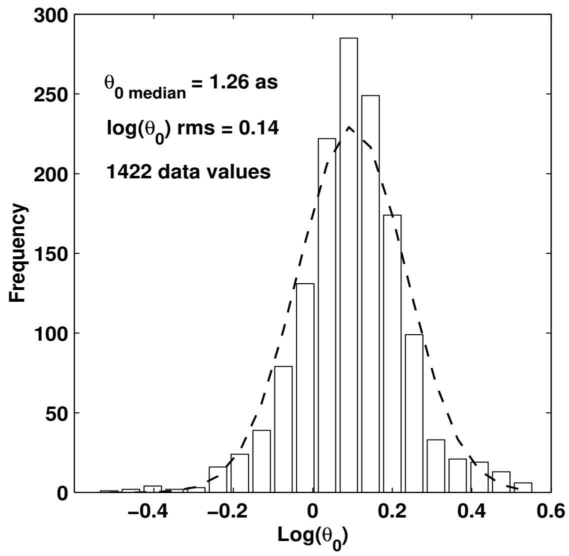


FIG. 6.9 – The distribution of isoplanatic angle θ_0 (in arcseconds) measured with GSM at La Silla observatory in August/September 1997. These data are well fitted with a log-normal distribution.

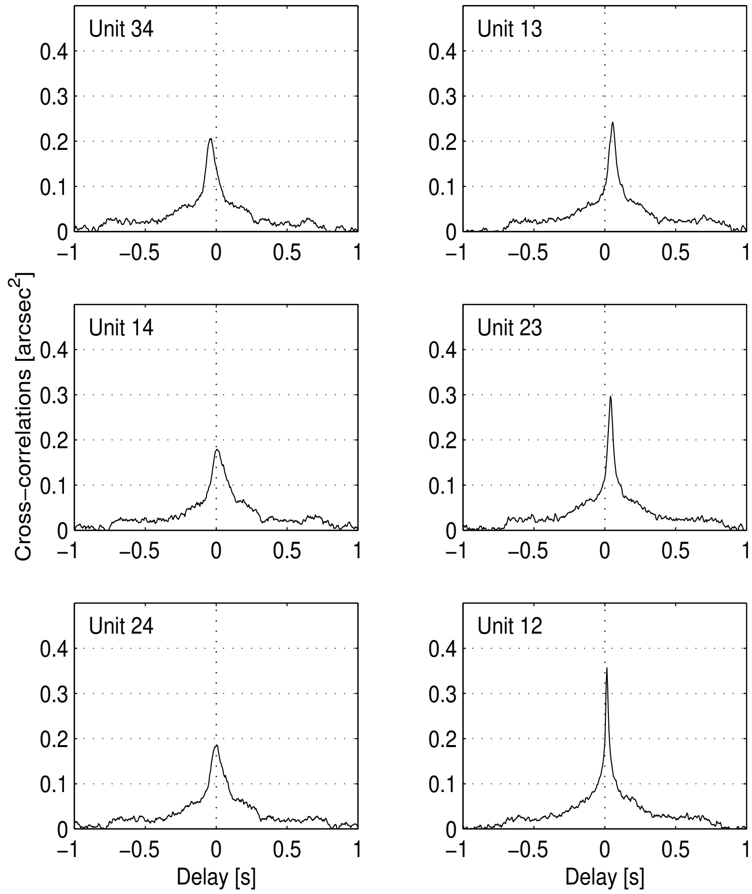


FIG. 6.10 – Example of temporal cross-correlations of angle of arrival fluctuations obtained with the 6 GSM baselines at La Silla observatory (09/18/97 at 01 :38 UT). The peak positions are used to reconstruct the turbulent layer wind speed vector.

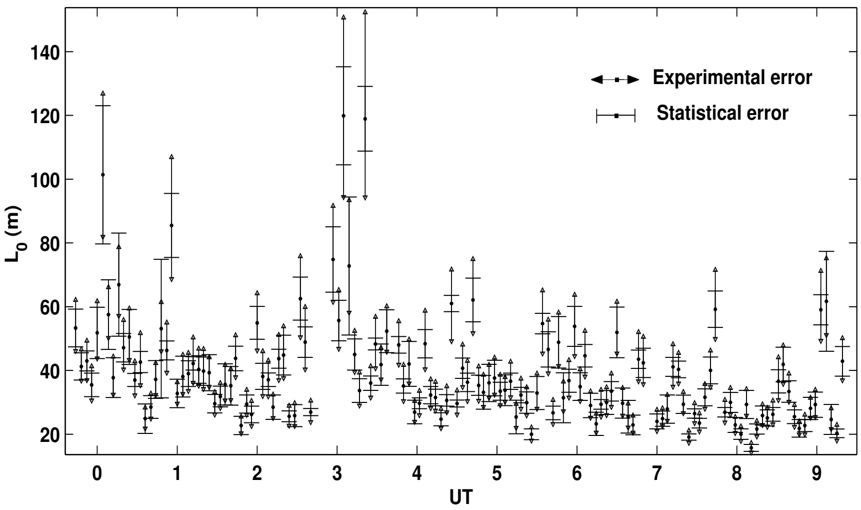


FIG. 6.11 – Outer scale measurements obtained with GSM at La Silla observatory during one night (09/14/97). The errors of individual measurements are deduced both from the 6 baseline statistical r.m.s. dispersion (plotted as bars) and from the GSM global error (plotted as triangles).

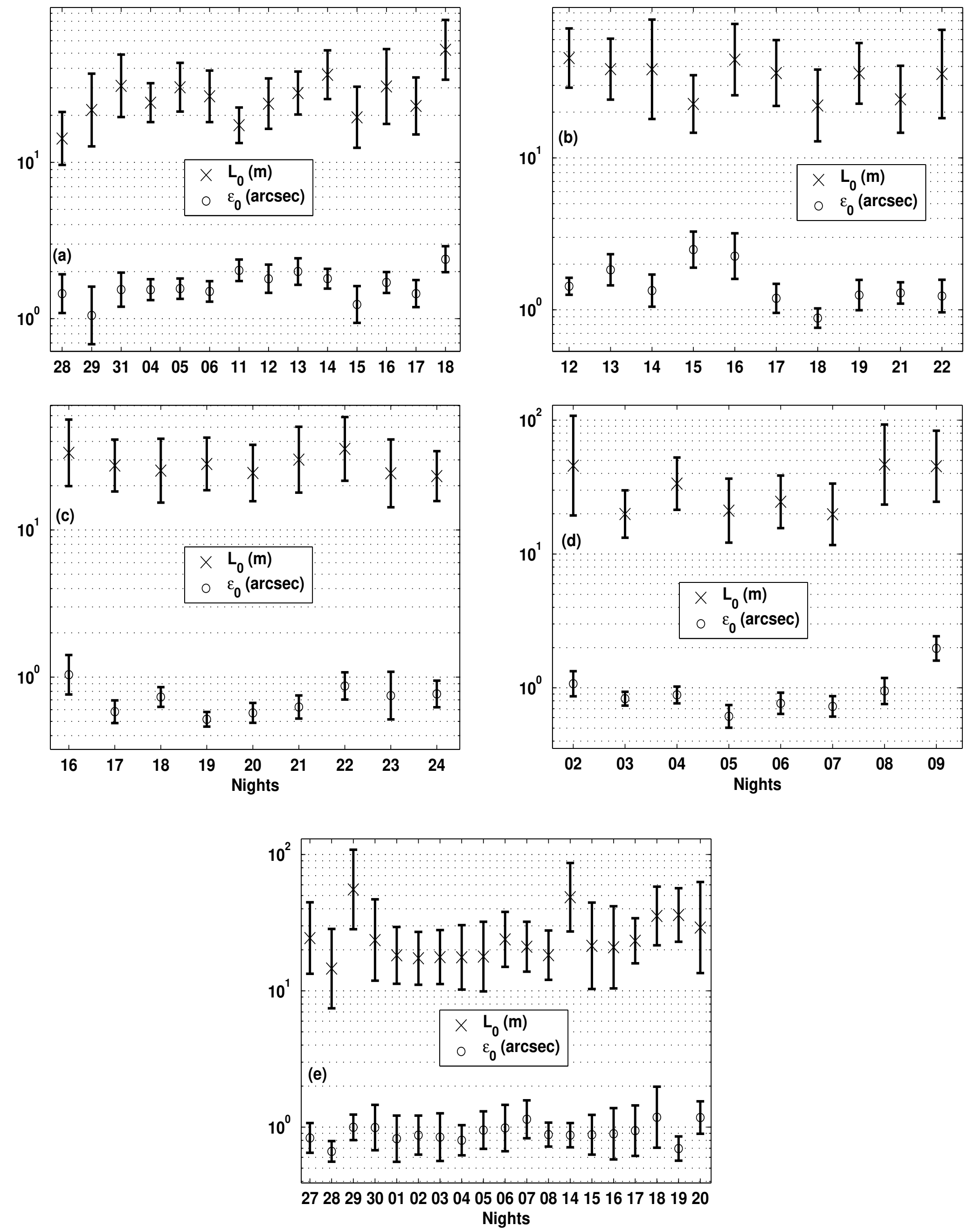


FIG. 6.12 – Outer scale and seeing measurements obtained with GSM at different sites : a) La Silla, b) Oukaïmeden c) Maidanak, d) Cerro Pachon, e) Cerro Paranal. The bars indicate intervals containing 68% of parameter values for each night ($\pm 1\sigma$ of the log-normal nightly distributions).

TAB. 6.1 – Data summary of the sites visited by GSM. Each campaign is charaterized by the mean values (deduced from logarithmic means of the AOP log-normal distributions) of the AOP parameters at $\lambda = 0.5\,\mu m$ and at the zenith. The values given between brackets indicate the interval limits, from the mean value, comprising 68% of each parameter nightly values ($\pm 1\sigma$ of the log-normal nightly distributions)

Site	Date	Number of data	Seeing ε_0 (as)	Outer scale $\mathcal{L}_0$ (m)	Isoplanatic angle θ_0(as)	Scintillation index (%)
La Silla (Chile)	08/26/97 09/20/98	1422	1.64 (-0.41,+0.55)	25.5 (-10.2,+17.0)	1.25 (-0.34,+0.46)	4.61 (-1.87,+3.14)
Oukaïmeden (Morocco)	04/10/98 04/25/98	643	1.37 (-0.41,+0.58)	34.2 (-15.6,+28.8)	1.58 (-0.49,+0.70)	3.13 (-1.43,+2.65)
Maidanak (Uzbekistan)	07/16/98 07/25/98	846	0.69 (-0.18,+0.24)	27.6 (-10.7,+17.5)	2.47 (-0.59,+0.77)	1.48 (-0.54,+0.84)
Cerro Pachon (Chile)	10/02/98 10/09/98	616	0.89 (-0.27,+0.39)	28.4 (-13.3,+25.0)	2.71 (-0.85,+1.23)	1.27 (-0.59,+1.10)
Cerro Paranal (Chile)	11/27/98 12/20/98	1884	0.91 (-0.28,+0.40)	23.9 (-11.7,+22.8)	1.91 (-0.53,+0.73)	2.29 (-0.96,+1.65)

6.2 Traitement des données

6.2.1 Traitements en temps réel

Toutes les 5 ms, quatre mesures du flux modulé obtenues simultanément par chacun des modules sont enregistrés. Une série temporelle est acquise à cette cadence pendant une durée qui est habituellement fixée à 2 mn. Une fois ces 2 mn écoulés, le processus d'acquisition est arrêté pour permettre le traitement des données pendant à nouveau 2 mn.

Le programme de traitement suit différentes étapes :

1. La valeur du déphasage de la sinusoïde que forme la modulation du flux de l'étoile est calculée à partir de chacune des quatre mesures de flux. Un filtre digital corrige les sauts de phase si besoin est. La mise en station de chacune des montures équatoriales ne peut jamais être parfaite. Il en résulte une lente dérive de l'image de l'étoile sur la grille et par conséquent une dérive de la phase de la sinusoïde. Cette dérive est soustraite par l'ajustement d'une parabole au déphasage. Le déphasage est mesuré en unité de pas de grille, il est converti en radians en tenant compte de la valeur du pas de la grille de chacun des modules. A ce stade, on a quatre séries temporelles des AA prêtes pour l'analyse statistique qui nous donnera la valeur des paramètres que nous cherchons à mesurer.

2. Différentes grandeurs statistiques sont calculées pour chacun des modules :
   - la moyenne et la variance du flux,
   - la moyenne et la variance du contraste,
   - la variance des quatre séries temporelles des AA,
   - les six covariances spatiales obtenues pour les six bases formées par la configuration des quatre modules ; la configuration standard(mode qualification de site) des trois montures est rappelée sur la figure 6.13,
   - la variance de la série temporelle de la différence entre les AA mesurés par les deux modules portés par la même monture. Cette variance porte le nom de variance différentielle qui est équivalente à la fonction de structure des AA.

3. Cette étape concerne la détermination de l'échelle externe de cohérence spatiale $\mathcal{L}_\mathbf{0}$, du paramètre de Fried r_0, de l'indice de scintillation σ_I^2 et de l'angle d'isoplanétisme θ_0.
   - $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ est obtenue à partir des covariances spatiales des AA normalisées par la variance différentielle. Cette normalisation permet d'obtenir une quantité qui est fonction de trois paramètres seulement : $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ et les deux coordonnées de la base formée par deux modules. Pour les covariances normalisées expérimentales, les six bases sont connues, elles sont obtenues en projetant les bases au sol sur le front d'onde sauf pour la base formée par les deux modules partageant la même monture. Une base de données de covariances normalisées théoriques a été calculée au préalable pour un ensemble de valeurs de la base et de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$. Une interpolation dans cette banque de valeurs à partir des valeurs de la base et

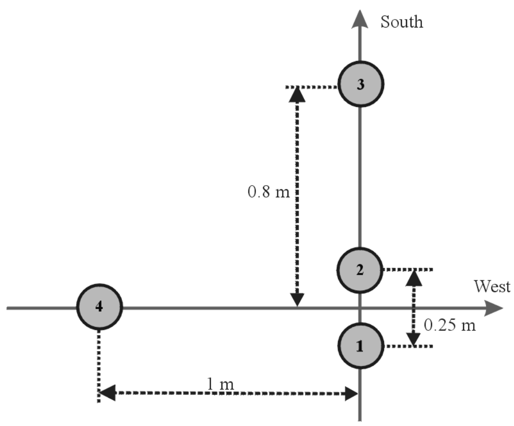


FIG. 6.13 – Configuration standard des quatre modules qui composent GSM. La configuration standard correspond au mode qualification de site de l'instrument.

de la covariance expérimentale donne la valeur de $\mathcal{L}_0$. La valeur finale de $\mathcal{L}_0$ correspond à la médiane des six valeurs obtenues par cette méthode.

- r_0 est déduit de la variance différentielle des AA. Cette variance est indépendante de $\mathcal{L}_0$ au premier ordre [169]. Il peut aussi être calculé à partir de la variance des AA de chaque module mais cette mesure est moins précise car plus sensible aux vibrations du télescope. De plus, dans ce cas, r_0 doit être corrigé de l'effet de l'échelle externe [169]. La comparaison des deux mesures qualifie l'importance des vibrations.
- σ_I^2 est égale au rapport de la variance du flux sur le carré de la moyenne du flux.
- θ_0 est déduit de l'indice de scintillation σ_I^2 suivant une méthode proposée par Loos & Hogge [85, 79]. Cette méthode est basée sur la constatation que l'angle d'isoplanétisme donné par l'Eq.(3.63)

$$\theta_0^{5/3} \simeq \lambda^{-2} \int \mathrm{d}z C_n^2(z) z^{5/3} \tag{6.25}$$

est proportionnelle à l'indice de scintillation (Eqs.(3.72) et (3.74))

$$\sigma_I^2 \simeq \lambda^{-2} \int \mathrm{d}z C_n^2(z) F(z) \tag{6.26}$$

si $F(z)$ est proportionnelle à $z^{5/3}$. $F(z)$ est une fonction de pondération qui dépend de l'instrument. Pour GSM, cette condition est bien vérifiée lorsque l'on tient compte du filtrage imposé par la taille du diamètre des télescopes et de l'obstruction centrale.

6.2.2 Traitements en temps différé

Les programmes informatiques de traitements des données présentés dans la section précédente donnent au cours de la nuit les paramètres de contrôle de GSM ainsi que les différents paramètres optiques de la turbulence. Au retour de mission, il était nécessaire de posséder un ensemble de programmes pour l'analyse statistique de ces paramètres.

J'ai réalisé l'ensemble des programmes permettant de parcourir la base de données constituée par les différentes campagnes du GSM, de visualiser et d'analyser les différents paramètres qui la constituent. Cet outil informatique a fourni la presque totalité des illustrations des rapports et des articles qui présentent les résultats des campagnes de mesure du GSM.

Tous ces programmes ont été écrits dans le langage Matlab ainsi que l'interface conviviale qui permet d'y accéder. Le choix de ce langage s'est imposé pour sa vaste bibliothèque de fonctions adaptées aux traitements des données ainsi que pour son importante bibliothèque graphique.

Les Figs.(6.14) et (6.15) présentent respectivement l'utilisation de l'interface avec les programmes de traitement “post–mission” ainsi qu'un résumé de l'action de chaque programme et l'ensemble des graphiques que l'on peut obtenir à partir de ces programmes. Pour chaque graphique, la combinaison des menus conduisant à la création de la figure est donnée.

Le principe d'utilisation de l'interface est le suivant. Il faut d'abord choisir une mission puis ensuite choisir un programme de traitement des données soit sur toutes les valeurs mesurées pendant la mission soit sur toutes les valeurs mesurées pendant une nuit. Lorsque qu'une mission ou une nuit a été sélectionnée et qu'un programme de traitement a été lancé, l'ensemble des paramètres enregistrés par le programme d'acquisition pendant la mission ou la nuit sélectionnée est sauvegardé dans l'espace de travail de Matlab. Ceci permet à chacun de créer ses propres programmes d'analyse en se servant de l'interface pour récupérer les données de la mission qui l'intéresse.

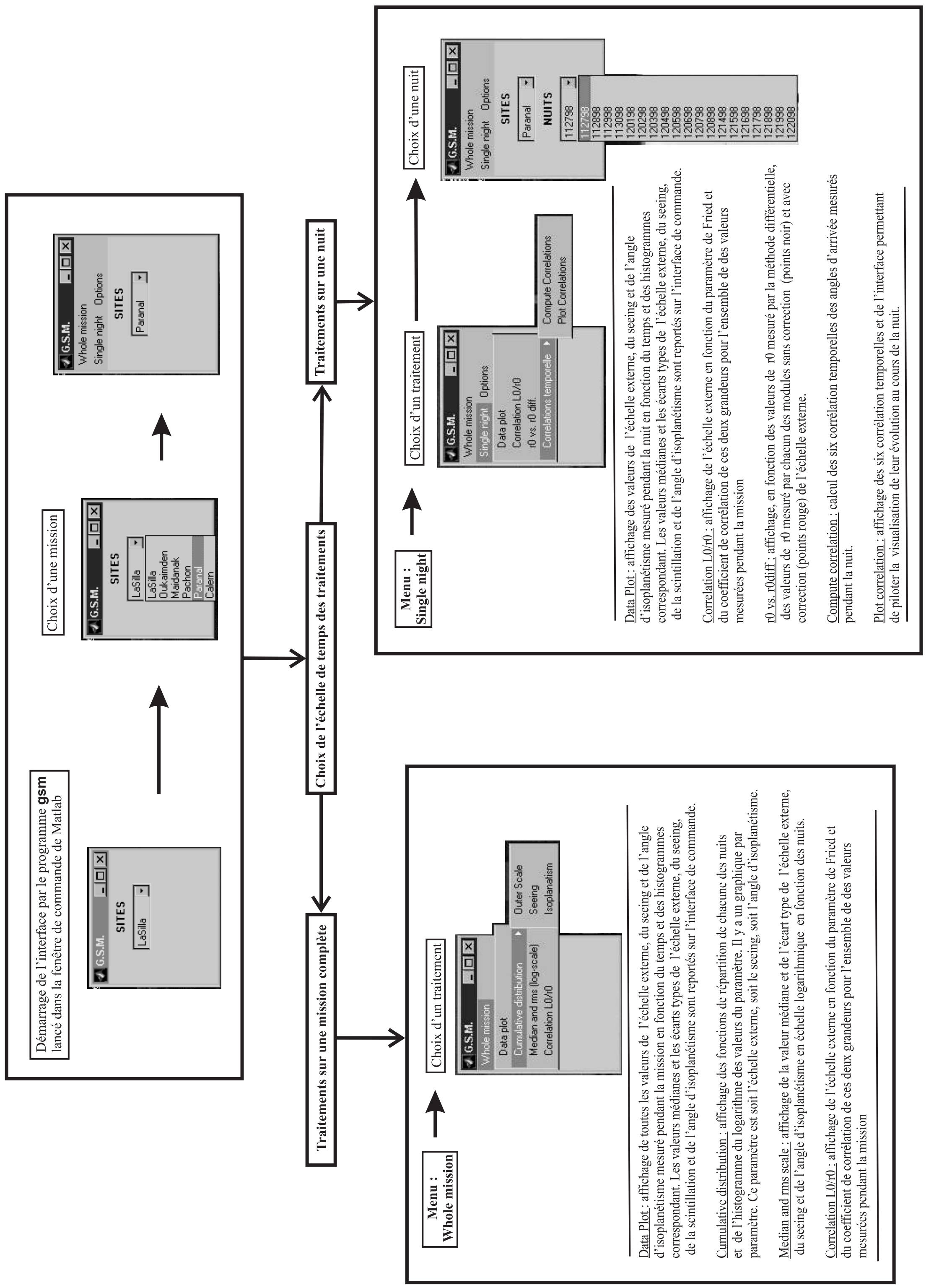


Fig. 6.14 – Utilisation de l'interface et des programmes pour l'analyse de la base de données de GSM.

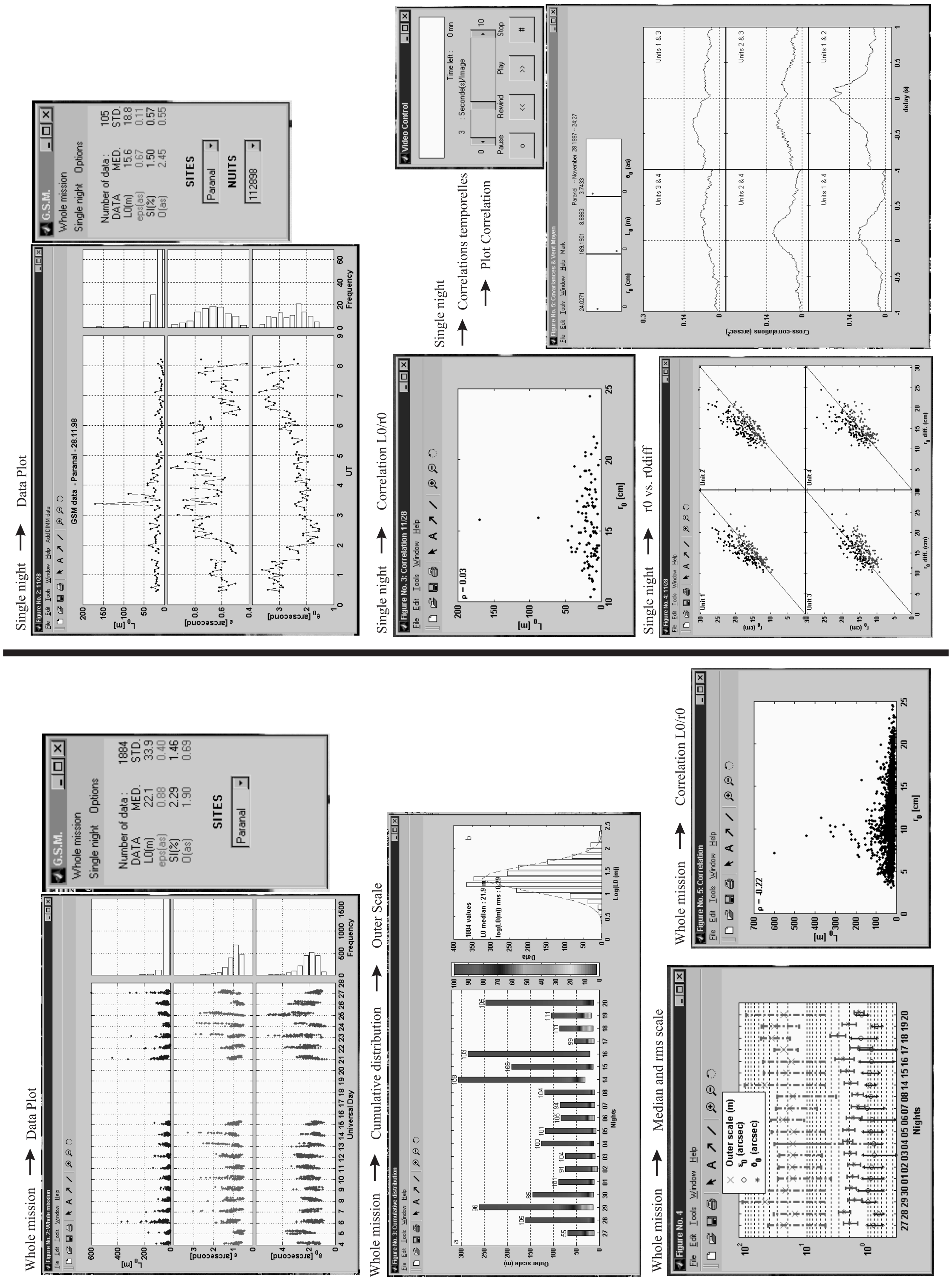


FIG. 6.15 – Exemples des graphiques obtenues avec les programmes d’analyse de la base de données de GSM.

Chapitre 7

Qualifications de différents sites astronomiques avec le “Generalized Seeing Monitor”

Le GSM est opérationnel depuis Août 1997 date de sa première mission au Chili. L'année suivante, le GSM a été utilisé lors de quatre autres campagnes de mesures à travers le monde. La carte de la figure 7.1 présente les lieux et la chronologie des différentes missions. Depuis Novembre 1999, lorsque le GSM n'est pas en mission à l'étranger, il est basé au plateau de Calern, le site d'observation de l'Observatoire de la Côte d'Azur, où il est installé sur les rails de l'ancien interféromètre I2T[1] ce qui permet un déploiement rapide de l'expérience. Depuis son installation sur ce site, GSM a déjà travaillé à quatre reprises en parallèle avec l'interféromètre GI2T afin de fournir à ce dernier la valeur des paramètres optiques de la turbulence atmosphérique nécessaire à sa calibration.

Dans ce chapitre, je présente les résultats de chacune des missions du GSM.

7.1 Présentation des sites des campagnes de mesures du GSM

Les sites sont présentés par ordre chronologique. Chaque campagne de mesures est résumée avec deux figures en plus d'une photographie du GSM sur le site. Chaque figure comprend trois graphiques, un pour chacun des paramètres qui sont, du haut vers le bas, l'échelle externe $\mathcal{L}_{\mathbf{0}}$, le seeing ε déduit du paramètre de Fried selon l'Eq.(3.48) et l'angle d'isoplanétisme θ_0.

Les figures 7.3, 7.20, 7.23, 7.26, 7.29 et 7.38 présentent l'évolution de chacun des paramètres au cours de la nuit, site par site. Les valeurs médianes et moyennes de chaque nuit sont représentées par les symboles $\bullet$ et $\oplus$, respectivement. Les rectangles donnent

[1]Interféromètre à 2 Télescopes [121]

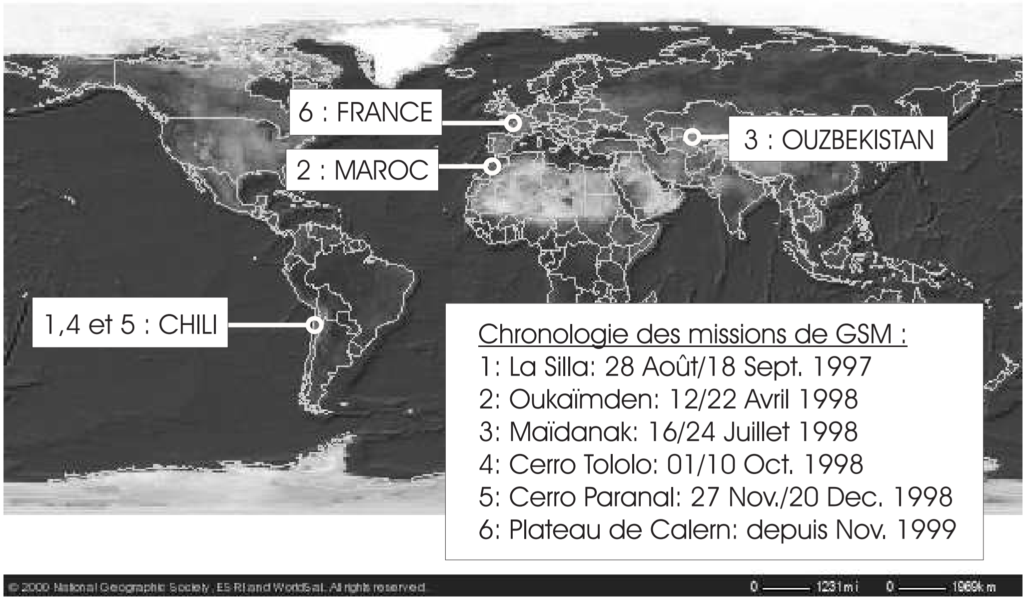


FIG. 7.1 – Chronologie et lieux des différentes campagnes de mesure de GSM.

Observatoire	Longitude	Latitude	Altitude [m]
La Silla	$70^o 44'$ W	$29^o 15'$ S	2400
Oukaïmden	$07^o 30'$ W	$31^o 15'$ N	2600
Maïdanak	$66^o 56'$ E	$38^o 41'$ N	2600
Cerro Tololo	$70^o 48'$ W	$30^o 09'$ S	2200
Cerro Paranal	$70^o 25'$ W	$24^o 40'$ S	2635
Calern	$06^o 56'$ E	$43^o 45'$ N	1270

TAB. 7.1 – Situation géographique des différents Observatoires ou le GSM a effectué une campagne de mesure.

l'intervalle qui contient 50% des valeurs mesurés pendant la nuit. Ils sont centrés sur la valeur médiane, il s'agit des valeurs comprises à l'intérieur du domaine [25% – 75%] de la fonction de répartition de ces données.

Les figures 7.4, 7.21, 7.24, 7.27, 7.30 et 7.39 donnent l'histogramme et la fonction de répartition de toutes les valeurs de chacun des paramètres mesurés pendant la mission.

Le tableau 6.1 récapitule pour chaque mission la durée totale de la mission, le nombre de mesures valides effectuées, les valeurs moyennes et la dispersion de l'échelle externe, du seeing, de l'angle d'isoplanétisme et de la scintillation.

7.1.1 Observatoire de La Silla (Chili) : 28 Août – 18 Septembre 1997

La mission à l'Observatoire de La Silla s'est effectuée dans le cadre du contrat ESO no. : ODG/97–6276. Les résultats de cette mission sont présentés dans le rapport contractuel remis à l'ESO [104] et ont fait l'objet de deux publications reproduites ci–dessous.

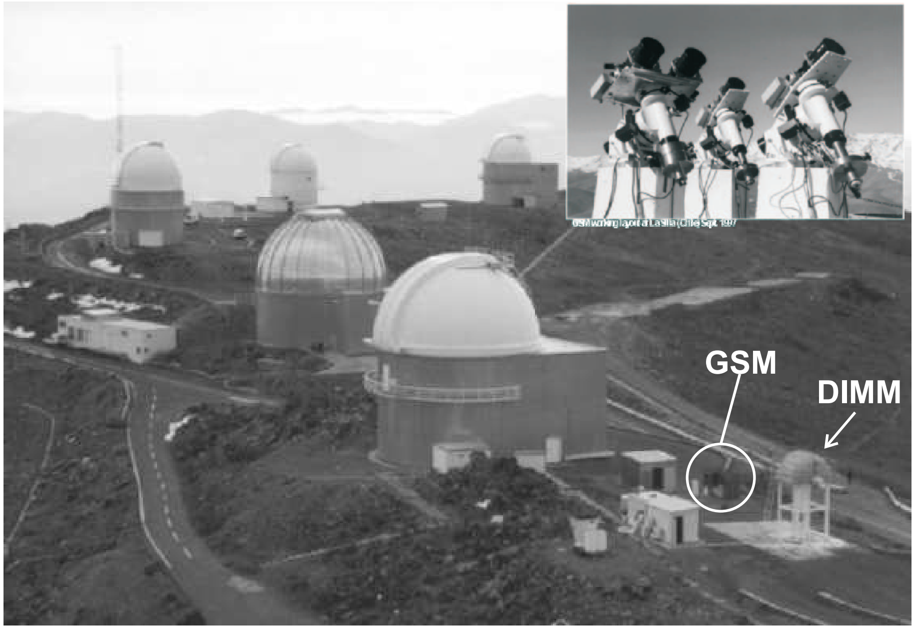


Fig. 7.2 – Situation du GSM à l'Observatoire de La Silla par rapport au DIMM et à divers instruments.

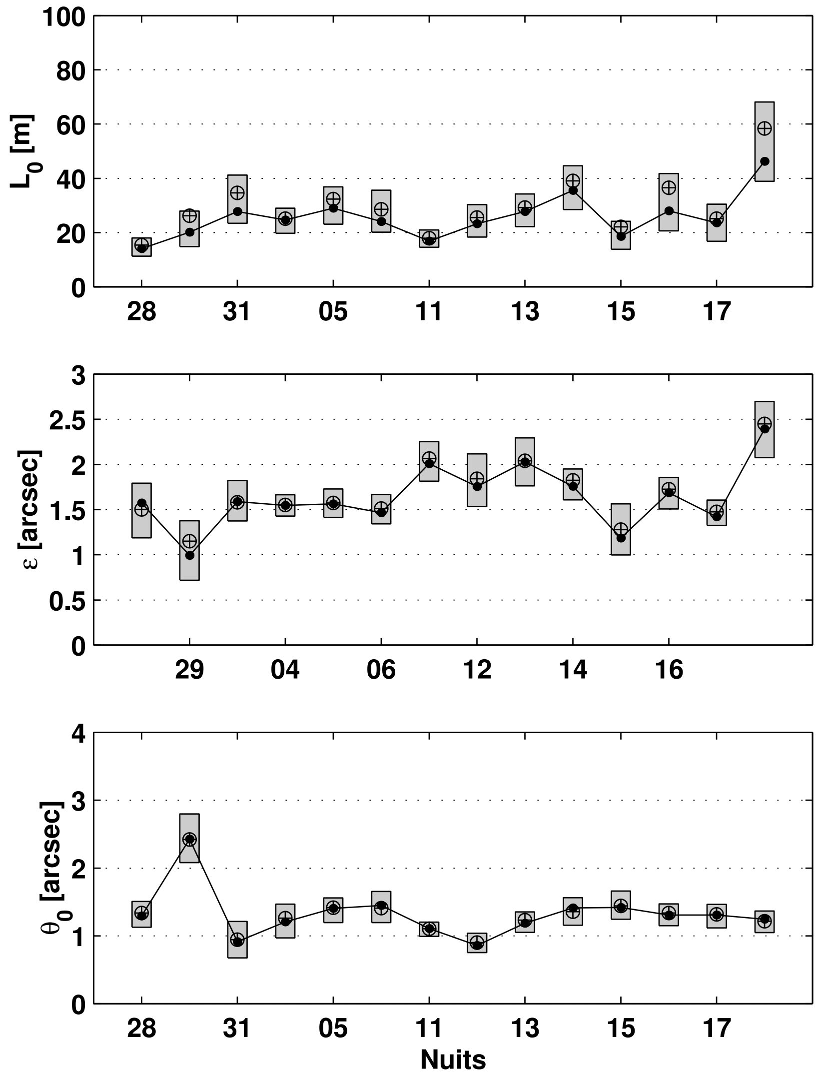


FIG. 7.3 – Evolution nuit par nuit des paramètres $\mathcal{L}_{\mathbf{0}}$, ε et θ_0 mesuré au moyen du GSM à l'Observatoire de La Silla. Les symboles $\bullet$ et $\oplus$ représentent les valeurs moyennes et médianes, respectivement. Les rectangles donnent l'intervalle qui contient 50% des valeurs centré, sur la valeur médiane.

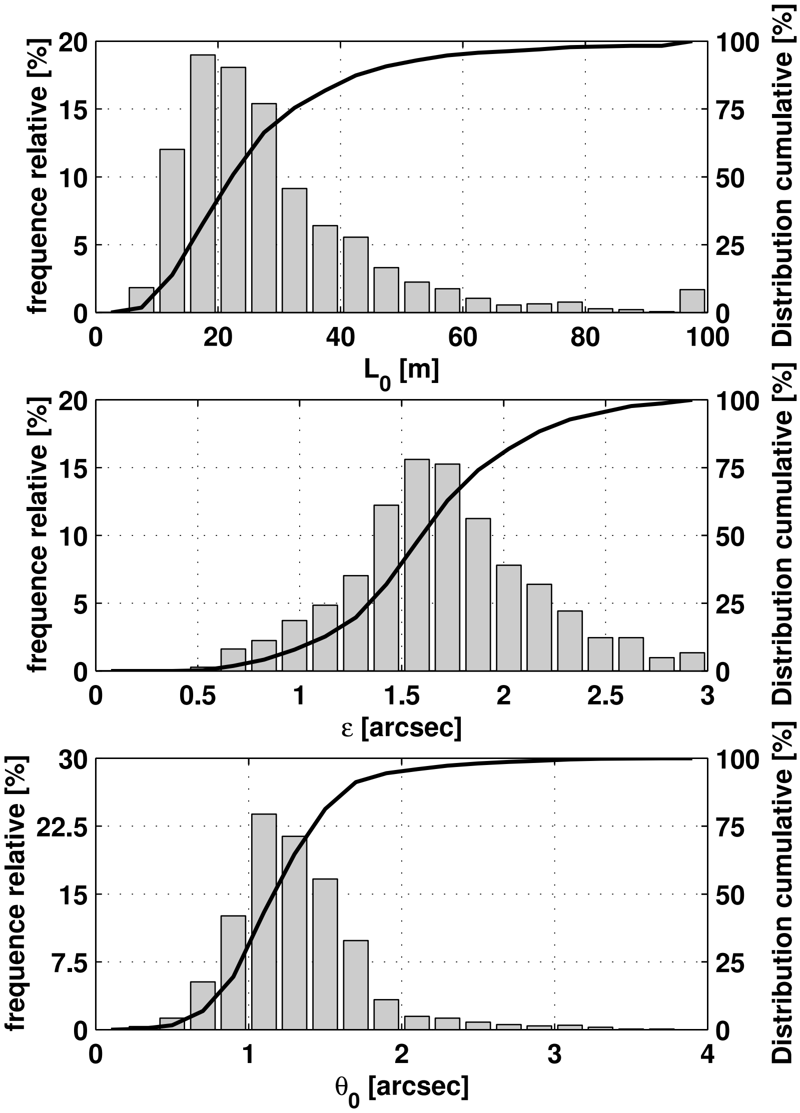


FIG. 7.4 – Histogramme et fonction de répartition de toutes les valeurs des paramètres $\mathcal{L}_\mathbf{0}$, ε et θ_0 mesurées au moyen du GSM à l'Observatoire de La Silla.

Article paru dans le procceding du Colloque Adaptive Optical System Technologies (SPIE, 3353) à Kona (Hawaii) en Mars 1998

Titre : Wavefront outer scale monitoring at La Silla

Auteurs : A. A. Tokovinin[1], A. Ziad[2], F. Martin[2], R. Avila[2], J. Borgnino[2], R. Conan[2], M. Sarazin[3]

Résumé : The effective wavefront outer scale $\mathcal{L}_0$ was monitored continuously during 16 nights in August-September 1997 using the new Grating Scale Monitor (GSM) instrument. Simultaneous comparison with the data from open-loop adaptive optics system on the ESO 3.6 m telescope revealed a good agreement of the $\mathcal{L}_0$ derived by both methods. The GSM principle is similar to the Shack-Hartmann sensor : angle of arrival fluctuations are measured with four 10-cm telescopes and the outer scale is computed from their normalized covariances. The seeing and effective wavefront velocity are measured as well. GSM does not suffer from dome and mirror seeing effects and can be used anywhere for site evaluation.

Outer scale has log-normal distribution, its median is found to be 24 m, with a rms scatter of $\log \mathcal{L}_0$ of ± 0.22. Short isolated bursts of high $\mathcal{L}_0$ values were sometimes observed. A weak correlation of $\mathcal{L}_0$ and seeing angle exists for some nights.

Decametric values of $\mathcal{L}_0$ found here imply that at baselines of few meters the influence of finite $\mathcal{L}_0$ on the energy balance between tip-tilt and higher-order modes must be properly taken into account. This can sensibly modify the predicted performance of adaptive optics systems.

INTRODUCTION The knowledge of the parameters of the optical turbulence in the atmosphere is essential for all high angular resolution techniques, e.g. adaptive optics (AO) and optical interferometry [122]. These parameters include the Fried coherence radius r_0, atmospheric time constant τ_0, isoplanatic angle θ_0 and the wavefront outer scale $\mathcal{L}_0$. This latter parameter was poorly known until recently. Here we present the first results of $\mathcal{L}_0$ monitoring at a major astronomical site during 16 nights.

The definition of $\mathcal{L}_0$ is related to the behaviour of the wavefront phase structure function $D_\phi(r)$. If for large r $D_\phi(r)$ saturates at a level $2\sigma_\phi^2$ (σ_ϕ^2 being phase variance), then $\mathcal{L}_0$ is defined as the distance where the extrapolated Kolmogorov phase structure function reaches this level :

$$6.88(\mathcal{L}_0/r_0)^{5/3} = 2\sigma_\phi^2. \tag{7.1}$$

The *wavefront outer scale* $\mathcal{L}_0$ can be represented as a weighted average of *turbulence outer scales* L_0 in the individual atmoshperic layers along a propagation path [23]. As shown by Lukin et al.[89], the real phase structure function resulting from a combination

[1]Sternberg Astronomical Institute, Universitetsky prosp., 13, 119899 Moscow, Russia

[2]U.M.R. Astrophysique N^o 6525 - C.N.R.S. - Université de Nice-Sophia Antipolis

[3]European Southern Observatory, Karl-Schwarzschild-Str. 2, D-85748, Garching bei München, Germany

of layers with different L_0 can be reasonably well approximated by a single "effective" outer scale, although its particular value depends on the baselines under consideration.

The saturation of $D_\phi(r)$ is actually never observed, so the definition (1) is of little practical use. Different heuristic models were proposed to describe the behaviour of the $D_\phi(r)$ in the transition region between the inertial range and the saturation. In the interpretation of our data we use the Von Kàrmàn turbulence model for which the spatial spectrum of the phase fluctuations can be written as

$$W_\phi(f) = 0.0228 r_0^{-5/3} (f^2 + \mathcal{L}_0^{-2})^{-11/6}, \tag{7.2}$$

where r_0 is the Fried parameter and $\mathcal{L}_0$ is the wavefront outer scale. The $\mathcal{L}_0$ values provided by GSM can be viewed as the values of Von Kàrmàn model parameter $\mathcal{L}_0$ that approximates $D_\phi(r)$ at metric baselines. If another model is used, it is important that its outer scale parameter satisfies (1), otherwise it would be impossible to intercompare different results.

The important deviation of $D_\phi(r)$ from Kolmogorov law occurs already at baselines $r \approx \mathcal{L}_0/10$. Decametric values of $\mathcal{L}_0$ reported below imply that AO systems with apertures above 1 m are subject to outer scale effects. For finite $\mathcal{L}_0$ the energy of wavefront perturbations is transferred to higher order modes. For a given r_0 the performance of AO system working on natural stars is degraded, as well as its isoplanatic angle, but a reduced amount of tip-tilt correction can improve the performance of a laser guide star AO system [166, 139, 163].

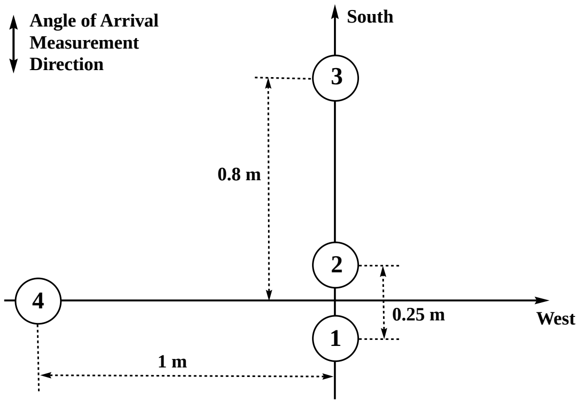


FIG. 7.5 – Geometrical layout of the GSM instrument at La Silla.

THE GSM INSTRUMENT Our approach to measuring $\mathcal{L}_0$ consists in the evaluation of the covariance between the angle of arrival fluctuations at two locations on the wavefront. If the direction of angle measurement is parallel to the baseline, the *longitudinal* covariance is obtained, which is roughly proportional to the second derivative of $D_\phi(r)$ over r. Thus, when $D_\phi(r)$ passes from the Kolmogorov growth to saturation, its second derivative and the longitudinal covariance become negative. These qualitative arguments apply for arbitrary baseline orientation. By measuring the angle of arrival covariance C_α at different baselines and adjusting the model parameter we estimate $\mathcal{L}_0$. The dependence of C_α on the baseline length B, angle γ between measurement direction and the baseline, telescope aperture diameter D, outer scale $\mathcal{L}_0$ and the Fried parameter r_0 for Von Kàrmàn model is given by the following integral [11] :

$$\begin{aligned} C_\alpha(B,\gamma,D,L_0) &= 0.0716\lambda^2 r_0^{-5/3}\int_0^\infty \mathrm{d}f f^3(f^2+\mathcal{L}_0^{-2})^{-11/6} \\ &\times[J_0(2\pi fB)-\cos(2\gamma)J_2(2\pi fB)][2J_1(\pi fD)/(\pi fD)]^2, \end{aligned} \tag{7.3}$$

where J_i are the i-th order Bessel functions of the first kind.

The Grating Scale Monitor (GSM) uses four 10-cm telescopes pointed to the same star. In each telescope the angle of arrival in one direction is measured by rapid modulation of stellar image falling onto a Ronchi grating and by the real-time processing of the transmitted light [103]. Simultaneous estimates of angle of arrival are obtained with a 5 ms sampling rate from which the covariances are computed. First measurements of $\mathcal{L}_0$ with this instrument are published by Agabi et al.[2] GSM can be viewed as a Shack-Hartmann sensor which operates without a large telescope and explores the wavefront structure on metric scales. Its data are not contaminated by dome or mirror seeing.

The angle of arrival covariance depends not only on $\mathcal{L}_0$ but also on the Fried parameter r_0. This is why we install 2 telescopes on a common mounting and estimate r_0 from the differential image motion variance σ_d^2, using the well known DIMM principle [135, 106]. All measured covariances are normalized by σ_d^2 in order to eliminate the dependence on r_0 and compared to the grid of pre-calculated normalized covariances. With 4 telescopes we have 6 baselines which provide 6 estimates of $\mathcal{L}_0$; a median of these is taken as a final outer scale value. We checked that the direct least-squares adjustment of $\mathcal{L}_0$ to fit the measured covariances leads to almost the same results. The projection effects are taken into account in data reduction : baselines and angle measurement direction are projected onto the sky before comparison with theoretical covariance grid. Data are processed immediately after the acquisition, permitting a quasi real-time monitoring of $\mathcal{L}_0$.

A common problem in angle of arrival (AA) measurements is related to possible telescope vibrations and imperfect guiding. GSM measures AA in the declination direction to minimize telescope tracking errors. A second order polynomial is fitted to the measured AA $\alpha(t)$ and subtracted in order to eliminate possible low-frequency contamination by mechanical errors. The high frequency contribution due to wind-induced vibration does not influence the differential variance σ_d^2. We assume that telescope vibrations are mutually uncorrelated and do not distort the covariances. An independent control of telescope vibration amplitude is provided by the comparison of r_0 as calculated from σ_d^2 with r_{0i} calculated for the i-th telescope from the angle of arrival dispersion and corrected for the finite outer scale using the relation [171]

$$\sigma_\alpha^2 = 0.179\lambda^2 D^{-1/3} r_0^{-5/3}[1 - 1.52(D/\mathcal{L}_0)^{1/3}]. \tag{7.4}$$

For the data set discussed below the vibrations are not apparent even at wind speed of 15 m/s.

The scintillation index σ_I^2 with 5 ms integration time can be computed from the GSM data to give the rough idea of the high-altitude turbulence strength and the isoplanatic angle [85]. In addition, we can estimate the effective wind speed and direction from the time delays at perpendicular bases. Thus, GSM can potentially provide the information on all turbulence parameters relevant to adaptive optics and interferometry.

LA SILLA MISSION Monitoring of $\mathcal{L}_0$ at the La Silla observatory (Chile) was performed from August 27 to September 19 1997, in the framework of the ESO VLT Astronomical Site Monitor development program. The 3 equatorial mounts with GSM telescopes were installed on 3 piers : two differential telescopes on a central pier and two remaining telescopes with their mounts on two piers to the south and east of the central pier at the distances of 0.8 and 1 meters, respectively (Fig. 1). These baselines were chosen for optimal sensitivity to the $\mathcal{L}_0$. The height of GSM telescopes above the ground was 1.7 m. GSM was located near the ESO DIMM instrument [135], approximately at the center of the mountain ridge. With the prevailing wind from the north this location should be free from local disturbances. Standard data acquisition sequence consisted of 2 minute integrations repeated every 4 minutes continuously during the night, with some gaps due to source change, cloud passages, etc.

Additional data on temperature, humidity, wind direction and speed near ground were taken from the ESO meteorological service. The seeing measured by the ESO DIMM is also available for comparison with GSM. Satellite images and wind maps at 200 mB were used for the assessment of the general meteorological situation. Most of the time the jet stream passed over La Silla. By consequence, the seeing was worse than average (median value 1.7″, accompanied by a strong wind and scintillation.

TEMPORAL BEHAVIOUR OF THE OUTER SCALE A typical temporal evolution of $\mathcal{L}_0$ during one night is shown in Fig. 2. A slow variation of $\mathcal{L}_0$ is usually observed, as well as isolated "bursts" of high outer scale. These bursts are noted here for the first time. They are typical of our data set, being more frequent on some nights, less frequent or absent on some other nights. Burst duration is few minutes, usually they are observed as one isolated high value of $\mathcal{L}_0$, rarely as two adjacent values.

The angle of arrival cross power spectrum calculated for any baseline typically shows the $-2/3$ slope at intermediate frequencies corresponding to the developed turbulence in the inertial range [11] (Fig. 3). We looked for the difference of the temporal cross-spectra corresponding to the different $\mathcal{L}_0$ and have not found any convincing evidence of them. A weak correlation between $\mathcal{L}_0$ and seeing exists for some (but not all) nights, as illustrated in Fig. 4. A correlation between nightly median values of $\mathcal{L}_0$ and seeing is rather evident, as well as $\mathcal{L}_0$ correlation with median ground wind speed (Fig. 5).

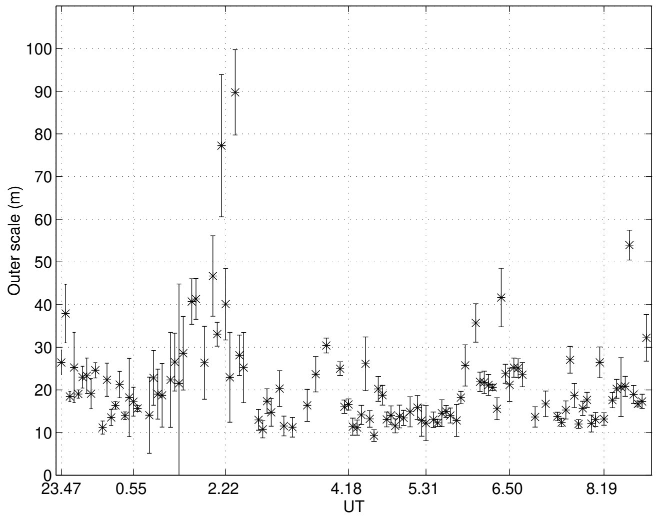


FIG. 7.6 – Temporal evolution of the wavefront outer scale $\mathcal{L}_0$ during the night of September 15/16. The error bars corresponding to the $\pm\sigma$ uncertainity were calculated from the scatter of $\mathcal{L}_0$ found for 6 different baselines.

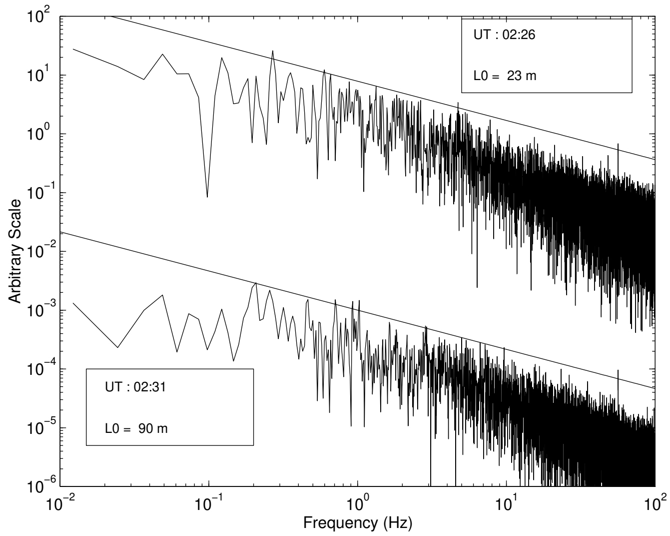


FIG. 7.7 – Temporal cross-power spectra of angle of arrival fluctuations recorded at 25 cm baseline for two consecutive 2-min data acquisitions corresponding to different $\mathcal{L}_0$ (the night of September 15/16). A $-2/3$ logarithmic slope is indicated by straight lines. Arbitrary vertical shift was introduced to separate the spectra. No significant difference in the shape of temporal spectra corresponding to different $\mathcal{L}_0$ can be seen.

In Fig. 6 we plot the median values of $\mathcal{L}_0$ for each night with the bars comprising 80% of nightly values. It can be seen that average outer scale and its scatter do change from

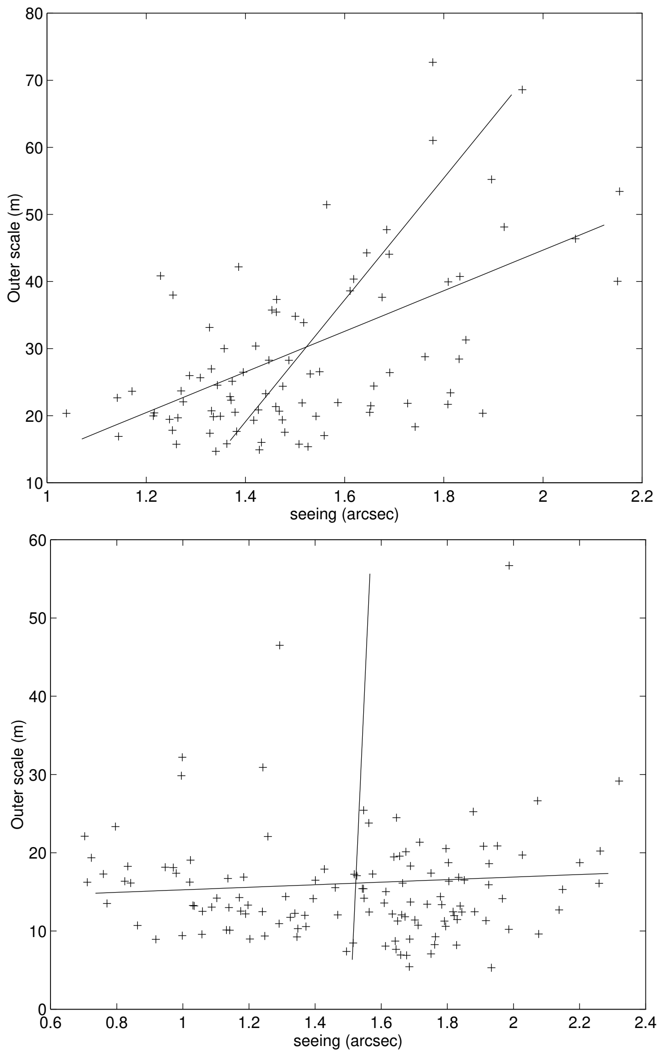


FIG. 7.8 – Wavefront outer scale $\mathcal{L}_0$ plotted against seeing angle for the nights of September 6/7 (top) and August 28/29 (bottom), together with the regression lines. Correlation coefficients are 0.55 and 0.01, respectively.

night to night. The overall distribution of $\mathcal{L}_0$ appears to be log-normal with a median of 24 m and a rms scatter of ± 1.67 times from the median.

It is interesting to note that the typical outer scale values are not very much different from the prediction of those turbulence models which assume that $L_0(h)$ in meters is equal to $2\sqrt{h[\mathrm{m}]}$ [66]. The seeing is usually dominated by the lowest kilometer of the atmosphere with the attendant decametric outer scales.

COMPARISON WITH ADONIS On the night of August 29/30 the data on wavefront statistics were recorded with the ADONIS AO system [120, 21] on the 3.6 m

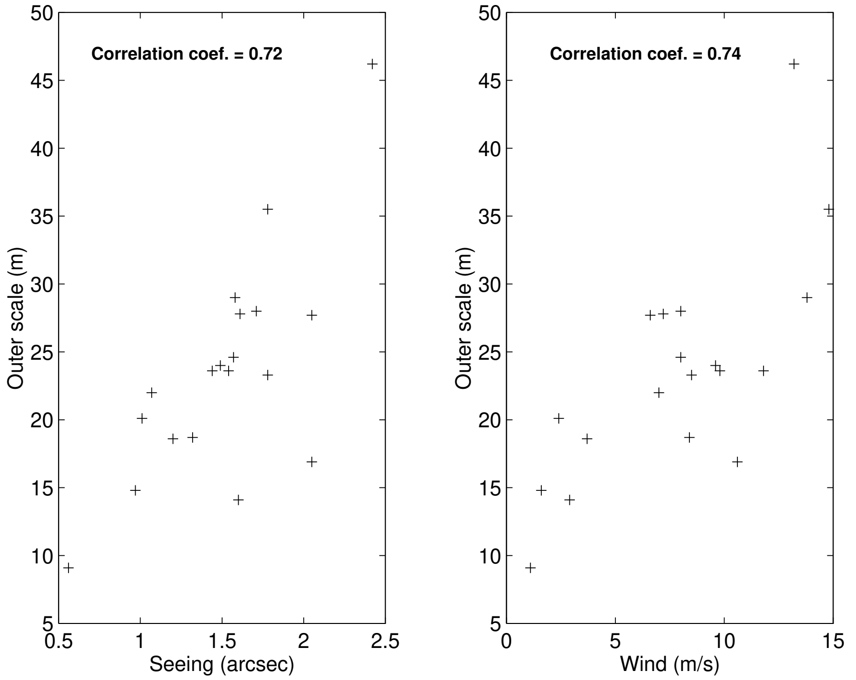


FIG. 7.9 – The correlation of nightly median values of $\mathcal{L}_0$ with median seeing and median ground wind speed.

ESO telescope during 1 hour. It worked with open servo loop. The AA variances on the individual Shack-Hartmann wavefront sensor sub-apertures and on the full telescope aperture were computed. Their ratio is used to derive $\mathcal{L}_0$ from Eq. (4). This method was first suggested in [171]. Of course, this approach is valid only when other sources of AA fluctuations, e.g. telescope tracking errors, can be neglected.

In Fig. 7, the simultaneous estimates of $\mathcal{L}_0$ and seeing with ADONIS and GSM are compared. The good agreement between these two instruments can be seen. Notably, ADONIS data also show typical decametric $\mathcal{L}_0$ values together with short bursts. However there is no detailed correlation between the two instruments because they were separated by more than 1 km and the altitudes were different. The agreement between the estimates of $\mathcal{L}_0$ which were obtained independently of each other and using different techniques is encouraging.

TEMPORAL EVOLUTION OF THE WAVEFRONT In attempt to characterize the temporal properties of the perturbed wavefront, we analyzed the temporal cross-correlation functions of AA fluctuations at different baselines (Fig. 8). They present typically a peak displaced from the coordinate origin due to the wind delay. The width of the peak increases with baseline. Combining all shifts, we can determine the "effective" wavefront velocity and its direction which for this example was 8.3 m/s, NNE (the ground wind speed as measured by ESO meteorological service was 3.7 m/s from

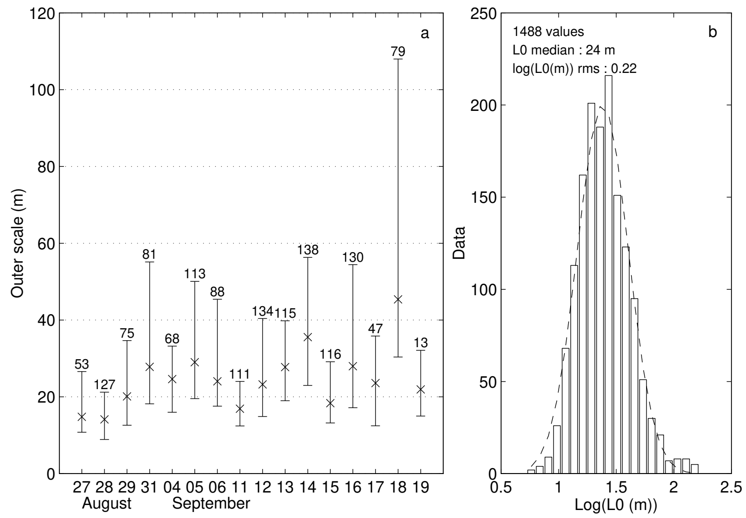
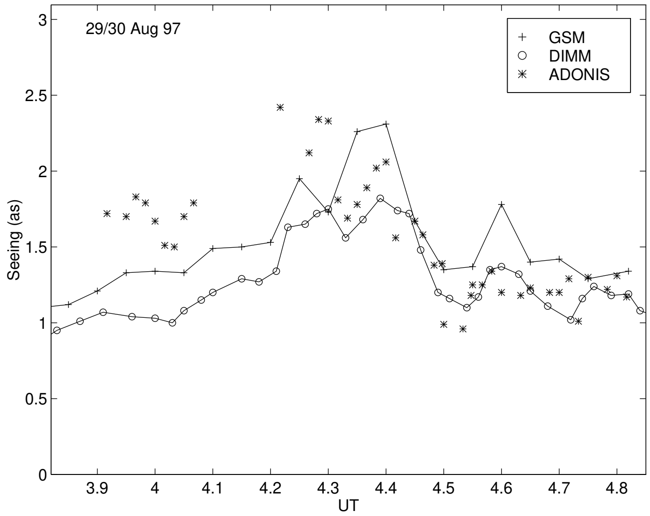


FIG. 7.10 – Summary of the outer scale statistics during 16 nights. On the left pannel (a) the median values of $\mathcal{L}_0$ are plotted as crosses, the variation range is indicated by bars which comprise 80% of nightly values (10 and 90 percentile levels of cumulative distribution). The total number of measurements on each night is indicated. On the right pannel (b) the histogram of log$\mathcal{L}_0$ is plotted, with a fitted log-normal distribution in dashed line.

North). The corresponding time constant of adaptive optics as defined by [124] is 3.2 ms ($\lambda = 0.5$ nm).

In situations when there is a well-defined single dominant layer containing most of turbulent energy the wavefront temporal behaviour can be approximated by a single effective velocity. It is often the boundary layer that makes major contribution to seeing degradation. The derived wavefront speed and direction indeed were often not much different from the ground wind. The similar conclusion was reached in [64] from the analysis of ADONIS wavefront sensor data. It was noted there that the situations when a single effective wind speed describes adequately the wavefront evolution are not very typical (15% of cases). During our mission the seeing was worse than average due to the strong wind, and we may suppose that a dominant contribution of the boundary layer was more marked. The cross-correlation functions sometimes did not display well-defined peaks, and single-layer model was then not adequate.

CONCLUSIONS For the first time the wavefront outer scale $\mathcal{L}_0$ was monitored continuously over several nights at a major astronomical site. The distribution of $\mathcal{L}_0$ appears to be log-normal, with median value of 24 m and a 1σ scatter of ± 1.67 times. Large isolated values of $\mathcal{L}_0$ are observed regularly and are possibly related to the moments of turbulent energy injection. GSM data are confirmed by independent wavefront measurements with a working AO system.



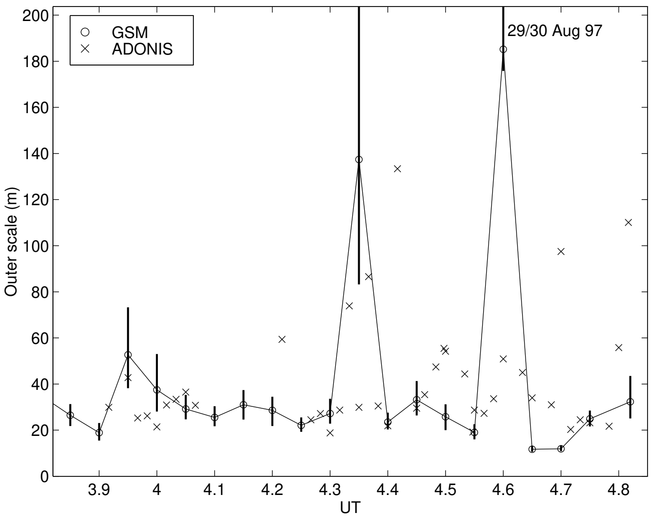


FIG. 7.11 – Comparison of the simultaneous measurements with GSM and with ADONIS AO system during 1 hour on August 29/30. Top : seeing as measured by GSM, ADONIS and ESO DIMM. Bottom : wavefront outer scale measured by GSM (circles with error bars) and ADONIS (crosses).

Our results indicate that the wavefront statistics deviates significantly from Kolmogorov law at baselines of a few meters. This fact is important for the calculation of AO systems performance.

The GSM instrument provides also data on the Fried parameter r_0 and the effective wavefront translation speed which is related to the AO time constant. Thus it is a promising instrument for the complete characterisation of astronomical site for high-resolution imaging techniques.

Acknoledgements : The authors would like to thank the La Silla staff for the efficient support of our mission and all the people of Departement d'Astrophysique de

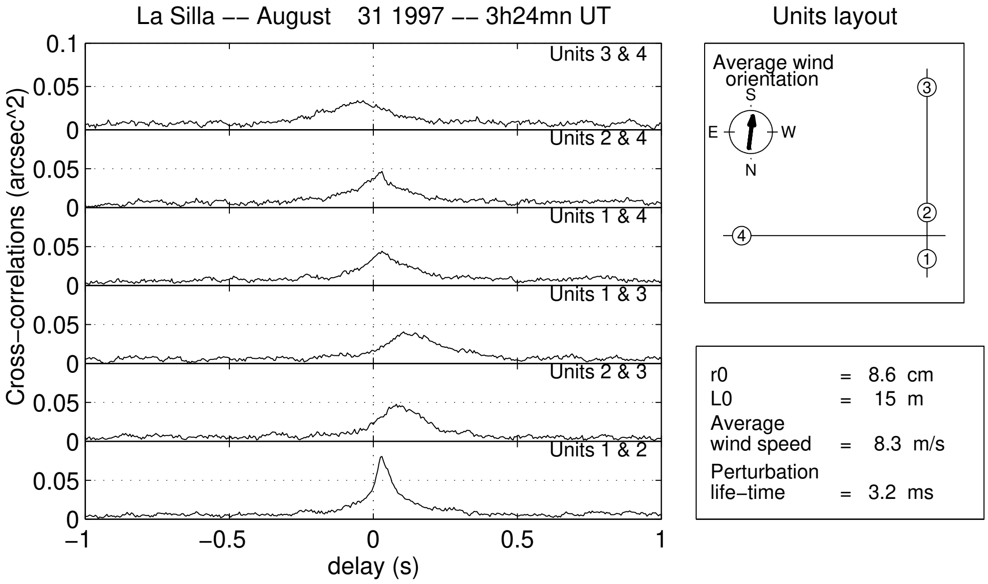


Fig. 7.12 – Temporal cross-correlation of angle of arrival fluctuations on all 6 GSM baselines. The positions of the cross-correlation peaks' maxima were used to estimate the projection of the effective wavefront velocity onto each baseline and to reconstruct the velocity vector.

l'Université de Nice and of O.C.A. (Observatoire de la Cote d'Azur) who helped us to prepare this measurement campaign. Financial support for this work came from INSU (Institut National des Sciences de l'Univers), french M.E.N.R.T. (Ministère de l'Education Nationale, de la Recherche et de la Technologie), and from ESO (European Southern Observatory).

Article paru dans Astronomy and Astrophysics Letters, vol. 336, pages L49–L52 en 1998

Titre : First statistical data on wavefront outer scale at La Silla observatory from the GSM instrument

Auteurs : F. Martin[1], A. A. Tokovinin[2], A. Ziad[1], R. Conan[1], J. Borgnino[1], R. Avila[1], A. Agabi[1], M. Sarazin[3]

Résumé : Results of the first monitoring of the wavefront outer scale $\mathcal{L}_0$ during 16 nights at La Silla, Chile, are presented. This parameter is of importance for high angular resolution observing techniques like adaptive optics and optical interferometry. It was measured with the Grating Scale Monitor (GSM) instrument which is based on the analysis of the spatial covariance of angle of arrival fluctuations simultaneously detected at several points on the wavefront. The outer scale distribution is found to be log-normal, with median value of 24 m and rms scatter of $\log\mathcal{L}_0$ of ± 0.22. Short-duration bursts of $\mathcal{L}_0$ are noted. During 1 hour the $\mathcal{L}_0$ and seeing were simultaneously measured with the ADONIS adaptive optics system at the 3.6 m telescope, and a good agreement with our data was noted.

Our measurements of the seeing were found to agree with the ESO DIMM seeing data. Effective wavefront velocity was also found in order to estimate the adaptive optics time constant.

FIG. 7.13 – View of the GSM instrument at La Silla. The central pier with two modules in differential configuration is seen on the left, the eastern module in the center and the southern module on the right.

[1]U.M.R. Astrophysique N^o 6525 - C.N.R.S. - Université de Nice-Sophia Antipolis

[2]Sternberg Astronomical Institute, Universitetsky prosp., 13, 119899 Moscow, Russia

[3]European Southern Observatory, Karl-Schwarzschild-Str. 2, D-85748, Garching bei München, Germany

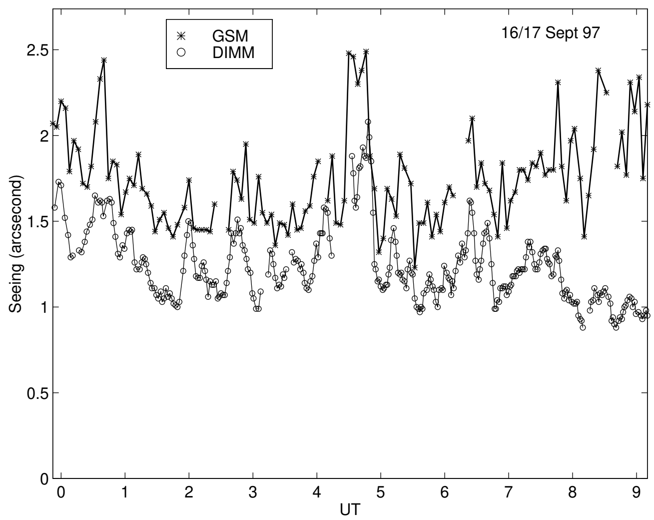


FIG. 7.14 – Comparison of simultaneous seeing measured by ESO DIMM and by GSM

Introduction Substantial progress in astronomical imagery has been recently achieved due to the rapid development of high angular resolution (HAR) techniques like adaptive optics (AO) and long baseline optical interferometry (LBI). It is known that these techniques are severely influenced by atmospheric turbulence (Roddier 1981). To quantify atmospheric effects, it is necessary to know several parameters directly related to the wavefront structure, namely the Fried's parameter r_0 which defines the FWHM seeing angle $\beta = 0.98\lambda/r_0$, the characteristic time constant, the isoplanatic angle and the wavefront outer scale $\mathcal{L}_0$. $\mathcal{L}_0$ is an optical parameter including atmospheric turbulence effects along the whole propagation path (Borgnino 1990). Its influence on spatial and temporal statistics of the wavefront become signifiant since values of $\mathcal{L}_0$ are of the order or greater than the telescope aperture or the interferometer baselines. This last parameter defines the maximum size of wavefront perturbations and is poorly known : values of $\mathcal{L}_0$ ranging from 2 m to 2000 m were published (Avila et al. 1997). Here we present the first large and homogeneous data set on $\mathcal{L}_0$ which permits the evaluation of the statistical behaviour of the outer scale at a major astronomical site.

The GSM instrument : principle The Grating Scale Monitor (GSM) can be considered as a Shack-Hartmann kind technique based on measurements of angle of arrival (AA) fluctuations at several points on the wavefront. A statistical analysis of the recorded AA is performed to estimate spatial and temporal wavefront parameters. The prototype version of the instrument is described by Martin et al. (1994), and the first $\mathcal{L}_0$ measurements were published by Agabi et al. (1995).

The instrument consists of four 10-cm telescopes on equatorial mounts (Fig. 1). Each telescope is equipped with a detection module which is capable of measuring synchronously the AA in the declination direction with a 5 ms sampling time. Two telescopes

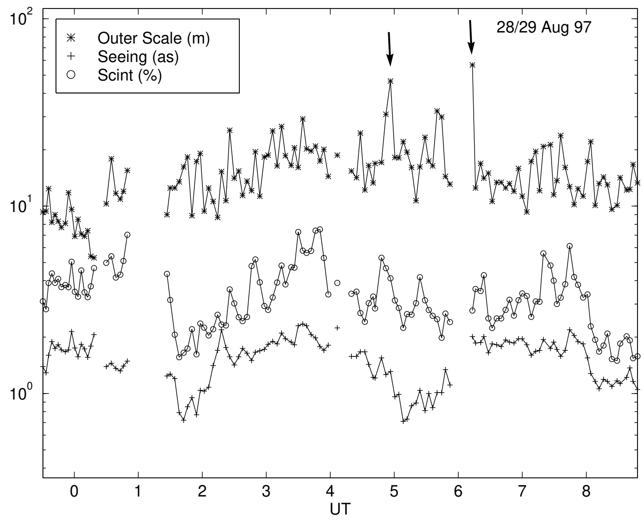


FIG. 7.15 – Temporal evolution of $\mathcal{L}_0$, scintillation index and seeing (upper, middle and lower curves, respectively) during the night of August 28/29. Arrows indicate $\mathcal{L}_0$ bursts.

are installed on a common mount on the central pier and work as a differential image motion monitor (DIMM) (Sarazin & Roddier 1990) with a 25 cm baseline measuring r_0. Two other telescopes have separate mounts on separate piers, located 0.8 m to the south and 1 m to the east from the central pier, thus forming an L-shaped configuration. Telescope objectives were situated 1.5 m above the ground.

A typical measurement sequence consists of 2 mn data acquisitions repeated continuously every 4 mn. Pairwise telescope combinations provide 6 baselines ranging from 25 cm to 1.28 m. The AA covariances are computed for each baseline and normalized by the differential variance of AA on the 25-cm baseline. They are compared to theoretical normalized covariances and the appropriate $\mathcal{L}_0$ is found for each baseline. Before comparison, the baselines (length and orientation) are projected onto the wavefront plane. Final value of $\mathcal{L}_0$ is taken as a median of individual $\mathcal{L}_0$ values and its error is estimated from their scatter.

Theoretical normalized covariances are computed in the framework of the Von Karman model as described in Avila et al. (1997, eq. 7). $\mathcal{L}_0$ appears in the phase power spectrum as the inverse of a spatial frequency. Our study has shown that theoretical normalized covariances are most sensitive to $\mathcal{L}_0$ at baselines less than $\mathcal{L}_0/10$ wich explains our choice of metric baselines. The $\mathcal{L}_0$ measured by GSM can be viewed as a parameter of the Von Kàrmàn turbulence model which provides adequate description of the wavefront structure at metric distances. It can be used to compute wavefront statistics over telescope aperture and is thus directly relevant to AO applications (Voitsekhovich & Cuevas 1995). On the other hand, estimates of the atmospheric phase fluctuations in LBI using $\mathcal{L}_0$ values found here are more model-dependent.

In order to check for vibrations effect (wind shake and guiding), r_0 is computed

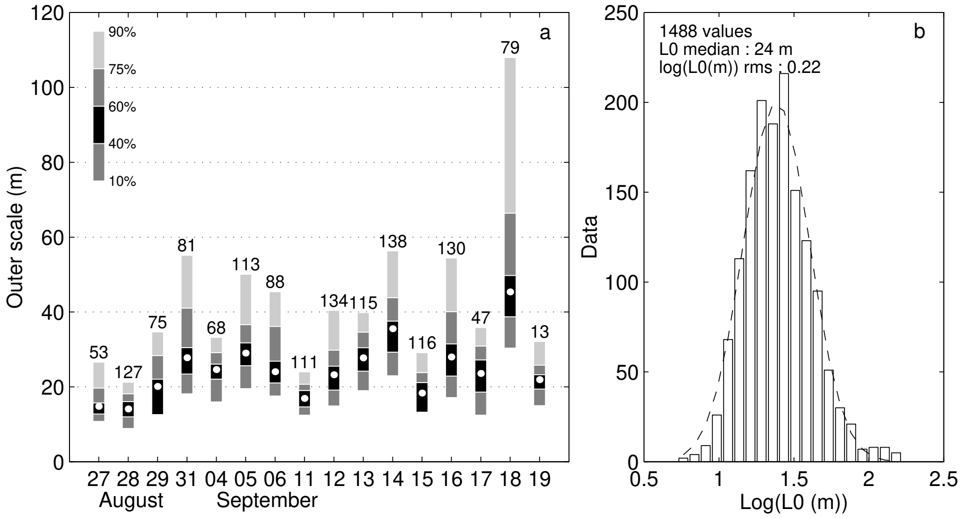


FIG. 7.16 – Summary of the outer scale statistics over 16 nights. a) For each night the 5 levels of the cumulative distribution of $\mathcal{L}_0$ are shown by grey-scale bars, median values are plotted as circles. Total number of measurements for each night is indicated above the bars. b) Histogram of log$\mathcal{L}_0$ for the whole mission with a fitted log-normal distribution (dashed line).

from absolute image motion in each telescope, corrected for finite $\mathcal{L}_0$ (Borgnino et al. 1992) and compared to r_0 provided by the differential technique. A good agreement is found for ground wind speed up to than 15 m/s, showing that telescope vibrations were not significant. Furthermore, their effects dissapears in covariance computation because telescope on separate piers are uncorrelated and normalization by the differential variance is vibration insensitive.

The scintillation index σ_I^2 is computed during data reduction and, as shown by Loos & Hogge (1979), it can give an estimate of the isoplanatic angle when the pupil diameter is around 10 cm. GSM data are also used to derive the effective wavefront speed and its direction (see below) which gives an estimate of the wavefront coherence time. So, this instrument can provide an almost complete set of wavefront parameters relevant to HAR techniques.

GSM campaign at La Silla Observatory Monitoring of turbulence parameters at La Silla observatory with GSM was organized in the framework of the ESO VLT Astronomical Site Monitor development program in August-September 1997. At this site the seeing is measured routinely with an automatic ESO DIMM (Sarazin & Roddier 1990) located on a tower 5 m above ground level. GSM has been installed close to ESO DIMM. During this campaign GSM data were obtained on 16 nights (a total of 115 hours of $\mathcal{L}_0$, seeing and scintillation measurements). Below we present the first results. The conditions of jet stream prevailed during our mission, the seeing being worse (median value 1.7 $''$) and more rapid than average for this season.

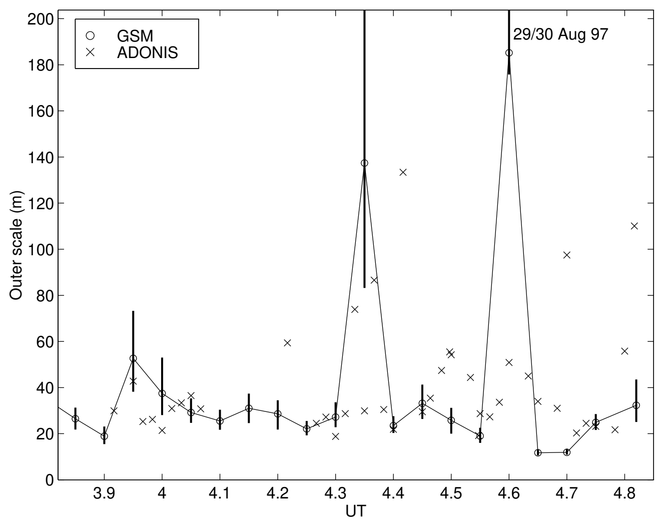


FIG. 7.17 – Comparison of the outer scale values measured simultaneously using GSM and ADONIS. Error bars corresponding to $\pm\sigma$ are shown for GSM data.

Seeing : comparison with ESO DIMM It is interesting to compare the seeing measured simultaneously by GSM and ESO DIMM. Such comparison is given in Fig. 2 for one night with a moderate ground wind (10 m/s). There is a very good correlation between the seeing variations measured independently by the two instruments. Nevertheless, GSM measures seeing angles that are systematically greater than those given by ESO DIMM. This bias can be explained in part by the ground layer turbulence, and by the difference between integration times which are 5 ms and 10 ms for GSM and ESO DIMM, respectively. When the GSM integration time was artificially increased to 10 ms, a good agreement was obtained on nights with strong wind. It means that DIMM data are significantly biased by integration time effects for strong winds. A perfect agreement between GSM and ESO DIMM was found for the periods corresponding to very good seeing (0.6 $''$) and slow wind which are close to typical conditions at La Silla.

The wavefront outer scale statistics Continuous monitoring of the outer scale enables us for the first time to study the temporal variation of $\mathcal{L}_0$ and its correlation with other seeing parameters. As an example, $\mathcal{L}_0$, σ_I^2 and seeing are plotted in Fig. 3 in a logarithmic scale as a function of time for one night. The temporal variation of $\mathcal{L}_0$ shows two characteristic features. First, slow trends with a time scale of hours are noted, just like for the other atmospheric parameters. Second, isolated values of large $\mathcal{L}_0$ are observed (arrows in Fig. 3, see also Fig. 5). This "bursts" of $\mathcal{L}_0$ are noted here for the first time. There are no matching rapid variations of seing or scintillation. Thus these bursts correspond only to the transient changes of wavefront spatial structure.

In Fig. 4 the overall statistics of the outer scale is shown. For each night the few characteristic levels of $\mathcal{L}_0$ cumulative distribution and its median are plotted. The night-to-night variability of both median and scatter of $\mathcal{L}_0$ is readily seen. The histogram of log$\mathcal{L}_0$ for the whole mission is also presented. The $\mathcal{L}_0$ distribution is well approximated by a log-normal one. Its median is 24 m, and rms scatter of log$\mathcal{L}_0$ is ± 0.22, or ± 1.67 times. A χ^2 test accepts log-normal distribution with a significance level of $P(\chi^2) = 0.24$.

On the night of August 29/30 the seeing and wavefront outer scale were simultaneously measured during 1 hour with the ADONIS adaptive optics system (Rigaut et al., 1991 ; Beuzit et al. 1994) on the ESO 3.6 m telescope. ADONIS worked in open-loop mode. Outer scale and seeing were calculated from the wavefront tilts recorded by the 7x7 element Shack-Hartmann sensor. A simplified method of $\mathcal{L}_0$ calculation was adopted. The AA variances on the individual wavefront sensor sub-apertures and on the full telescope aperture are computed. Their ratio is used to derive $\mathcal{L}_0$ by the approximate formula given by Ziad et al. (1994). The simultaneous measurements of $\mathcal{L}_0$ with ADONIS and GSM are plotted in Fig. 5. There is no detailed correlation, which is quite natural because the distance between GSM and 3.6 m telescope was more than 1 km. However, the values of $\mathcal{L}_0$ found by both instruments agree well, and the temporal behaviour is also similar, as well as the measured seeing. This comparison proves that GSM data are indeed useful for the analysis and prediction of AO system performance.

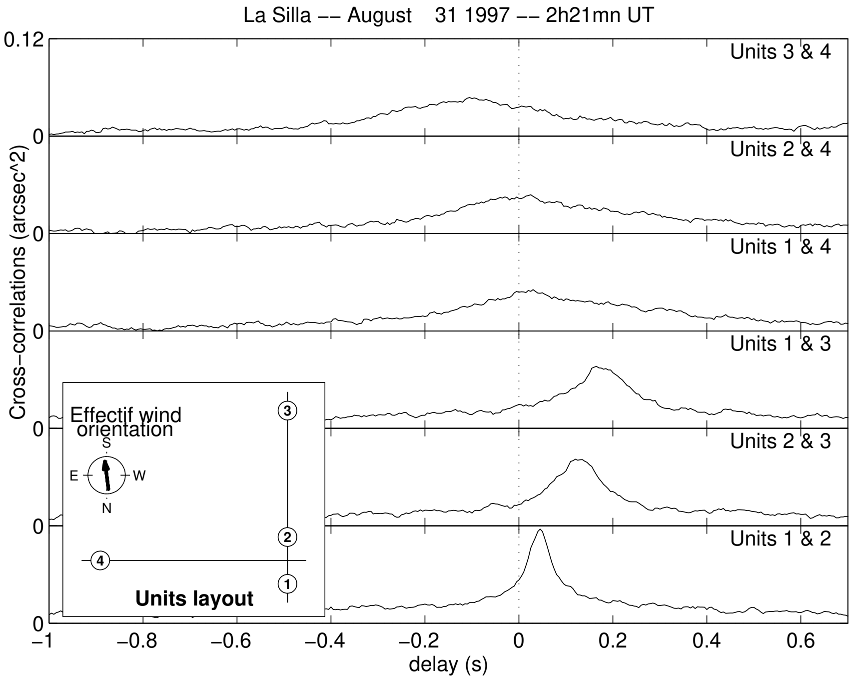


FIG. 7.18 – Temporal cross-correlation functions of the angle of arrival fluctuations at the 6 baselines are plotted on the same scale. The displacement of their maximum is directly related to the projection of the effective wavefront speed onto a given baseline. The instrument configuration and the derived wind speed orientation are shown in the inset. The effective wind speed module is 5.8 m/s.

Effective wind speed and AO time constant The temporal evolution of the perturbed wavefront is frequently considered in the framework of the "frozen turbulence" (Taylor) hypothesis, as a constant screen driven by the wind. The analysis of ADONIS data revealed that this situation does indeed occur at La Silla 15% of time (Gendron & Lena 1996). Although the Taylor hypothesis remains a crude approximation of the reality, an effective wavefront speed can be introduced as some average C_n^2-weighted wind speed. Its component along each baseline can be computed either from the phase of the corresponding temporal cross power spectrum of the AA fluctuations (Avila et al. 1997) or, equivalently, as a displacement of the AA cross-correlation function maximum. Here we use the second technique.

The method of effective wind speed measurement with GSM is illustrated in Fig. 6 where cross-correlation functions of AA are plotted for 6 baselines. From the time lag at each baseline it is found that the wind speed was 5.8 m/s in the NNW direction (ground wind speed was 5.2 m/s from North). In this example, a single dominant layer obeying Taylor hypothesis provides a good overall description of temporal wavefront evolution. The corresponding AO time constant (Roddier et al. 1982) $\tau = 0.31 r_0/V$ is equal to 4.2 ms at $\lambda = 0.5$ nm.

Conclusions The results of the first systematic monitoring of the wavefront outer scale at La Silla observatory are given. The GSM instrument also produces data on the seeing and effective wavefront velocity. In the near future the isoplanatic angle will be estimated as well, thus providing a complete set of spatial and temporal atmospheric parameters relevant to HAR astronomy. The GSM instrument will be used during the next 2 years for testing several important sites, e.g. Paranal (Chile).

Acknowledgements : The authors would like to thank the La Silla staff for the efficient support of our mission, J.-L. Beuzit for assistance in ADONIS measurements, and all the people of Département d'Astrophysique de l'Université de Nice and of O.C.A. (Observatoire de la Cote d'Azur) who helped us to prepare this measurement campaign. Financial support for this work came from INSU (Institut National des Sciences de l'Univers), french M.E.N.R.T. (Ministère de l'Education Nationale, de la Recherche et de la Technologie), and from ESO (European Southern Observatory).

7.1.2 Observatoire de l'Oukaïmeden (Maroc) : 12 – 22 Avril 1998

La mission à l'Observatoire de l'Oukaïmeden s'est faite dans le cadre de l'action intégrée de collaboration Franco–Marocaine entre la Faculté des Sciences Semlalia de Marrakech et notre laboratoire.

FIG. 7.19 – GSM à l'Oukaïmeden.

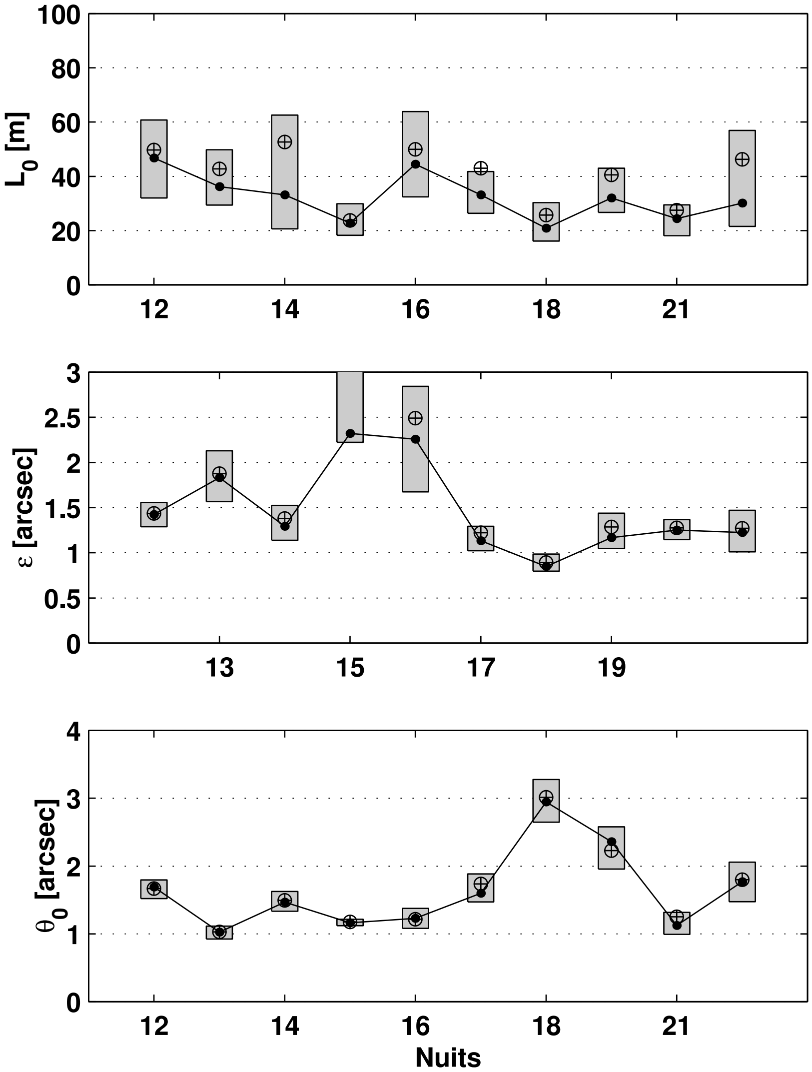


FIG. 7.20 – Evolution nuit par nuit des paramètres $\mathcal{L}_\mathbf{0}$, ε et θ_0 mesuré au moyen du GSM à l'Observatoire de l'Oukaïmeden. Les symboles $\bullet$ et $\oplus$ représentent les valeurs moyennes et médianes, respectivement. Les rectangles donnent l'intervalle qui contient 50% des valeurs, centré sur la valeur médiane.

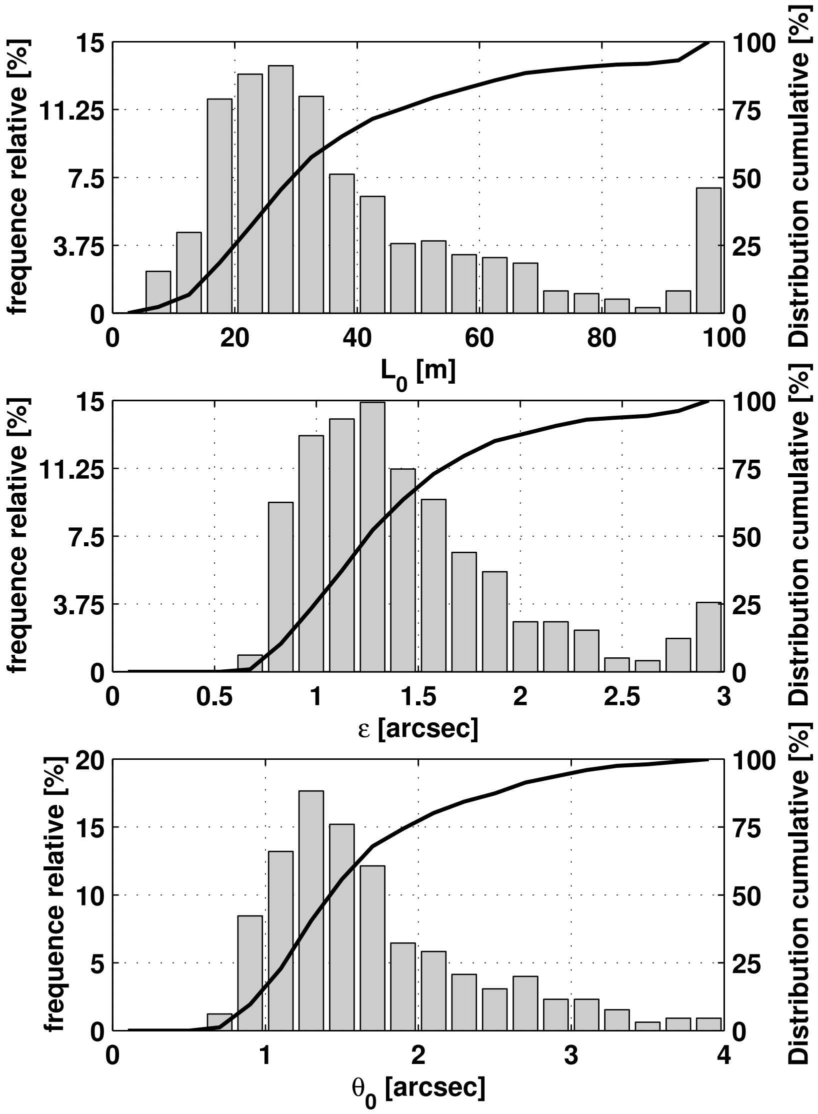


FIG. 7.21 – Histogramme et fonction de répartition de toutes les valeurs des paramètres $\mathcal{L}_{\mathbf{0}}$, ε et θ_0 mesurées au moyen du GSM à l'Observatoire de l'Oukaïmeden.

7.1.3 Observatoire de Maïdanak (Ouzbekistan) : 16 – 24 Juillet 1998

La mission du GSM à Maïdanak fait partie d'un ensemble de campagnes de qualification du site dans le cadre du projet INTAS 96–0367 : "Characterization of Maidanak Observatory among the Major International Ground–based Astronomical Facilities of the Future" dont le coordonnateur est M. Sarazin de l'ESO.

Sur le site de l'Observatoire, à proximité du GSM fonctionnait un DIMM appartenant à l'ESO qui mesurait le seeing et deux scintillomètres mesurant la scintillation et l'angle d'isoplanétisme. Un bon accord a été trouvé entre les valeurs du seeing mesurées au moyen du GSM et du DIMM ainsi qu'entre les valeurs d'angle d'isoplanétisme mesurées au moyen du GSM et des scintillomètres. Les résultats détaillés de la mission sont présentés dans le rapport contractuel INTAS [152].

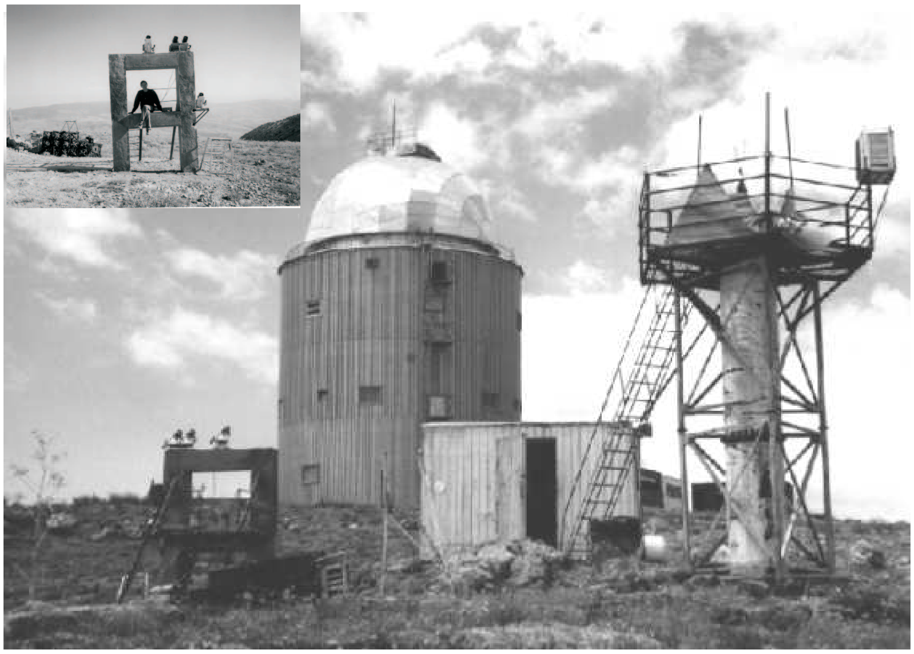


FIG. 7.22 – GSM à l'Observatoire de Maïdanak avec le DIMM à gauche et la coupole d'un télescope de 1.50 m en arrière-plan. En encart, on distingue la configuration particulière des modules du GSM pour cette mission. La séparation verticale des modules a permis de quantifier l'énergie de la turbulence dans la couche de surface

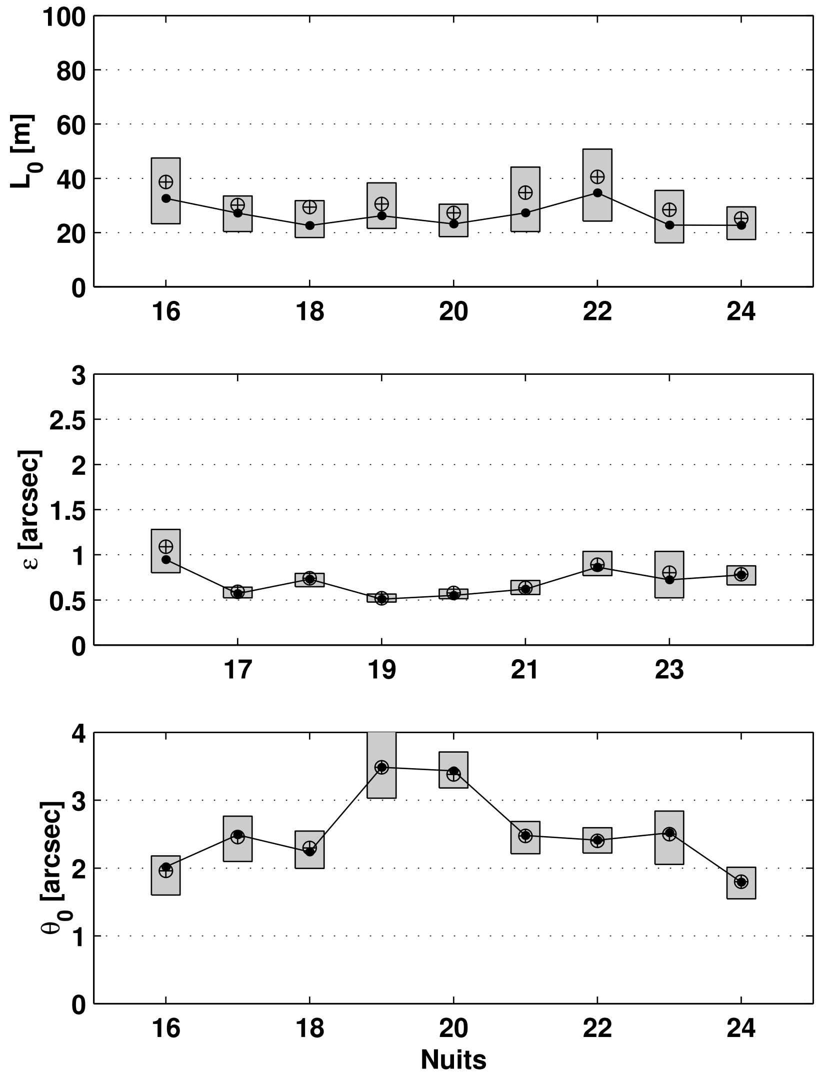


FIG. 7.23 – Evolution nuit par nuit des paramètres $\mathcal{L}_\mathbf{0}$, ε et θ_0 mesuré au moyen du GSM à l'Observatoire de Maïdanak. Les symboles $\bullet$ et $\oplus$ représentent les valeurs moyennes et médianes, respectivement. Les rectangles donnent l'intervalle qui contient 50% des valeurs, centré sur la valeur médiane.

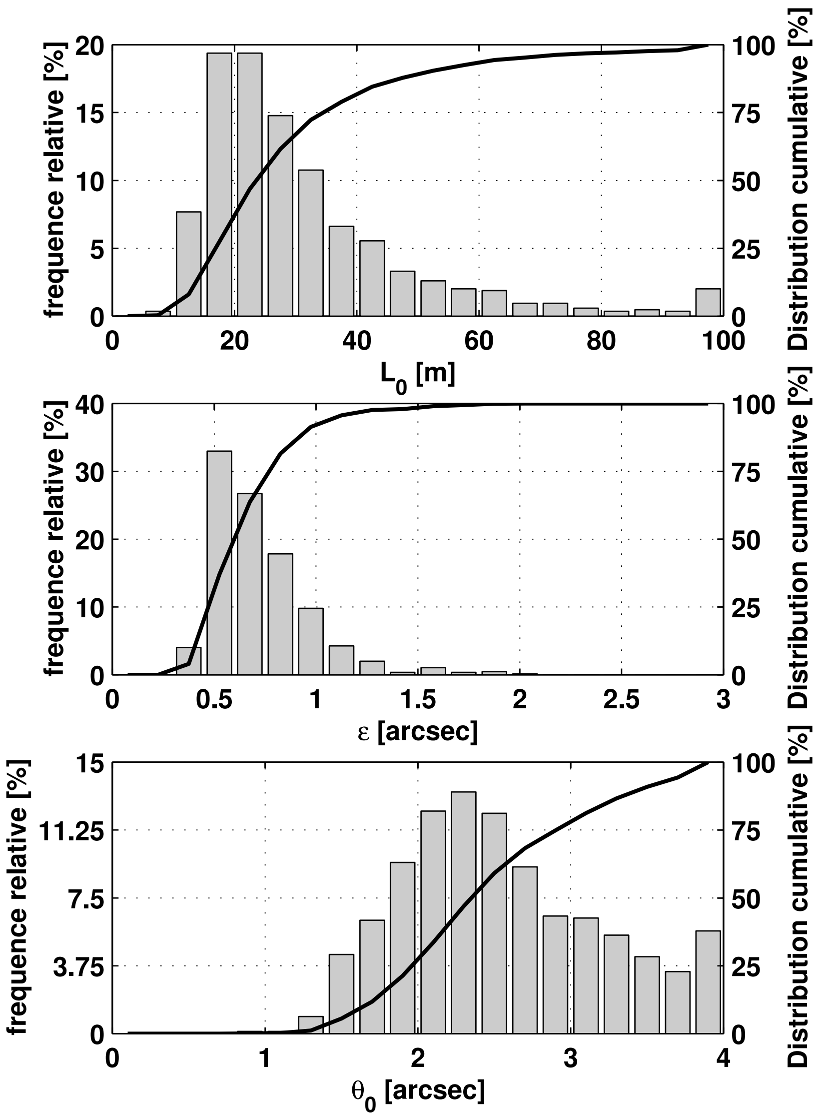


FIG. 7.24 – Histogramme et fonction de répartition de toutes les valeurs des paramètres $\mathcal{L}_{\mathbf{0}}$, ε et θ_0 mesurées au moyen du GSM à l'Observatoire de Maïdanak.

7.1.4 Site du Cerro Pachon (Chili) : 01 – 10 Octobre 1998

Cette mission s'inscrit dans le cadre de la campagne de qualification du site du Cerro Pachon qui va accueillir le télescope de 8 m "Gemini South" au voisinage de l'Observatoire de CTIO[2]. La particularité de cette mission est d'avoir pu, pour la première fois, faire travailler ensemble toutes les expériences développées dans notre laboratoire et dédiées à l'étude optique de la turbulence atmosphérique. En plus du GSM, il y avait comme expérience le SCIDAR généralisé [8], des ballons météorologiques équipés de capteurs de micro–fluctuations de température [100]. Ceux–ci nous renseignent sur la valeur du C_n^2 in–situ, mesuré lors de l'ascension des ballons. Des capteurs du même type ont été installés sur un mât météorologique afin de suivre l'évolution temporelle de C_n^2 dans la couche limite de surface. Les résultats de toute la campagne y compris ceux du GSM se trouvent dans le rapport final remis au consortium Gemini [160].

FIG. 7.25 – GSM sur le site du Cerro Pachon avec en arrière–plan la coupole du télescope "Gemini South".

[2]Cerro Tololo Inter–American Observatory

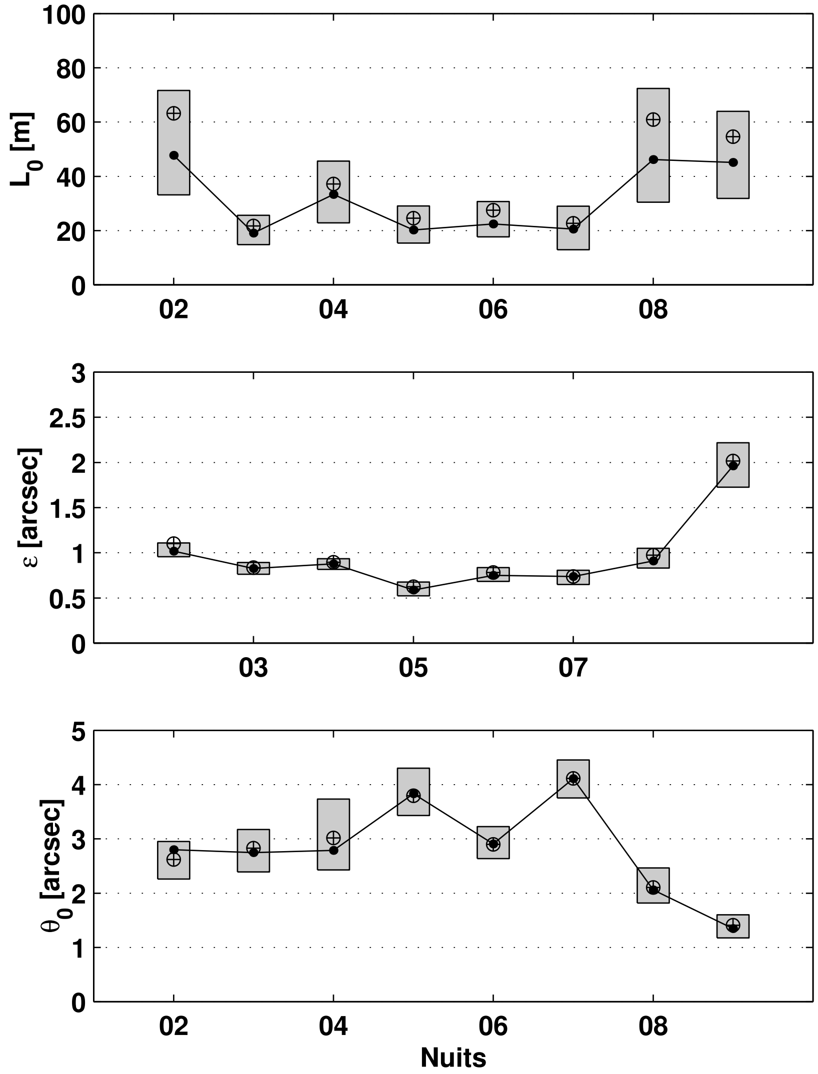


FIG. 7.26 – Evolution nuit par nuit des paramètres $\mathcal{L}_{\mathbf{0}}$, ε et θ_0 mesuré au moyen du GSM sur le site du Cerro Pachon. Les symboles • et ⊕ représentent les valeurs moyennes et médianes, respectivement. Les rectangles donnent l'intervalle qui contient 50% des valeurs, centré sur la valeur médiane.

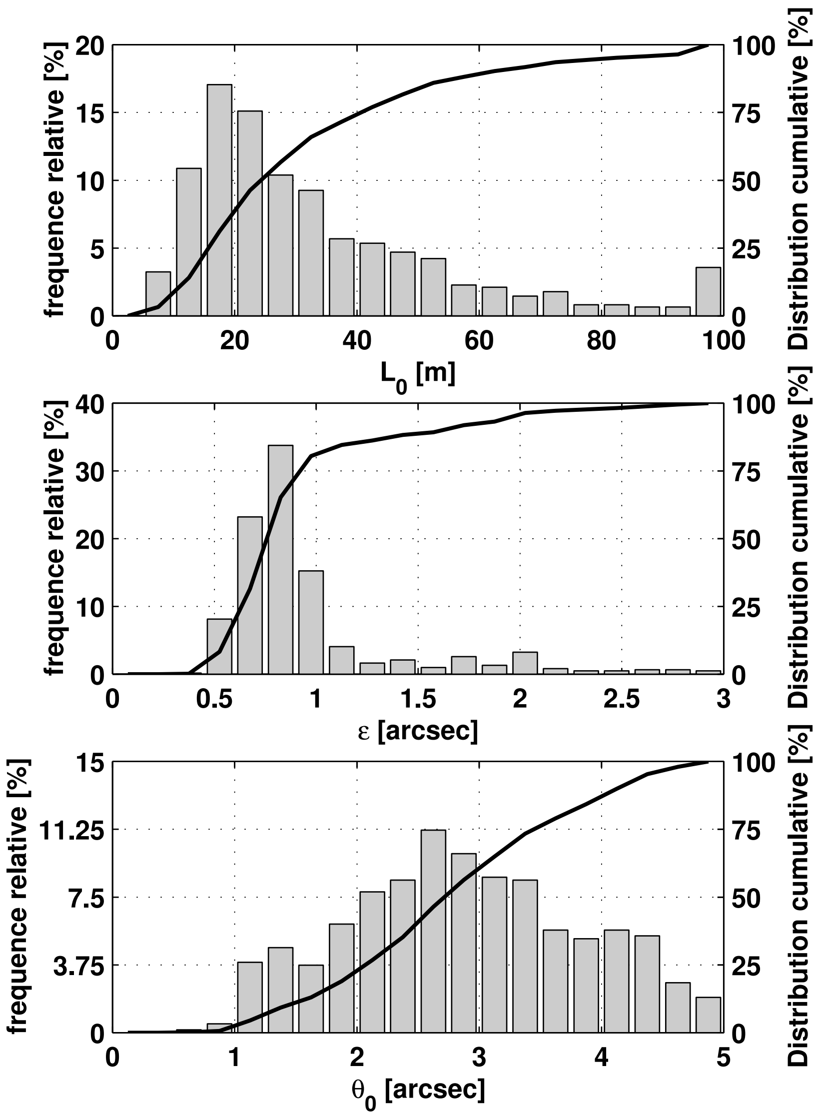


FIG. 7.27 – Histogramme et fonction de répartition de toutes les valeurs des paramètres $\mathcal{L}_{\mathbf{0}}$, ε et θ_0 mesurées au moyen du GSM à l'Observatoire de Cerro Tololo.

7.1.5 Observatoire de Cerro Paranal (Chili) : 27 Novembre – 20 Decembre 1998

Cette mission résulte aussi d'un contrat avec l'ESO pour la mesure de l'échelle externe pour la calibration des instruments du VLTI[3] (Contrat no. : 54900/ODG/98/8553/GWI).

Le GSM a effectué des mesures simultanément avec le ASM[4][86] et avec les capteurs de micro–fluctuations de température installés sur un mât météorologique à proximité des deux instruments. Des capteurs étaient positionnés à 3 m au niveau du GSM, à 7 m au niveau du ASM et à 21 m au niveau du sommet des coupoles des UT[5]. Les mesures de ces capteurs ont permis de quantifier l'influence de la turbulence dans la couche de surface du point de vue de sa contribution au seeing[154]. Les valeurs du seeing mesurés au moyen du GSM et le ASM ont montré une excellente adéquation à l'exception de courtes périodes durant quelques nuits. Pour ces nuits les capteurs sur le mât ont montré que cette différence provenait d'une énergie de la turbulence plus forte à l'altitude du GSM qu'a l'altitude du ASM.

Les résultats de cette mission sont exposés dans le rapport remis à l'ESO [102] et dans l'article publié dans Astronomy and Astrophysics Supplement Series, 144, p.39–44 (Mai 2000). Cet article est reproduit dans cette section.

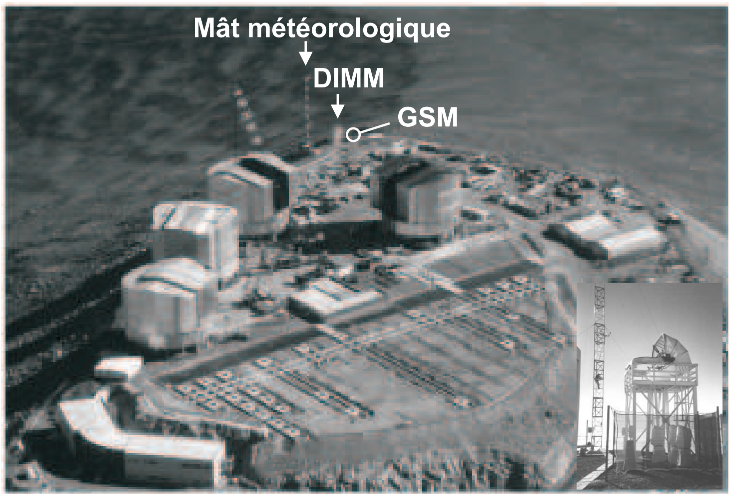


FIG. 7.28 – Vue d'hélicoptère de l'Observatoire de Cerro Paranal prise pendant la mission du GSM. En encart, on peut voir le GSM entouré des filets qui le protège du vent, derrière la tour du DIMM et en arrière plan le mât sur lequel ont été installés les capteurs de micro–fluctuations de températures.

[3]Very Large Telescope Interferometer
[4]Astronomical Seeing Monitor
[5]Unit Telescope

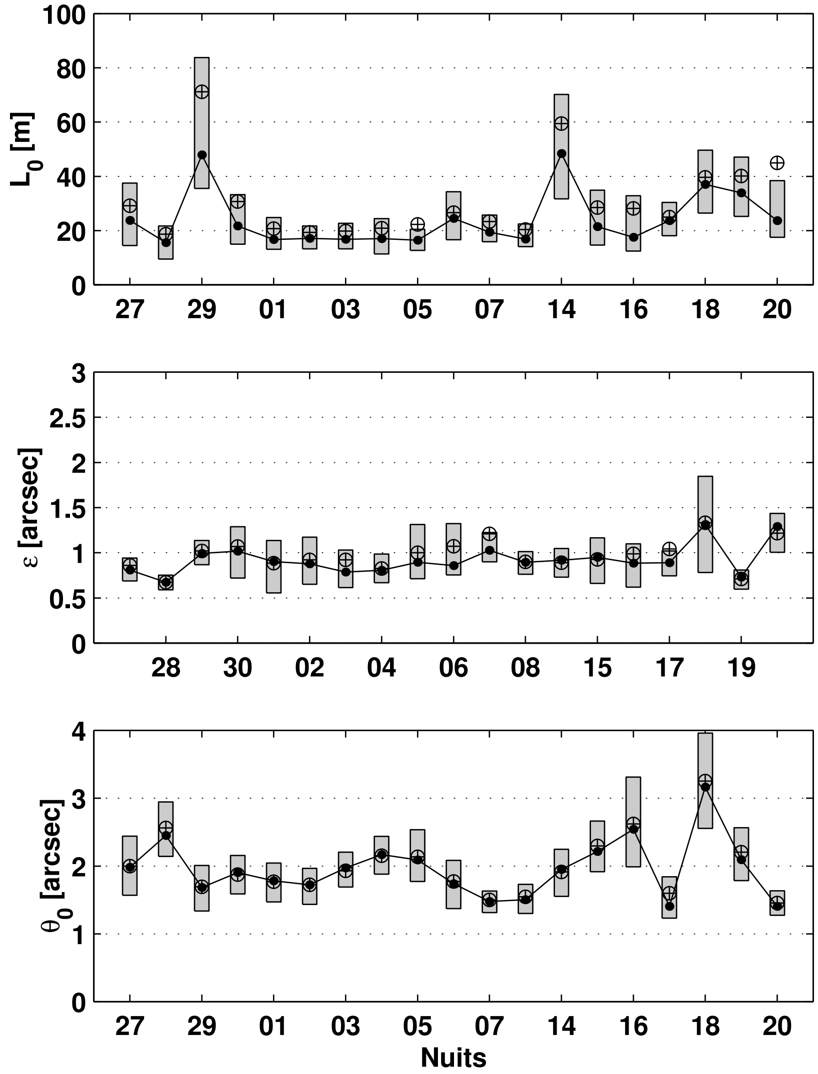


FIG. 7.29 – Evolution nuit par nuit des paramètres $\mathcal{L}_\mathbf{0}$, ε et θ_0 mesuré au moyen du GSM à l'Observatoire de Cerro Paranal. Les symboles $\bullet$ et $\oplus$ représentent les valeurs moyennes et médianes, respectivement. Les rectangles donnent l'intervalle qui contient 50% des valeurs, centré sur la valeur médiane.

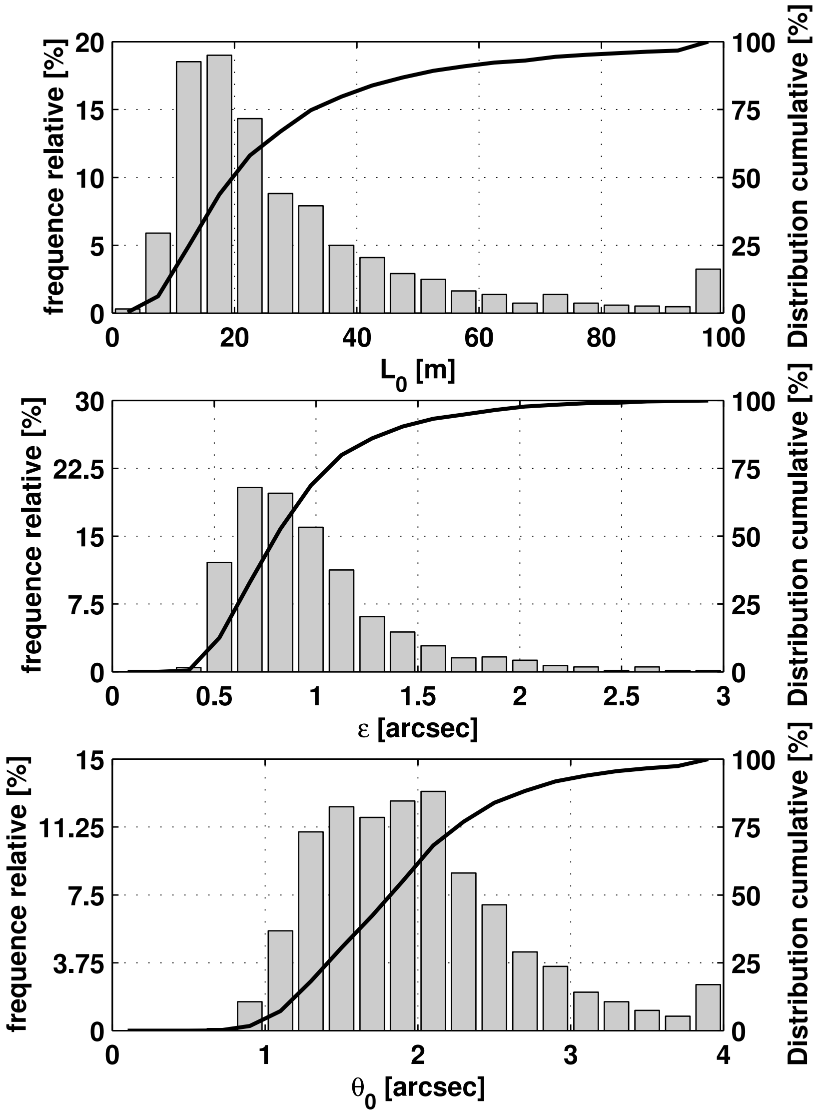


FIG. 7.30 – Histogramme et fonction de répartition de toutes les valeurs des paramètres $\mathcal{L}_\mathbf{0}$, ε et θ_0 mesurées au moyen du GSM à l'Observatoire de Cerro Paranal.

Article paru dans Astronomy and Astrophysics Supplement Series, vol. 144, pages 39–44 en Mai 2000

Titre : Optical parameters relevant for High Angular Resolution at Paranal from GSM instrument and surface layer contribution

Auteurs : F. Martin[1], R. Conan[1], A. A. Tokovinin[2], A. Ziad[1], H. Trinquet[1], J. Borgnino[1], A. Agabi[1], M. Sarazin[3]

Résumé : Main atmospheric parameters characterizing the turbulence were measured at the Paranal ESO Observatory (Chile) with the Generalized Seeing Monitor (GSM) during 19 nights in November–December 1998. The median seeing for this period was 0.88″, a little worse than average , the median wave–front outer scale $\mathcal{L}_0 = 22.0$ m and the median isoplanatic angle $\theta_0 = 1.90''$. A very good agreement with seeing given by ESO DIMM was found. Effects of ground layer turbulence were estimated from measurements of temperature micro–fluctuations at several altitudes. These measurements revealed that the first 21 meters above ground account for 12.5% of the total turbulent energy. Comparison between GSM and ESO DIMM values have permitted to highlight a local phenomenon which occurs sometimes at the site in the middle of the night. Statistics of the refractive index structure constant C_n^2 in the surface layer is studied.

Introduction It is well known that performances of high angular resolution techniques (HAR) are severely limited by the random optical effects induced by the turbulent atmosphere on the light propagation. A quantitative spatial and temporal characterization of the corrugated wave–front at the ground is necessary to optimize the operation of adaptive optics (AO) and long baseline interferometry (LBI) instruments and to guide the future development of these techniques.

The parameters which characterize the wave–front statistics from an optical point of view are the well known Fried's parameter r_0, the spatial coherence scale of the wave–front (or wave–front outer scale) $\mathcal{L}_0$, which becomes of importance when comparable to the telescope aperture, the isoplanatic angle θ_0, and the characteristic time which determines the response time for the deformable mirror in AO or for the fringe tracking in LBI.

A specific instrument named GSM (Generalized Seeing Monitor) dedicated to the monitoring of these parameters has been built.

It has been essentially developed (Martin et al. [103]) to evaluate the outer scale statistics because no systematic measurements existed for it. The scattered values available in the literature were deduced from various techniques and were somewhat controversial (Colavita et al. [32], Buscher et al. [28], Mariotti et al. [99], Rigaut et al. [120], Takato et al. [146], Beriot et al. [18], Davis et al. [46], Ziad et al. [170])

[1]U.M.R. Astrophysique N^o 6525 - C.N.R.S. - Université de Nice-Sophia Antipolis
[2]Sternberg Astronomical Institute, Universitetsky prosp., 13, 119899 Moscow, Russia
[3]European Southern Observatory, Karl-Schwarzschild-Str. 2, D-85748, Garching bei München, Germany

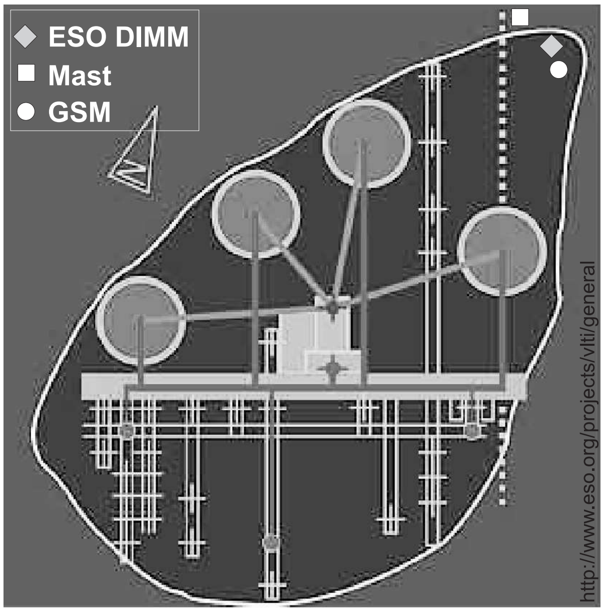


FIG. 7.31 – The plan of Paranal site and the location of the equipment.

The Cerro Paranal ESO observatory in Chile ($70^o24'05''$ W, $24^o37'24''$ S, altitude 2635 m) is among the major world astronomical sites. The VLT instrument with its four 8 m apertures is an optical telescope with the largest collecting area. The properties of the atmospheric turbulence at this site are of the utmost importance for the operation of this unique instrument.

A statistics of seeing and cloud coverage at Paranal[6] over several years was obtained from the Differential Image Motion Monitor of ESO (Sarazin & Roddier [135]) and shows it to be one of the lowest among those measured at other astronomical sites, with the long–term median seeing of $0.70''$. However, the information on some other properties of atmosphere at Paranal was missing. The aim of our measurement campaign with GSM in December 1998 was to provide statistics of the wavefront outer scale $\mathcal{L}_0$ and of the isoplanatic angle θ_0. The corresponding results are presented in section 3.

Previously, the GSM worked successfully at the ESO La Silla observatory (Martin et al. [105]), and in some other observatories over the world (Oukaïmeden in Morocco, Maydanak in Uzbekistan, and the Cerro Pachon in Chile, the southern site for the Gemini project).

The schematic plan of the Paranal site is given in Fig. 7.31. The pillars with GSM telescopes were located near the ESO DIMM seeing monitor. Data acquisition computers and observers were housed in the ESO DIMM control container. A pre–existing mast was used to install three couples of temperature sensors for temperature micro–fluctuation measurements in the Surface Layer (SL).

All atmospheric parameters given in this report are calculated for a wavelength

[6]http ://www.eso.org/gen/fac/pubs/astclim/paranal

$\lambda = 500$ nm for observations at zenith. Seeing angle ε is the full width at half maximum (FWHM) of a long-exposure stellar image in a large telescope, $\varepsilon = 0.98\lambda/r_0$. Wave–front outer scale $\mathcal{L}_0$ is a C_n^2–weighted average turbulence outer scale, as defined by Borgnino ([23]). The isoplanatic angle θ_0 is relevant for adaptive optics (Fried [59]).

Principle of measurements Although the Generalized Seeing Monitor (GSM) was the main instrument used in this campaign, we devote little space to its description, which can be found in our previous works.

Principle of the GSM In its initial version GSM is presented in Martin et al. ([103]). The actual instrument is described in Martin et al. ([105]) and Tokovinin et al. ([153]). Description and performance analysis are also given in Ziad et al. ([172]). We refer the interested reader to the reports on the previous GSM missions (Martin et al. [104] and Tokovinin et al. [152]) which can be obtained from the authors on request.

The GSM instrument consists of four 10-cm telescopes with their individual image analysis devices to sense the angle of arrival (AA) fluctuations in one direction, called *modules*. The telescopes are installed on three equatorial mounts ; two modules share the same mount and are working as the ESO DIMM. At a distance of 1 meter to the south of these modules a third one is installed on a separate mount. The fourth one, with its mount, is located at 0.8 m to the east. The same L–shaped configuration has been used in the previous GSM missions except at Maydanak site.

GSM modules and their mounts were installed on top of 3 concrete pillars, with the height of telescopes 1.7 m above ground. From 3 sides the experiment was surrounded by a wind-protective enclosure consisting of a 2 m high net.

Atmospheric AA fluctuations are measured by each module in the declination direction, with 5 ms time resolution. A typical measurement consists of a 2 mn long data acquisition. It is processed immediately, providing the estimate of the Fried coherence diameter r_0 (from differential AA fluctuations in modules 1 and 2), wave–front outer scale $\mathcal{L}_0$ (inferred from the covariances of AA and computed via the Von Karman model for the phase spectrum of the turbulent atmosphere), and isoplanatic angle θ_0(from scintillation index).

The ESO DIMM seeing monitor (Sarazin & Roddier [135]) which operates at the Paranal site continuously as a part of the VLT Astronomical Site Monitor (ASM) equipment was located at a distance of the order of 10 meters from GSM. A seeing estimate is produced by DIMM approximately every minute from the data accumulated during a total of 800 samples. More information on this instrument can be obtained at the web site[7] of the DIMM at Paranal.

ESO DIMM is installed on a 6 m high tower, in order to avoid the near-ground turbulence as much as possible. Still, it is below the VLT unit telescopes, hence the investigation of the influence of SL turbulence is of great utility for improved prediction of seeing at VLT.

[7]http ://www.eso.org/gen-fac/pubs/astclim/paranal/asm

Temperature micro-fluctuation measurements in the surface layer Turbulence sensing in the SL has been undertaken in order to gain a better understanding of the turbulence effects near the ground. For balloon measurements of the vertical turbulence profiles, temperature sensors have been developed at the Département d'Astrophysique. Each probe consists of two thin-wire sensors mounted at a separation of 1 m on a rod. The structure constant of temperature fluctuations, C_T^2, is calculated from the dispersion of the temperature difference between the pair of sensors. The time resolution of the micro–thermometers with their electronics and transmitting devices is about 5 ms and an integrated value of the structure constant is transmitted to the ground each 1.5 s. The typical noise level can reach a few 10^{-8} (degree Celsius)^2. The refractive index structure constant C_n^2 is calculated from C_T^2 using the appropriate values of mean temperature and pressure. C_n^2 values are obtained with a precision around 10^{-20} m$^{-2/3}$. Previous results obtained with this equipment can be found in Vernin & Muñoz-Tuñon ([161]).

Four pairs of sensors were installed on the meteorological mast at the heights of 3, 7, 21, and 31 m above the base of the mast. The upper sensor, however, was damaged, and only the remaining 3 have provided valid data. It must be noted that the base of the mast was somewhat lower (by 1 m) than the ground level of GSM/DIMM location. Hence the sensors at 3 and 7 meters are at the same heights as GSM and DIMM, respectively.

The GSM campaign at Cerro Paranal Observatory The GSM instrument has been transported to Paranal after the completion of the previous mission in October at Cerro Pachon (Chile). The observing team from Nice (F. Martin, R. Conan and A. Agabi) arrived at Paranal on November 26, 1998. The experiment was operational on the night of November 27/28. The campaign was split into two periods, the first 12–night run (November 27 – December 8) and the second 7–night run (December 14–20). No bad weather or clouds were encountered during the whole mission, which attests the excellent quality of Paranal sky. These conditions have permitted to collect 1884 acquisitions, more than in any previous GSM campaign.

Micro-thermal data acquisition have been operational during 9 nights ; it started on November 29, after installation of the sensors on the mast, and stopped on December 7.

Results of the campaign Throughout this report the universal time (UT) is given. A date always refers to the beginning of the night. The data summary for the mission is presented in Table 1. In the first columns we give date, median speed and direction of the wind at 10 m altitude. Next 3 columns contain the nightly median values of main atmospheric parameters measured by GSM, namely seeing ε, outer scale $\mathcal{L}_0$ and isoplanatic angle θ_0. In the last column the seeing values computed by the ESO DIMM are listed.

During our mission the overall median seeing was slightly worse than long–term average for Paranal ($0.70''$), but typical for the whole 1998 year, with its monthly average seeing of $0.9'' - 1''$. We note a very good stability of atmospheric parameters. Notably, in the period of December 1 – 5 surprisingly little variation of all main parameters occurred. Similar values were found again on December 15, 16 and 17.

The graphic representation of the ensemble of GSM data is given in Fig. 7.32.

TAB. 7.2 – Data summary

Date	Wind at 10 m m/s		ε $''$	$\mathcal{L}_0$ m	θ_0 $''$	$\varepsilon_{\mathrm{DIMM}}$ $''$
27.11	7.3	E→N	0.81	23.8	1.95	0.79
28.11	0.6	S→W	0.67	15.6	2.45	0.97
29.11	6.9	SE (stable)	0.99	45.3	1.68	1.05
30.11	3.6	S→W	1.02	21.7	1.90	1.00
1.12	4.1	S→NW→NE	0.90	16.7	1.78	0.85
2.12	5.4	N→E→N	0.88	16.9	1.75	0.85
3.12	4.8	E→N	0.79	16.8	1.97	0.76
4.12	4.5	E→N	0.81	17.0	2.17	0.69
5.12	5.2	E→N	0.90	16.5	2.09	0.87
6.12	8.3	N→NE	0.86	24.5	1.74	0.84
7.12	6.5	N→NE	1.03	19.4	1.48	0.95
8.12	3.2	S→N	0.90	16.9	1.51	0.80
14.12	6.3	S (stable)	0.92	48.4	1.95	0.95
15.12	3.4	SE→N	0.95	21.5	2.22	0.80
16.12	3.1	SE→N→NE	0.89	17.5	2.54	0.96
17.12	6.5	E→N	0.89	23.6	1.41	0.99
18.12	8.8	N→NE	1.31	37.0	3.17	1.46
19.12	10.8	N (stable)	0.73	33.9	2.09	0.83
20.12	6.5	E→N	1.29	23.7	1.41	1.30
Average median values			0.88	22.0	1.90	0.87

Wavefront outer scale statistics GSM is the first instrument capable to measure the $\mathcal{L}_0$ continuously and to study the statistics of this important parameter. During its previous missions it was found that $\mathcal{L}_0$ follows a log-normal distribution, with a dispersion of $\log(\mathcal{L}_0)$ of about 0.23, and rather similar median values, ranging from 24 to 31 m, were obtained in all GSM campaigns (Ziad et al. [172]). Large isolated values of $\mathcal{L}_0$, called “bursts”, were also noted at all sites.

At Paranal we, for the first time, registered during several periods relatively small and stable outer scales. Our overall median $\mathcal{L}_0 = 22.0$ m is smaller than at other sites studied. The smallest nightly median of 15.6 m was measured on November 28, and median values of 16-17 m were persisting during the continuous period of 5 nights (Table 1 and Fig. 7.32).

In the plot of $\mathcal{L}_0$ given in Fig. 7.32(a) we note the occurrence of two nights with relatively large median values of $\mathcal{L}_0$ (45 and 48 m on November 29 and December 14,

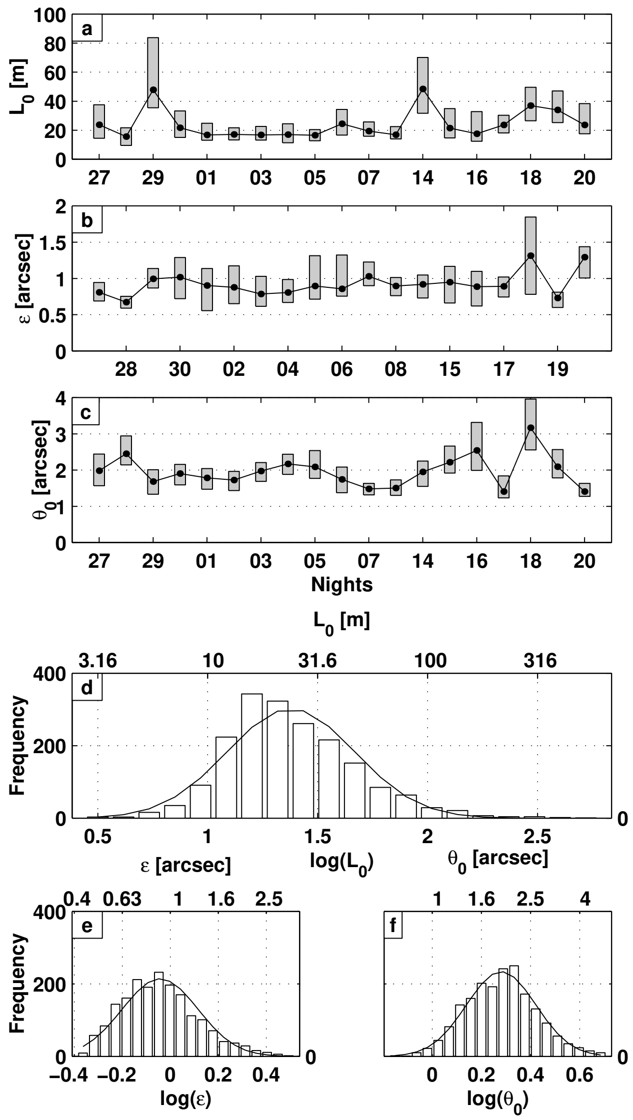


FIG. 7.32 – Summary of the GSM data at Paranal : evolution of (a) : wave–front outer scale $\mathcal{L}_0$, (b) : seeing ε and (c) : isoplanatic angle θ_0 during the 19 nights of the mission. For each night the median value of the considered parameter is plotted as a dot and the rectangle indicates the range in which 50% of the values are included. The histograms of these 3 parameters ((d) , (e) and (f)) correspond closely to a log–normal distribution.

respectively). On both these nights the wind of 6 m/s was blowing from South, which is not typical for Paranal.

During any single night there is no obvious systematic correlation of $\mathcal{L}_0$ with seeing, even if a poor correlation appears sometimes. The value of the correlation coefficient between all the nightly median values of $\mathcal{L}_0$ and ε (0.3) is lower than the one obtained at La Silla (0.72). The bursts of $\mathcal{L}_0$ exist at Paranal, as well as at other sites.

Curiously, a burst occurred at about the same time, 03h30, during several nights. We believe that this effect is not an artefact, but reflects some real changes in the turbulence regime at Paranal site. Persistent local effects occurring in the SL at the same local time during several nights were also found (see below).

Contribution of the surface layer to the overall seeing

Surface layer detection from GSM and DIMM measurements A comparison of seeing values measured simultaneously by ESO DIMM and GSM shows that most of the time both instruments are in excellent mutual agreement. An example of such agreement is given in Fig. 7.33.

However, for some periods GSM measured a worse seeing than DIMM because of the lower height of GSM, which makes it more sensitive to the SL turbulence. This situation appeared soon after the beginning of our mission as an enigmatic effect : for several consecutive days, starting from December 1 and until December 5, GSM registered a much worse seeing than DIMM for a period of about one hour, around local midnight. For the rest of the time, the agreement was good. A most clear example of this phenomenon (which we call here midnight local turbulence, or MLT) is given in Fig. 7.34. On December 2, starting from 03h00 UT, GSM gives a seeing systematically worse than that given by DIMM. This particular local phenomenon (MLT) is explained in the next subsection.

Statistical contribution of the surface layer to the global seeing The microthermal data, also plotted in Fig. 7.33 and Fig. 7.34, confirm the idea that the divergence between GSM and DIMM seeing is caused by the strong turbulence in the first few meters above the ground. Indeed, the period of disagreement exactly matches the turbulence increase at 3 m. Similar behavior was observed on the nights of December 1–5 corresponding to the period of stable atmospheric conditions, already noted in Sect. 3. Ground wind of 5 m/s was prevailing during this period, with a direction slowly changing from East to North during the night, and with moderate velocity variations. This qualitatively similar wind pattern associated with the MLT phenomenon is another confirmation of its local nature.

A simple statistical processing of the temperature micro-fluctuation data permits to give a global behavior of the C_n^2 measured at the three heights during 9 nights. For each height, about 45000 values of the structure constant have been recorded and processed. The results can be seen in Fig. 7.35 which shows clearly that statistically the

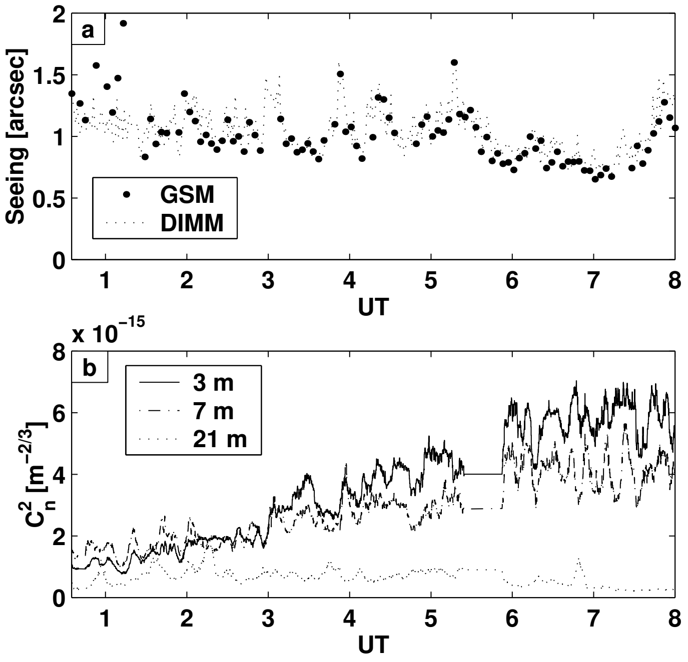


FIG. 7.33 – The seeing measured by GSM (full circles) and ESO DIMM (dotted line) on the night of November 29 is plotted in the upper panel, showing an excellent agreement between both instruments. Simultaneous recordings of the C_n^2 with temperature sensors at the heights of 3, 7 and 21 m are plotted in the lower panel.

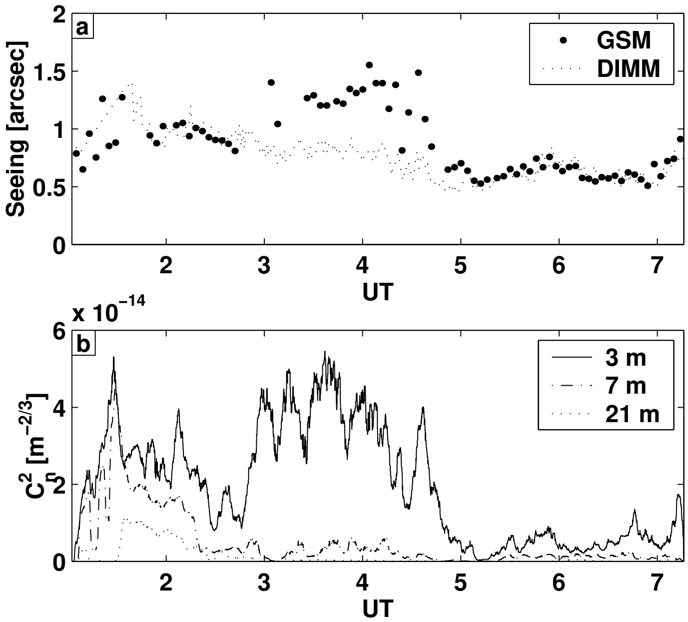


FIG. 7.34 – Same as Fig. 7.33 for the night of December 2. The local turbulence around midnight caused the difference of the seeing measured by GSM and DIMM. It matches the increase of C_n^2 at the height of 3 m. This layer affected GSM but was below DIMM.

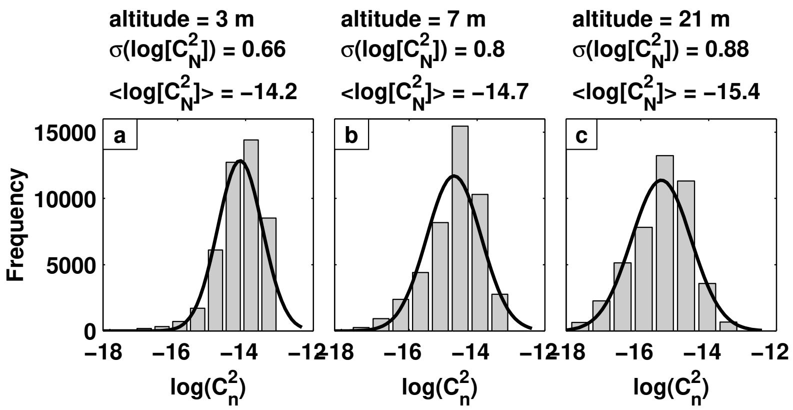


FIG. 7.35 – Histograms of the C_n^2 values computed from the temperature sensors at 3 altitudes , (a) : 3m , (b) :7m and (c) :21m

C_n^2 mean value near the ground (at 3 m) is greater than the one at 21 m. The ratio of the corresponding values of C_n^2 is approximately 16. Conversely, the dispersion grows with height.

To estimate the relative contribution of the SL to the total seeing degradation, a turbulent energy ratio (TER) can be defined as the ratio of the turbulent energies in the (3m–21m) and (3m – infinity) layers :

$$TER = \frac{\int_{3m}^{21m} C_n^2 dh}{\int_{3m}^{+\infty} C_n^2 dh} \tag{7.5}$$

For all the nights between Nov. 29 and Dec. 07 during which temperature data where available, this ratio has been computed each four minutes in order to match the sampling rate of the GSM which provides the turbulent energy from 3 m to infinity from its measurements of the r_0. Numerator of the above expression is deduced from the integration of rough C_n^2 profile given by the temperature sensors between 3 m and 21 m. Night by night mean values of the TER can be found in Fig. 7.36. From the table one can see that nightly values are in a ratio of 1 to 2.4.

On the other hand, a corresponding seeing ratio can be written as $\mathrm{TER}^{3/5}$. This parameter gives the ratio of the seeing degradation produced in the SL alone (between 3 and 21 m) to the total seeing.

Histogram of the seeing ratio and its cumulative distribution are plotted in Fig. 7.36. The median value is 27.8%. Fifty percent of the values centered on the median are between 19.5% and 35.2%. The shape of the seeing ratio histogram suggests a normal distribution ; with this assumption a mean value of 27.9% is found and 68% of the total values are in the range [16.9% ;38.8%].

It is thus evident that the contribution of the SL to the global seeing is far from being negligible and, although GSM is more affected by SL turbulence, DIMM is not always entirely free of it either. Ground turbulence, a part of which appears above DIMM but below VLT, may partially explain the difference sometimes detected between UT telescopes and DIMM seeings.

Conclusions The GSM mission to Paranal was highly successful and for the first time provided the statistical data on the wave–front outer scale at this site. Our main results consist in the following :

- The distribution of the wave–front outer scale $\mathcal{L}_0$ at Paranal is close to log-normal, with a median value of 22.0 m. It means that because $\mathcal{L}_0$ is comparable to the telescope aperture size the effects of the finite outer scale on the operation of VLT are significant and result in reduction of image motion.
- The correlation of $\mathcal{L}_0$ with local meteorological conditions was noted. For typical conditions of NE wind, stable nightly median values of $\mathcal{L}_0$ around 16 m are found,

Date	TER [%]
29.11	7.18
30.11	7.69
01.12	13.41
02.12	17.06
03.12	14.11
04.12	9.90
05.12	16.76
06.12	16.50
07.12	10.26
Mean	12.5

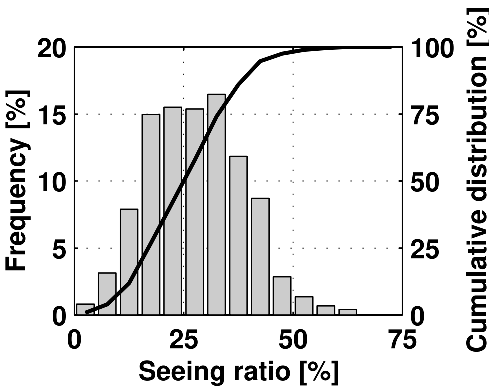


FIG. 7.36 – Values of the turbulent energy ratio for the 9 nights for which temperature data are available. Histogram of the seeing ratio and corresponding cumulative distribution.

whereas for the southern wind (associated with the wind shear in the boundary layer) they are over 45 m.

- Excellent agreement of the seeing measured by the GSM and by the ESO DIMM is found. Median seeing for our campaign was 0.88″ for GSM and 0.87″ for DIMM.
- The median value of the isoplanatic angle θ_0 was 1.90″ during our mission. This appears as an intermediate value in comparison with our estimations during previous measurement campaigns at other observatories (1.26″ at La Silla, 2.48″ at Maidanak and 2.73″ at Cerro Pachon). Thus, the high-altitude turbulence over Paranal appears to be not substantially different from other observatories.
- The strong local turbulence in the first few meters of the surface layer exists at Paranal for some periods of time, as evidenced by DIMM-GSM comparison and micro-thermal mast measurements.
  Turbulent energy in the SL contributes an average amount of only 12.5% to the total turbulent energy detected by GSM along the line of sight. In other words, this means that the mean seeing degradation in the layers situated under a height of 21 m is about 28% of the global seeing. While unit telescopes of the VLT are not affected by these layers, the situation will not be the same for auxiliary telescopes (ATs) of the VLTI which are planed closer to the ground. Hence, continuous micro-thermal monitoring at Paranal appears to be desirable to study the local effects in detail and to assess their importance for the site seeing and particularly for the ATs.
- The temporal evolution of atmospheric parameters at Paranal seems to be rather specific (prolonged periods of stable conditions ; dependence on the wind speed and its fluctuations ; repeatable increases of surface layer turbulence) compared to other sites, and warrants further investigation. A better understanding of the

mechanisms of Paranal seeing will eventually lead to forecast observing conditions.

The analysis of the spatio–temporal cross–correlations of the AA fluctuations can lead to the detection of the atmospheric layers (Avila et al. [11]). From the AA cross–correlations one can estimate the number of predominant turbulent layers, their respective strengths, the velocity and direction of the wind which carries the turbulent eddies. The principle of the wind measurement with GSM is given in Conan et al. ([36]). The full wind analysis and cross-correlation interpretation must include simultaneous comparisons with other parameters, $\mathcal{L}_0$, ε and θ_0. The methods of such complete analysis are still under development.

Acknowledgements : This work was done under a contract between the European Southern Observatory (ESO) and the Département d'Astrophysique of the Nice University.

The success of this observing campaign is a result of a long and tedious preparatory work done at the Département d'Astrophysique of the Nice University. We acknowledge the efforts of A. Robini, J.-F. Manigault and M. Azouit in the development of GSM and of the mast equipment, and the help of the staff of the"Observatoire de la Cote d'Azur". On–site preparation of GSM campaign at Paranal was organized and implemented by ESO under the supervision of M. Sarazin. We are indebted to Francisco Gomez for helping with observation during the second half of the mission.

7.1.6 Observatoire de la Côte d'Azur à Calern (France) : depuis Novembre 1999

Les mesures à l'Observatoire du plateau de Calern résultent de quatre séries de mesures ayant au lieu aux dates suivantes (mm.jj.aa) :

1. 11.23.99 → 11.25.99,
2. 05.20.00 → 05.25.00,
3. 06.06.00 → 06.08.00,
4. 06.18.00 → 06.22.00.

Les valeurs médianes de $\mathcal{L}_{\mathbf{0}}$, ε et θ_0 calculées sur l'ensemble des mesures sont 27,4 m, 0,98" et 1,96", respectivement. Ces valeurs font du plateau de Calern un site astronomique honorable d'autant plus que, au cours de plusieurs nuits, les valeurs de ε et θ_0 ont atteint les valeurs remarquables de 0,5" et 4".

FIG. 7.37 – GSM sur les rails de l'interféromètre I2T à Calern. A gauche, on peut voir le local qui abrite les éléments de commande de l'expérience, au milieu en arrière–plan, le bâtiment dan lequel GSM est rangé pendant la journée et à droite, la coupole du télescope de Schmidt.

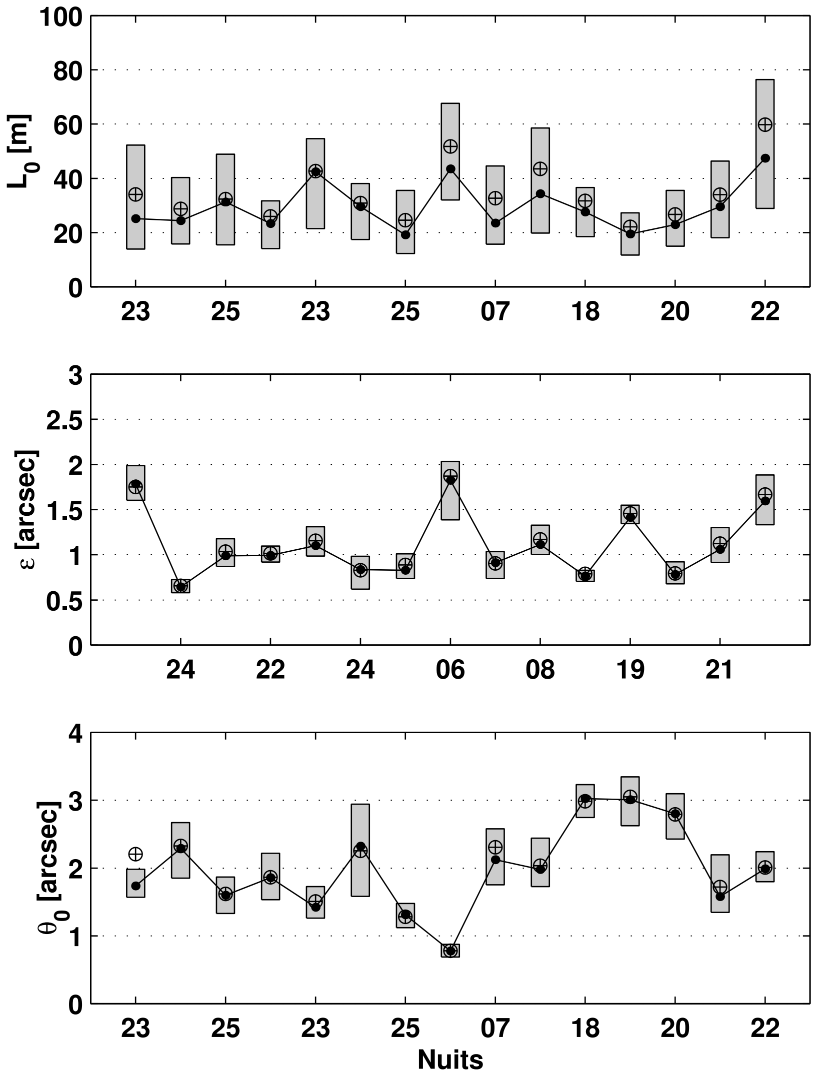


FIG. 7.38 – Evolution nuit par nuit des paramètres $\mathcal{L}_{\mathbf{0}}$, ε et θ_0 mesuré au moyen du GSM à l'Observatoire de Calern. Les symboles • et ⊕ représentent les valeurs moyennes et médianes, respectivement. Les rectangles donnent l'intervalle qui contient 50% des valeurs, centré sur la valeur médiane.

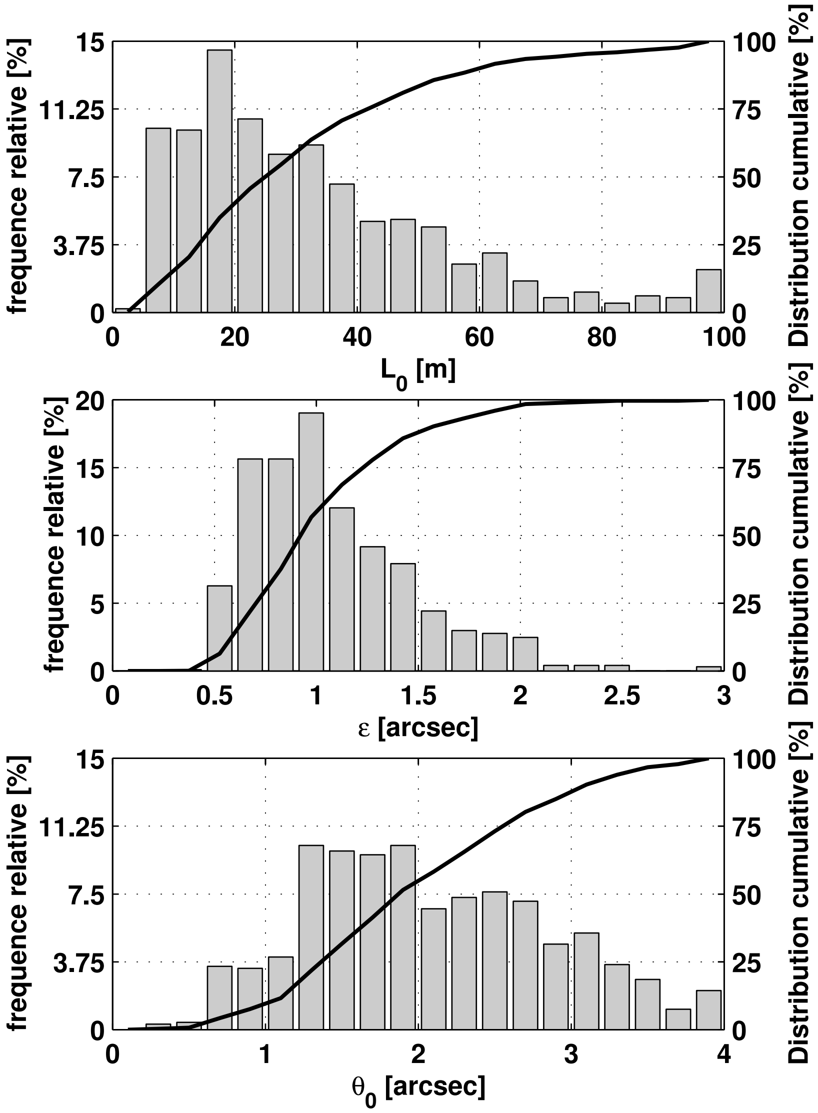


FIG. 7.39 – Histogramme et fonction de répartition de toutes les valeurs des paramètres $\mathcal{L}_\mathbf{0}$, ε et θ_0 mesurées au moyen du GSM à l'Observatoire de Calern.

Chapitre 8

Analyse spatio–temporelle des angles d'arrivée mesurés au moyen du "Generalized Seeing Monitor"

On a vu précédemment que le GSM enregistre, typiquement toutes les quatre minutes, simultanément quatre séries temporelles d'angle d'arrivée (AA) d'une durée de deux minutes. Les six corrélations temporelles que l'on en déduit peuvent être d'une grande utilité pour une analyse quantitative du nombre de couches turbulentes dans l'atmosphère et de la contribution relative de chacune de ces couches à l'énergie totale de la turbulence.

La décorrélation des inhomogénéités du champ aléatoire des fluctuations d'indice de réfraction est caractérisée par une vitesse de transport liée à la vitesse du vent à l'intérieur des couches et par le temps d'évolution de la turbulence. Si le temps d'évolution est négligeable par rapport au temps de transport entre deux points de mesure alors l'hypothèse de "turbulence gelée" ou hypothèse de Taylor s'applique. M. Schöck[141, 140] a montré que cette hypothèse est valide pour des temps de transport variant de 10 à 50 ms selon les cas.

8.1 Les corrélations temporelles des angles d'arrivée

J'ai montré dans l'article de la section 3.6 du chapitre 3 que, dans le cadre de l'hypothèse de Taylor, la corrélation temporelle est égale à une coupe de la covariance spatiale bi–dimensionnelle le long de la droite définie par $\vec{B} - \tau\vec{v}$ où $\vec{B}$ est le vecteur base, $\vec{v}$ le vecteur vent et τ le décalage temporel. Dans le cas multi-couche, la corrélation est la somme des coupes selon les droites définies par $\vec{B} - \tau\vec{v}_i$ pondérées par l'énergie totale de la turbulence. $\vec{v}_i$ est le vecteur vent dans la couche turbulente numéro i.

En se référant à la figure 8.1, on trouve que le temps τ mis par un tourbillon pour être détecté d'abord par le module 1 puis par le module 3 par exemple est donnée par

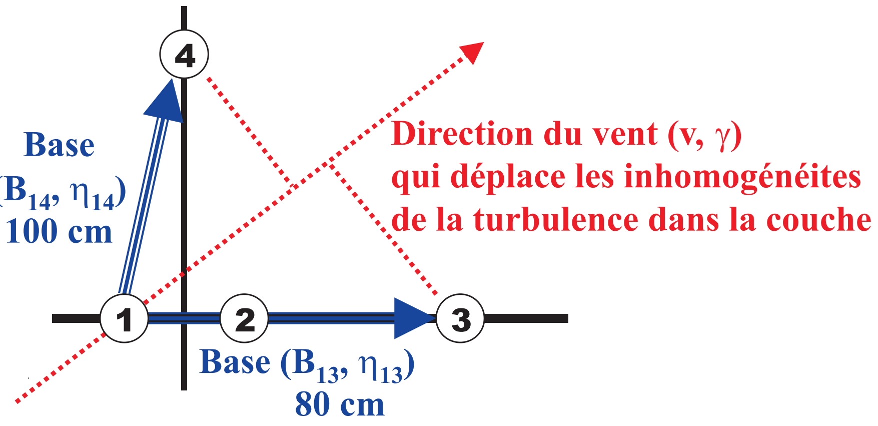


FIG. 8.1 – Représentation du vecteur vent relativement aux bases formées par les quatre modules de GSM

la formule

$$\tau = \frac{B\cos(\gamma - \eta)}{v} \tag{8.1}$$

où $[B, \eta]$ et $[v, \gamma]$ sont les coordonnées polaires de $\vec{B}$ et $\vec{v}$, respectivement. Il est communément admis que τ est aussi égal au décalage temporel des corrélations des AA entre les modules 1 et 3. Se basant sur ce résultat, nous avons développé un programme de mesures de la vitesse et de la direction du vent dans les couches turbulentes associées aux maxima des corrélations. L'article qui suit présente les résultats obtenus pour les missions effectuées aux Observatoires de La Silla (Chili) et de Maïdanak (Ouzbékistan).

8.1.1 Article paru dans le proceeding du Colloque ESO/OSA Topical Meeting on Astronomy with Adaptive Optics – Present Results and Future Programs pages 133–142 à Sonthofen (Allemagne) en Septembre 1998

Titre : Spatio-temporal analysis of the wave front with the GSM

Auteurs : R. Conan[1], A. Ziad[1], R. Avila[1], A. Tokovinin[2], F. Martin[1] and J. Borgnino[1]

Résumé : The Generalized Seeing Monitor (GSM) is specifically a monitor of the outer scale. It measures also the seeing angle and the scintillation index. The GSM is operational since one year and its data base contains already the results of three campaign in different astronomical sites. Before the end of the year 1998, two other missions will still extend this data base. These integrated parameters useful for the design of the Adaptive Optics Systems have to be completed by local parameters

[1]U.M.R. Astrophysique N^o 6525 - C.N.R.S. - Université de Nice-Sophia Antipolis
[2]Sternberg Astronomical Institute, Universitetsky prosp., 13, 119899 Moscow, Russia

as the C_n^2 profiles or the wind profiles. With an analysis of the angles of arrival of the wavefront, the GSM is now able to detect the more turbulent layers of the atmosphere and to measure the wind which carries the turbulent eddies inside.

Introduction

Since a few years, new telescopes with an aperture of 8–10 meter equipped with Adaptive Optics System (AOS) are building. The astronomical sites where are based these instruments were chosen for their very low seeing angle, for their very low humidity, for the very few numbers of cloudy-days in one year and so one... Among all the atmospheric parameters, there is one for which the effect on the performances of the AOS increases relatively to the size of the aperture of the telescopes : the wave-front outer scale $\mathcal{L}_0$. For example, with a 10 m telescope, the residual error on the wave–front reconstruction after a tip–tilt correction increases as the outer scale decreases [163] and the small $\mathcal{L}_0$ values attenuate the mean square of the low-order Zernike modes [166]. In front of the necessity to obtain a larger knowledge of this parameter, the Generalized Seeing Monitor (GSM) was build. Operational since one year and after three missions in Chile (La Silla), Morocco (Oukaimden) and Uzbekistan (Maydanak), the GSM provides the first data bank on the outer scale. The atmosphere is often described as a pile of turbulent layers. These layers are reduced to one assumed equivalent and the spatial properties of the wave front are well–matched with this single equivalent–layer [150][122]. However, individual informations on the layers can lead to an optimization of the AOS. As shown by Racine [116], if the altitude of the layers are taken into account and the deformable mirror is conjugated to the altitude of a layer with a high C_n^2, the isoplanatic patch size can double. This is the concept of Altair : the AOS of the Gemini North Canadian telescope. The characteristic time scale of the evolution of the wave front for an AOS gives an estimation of the time that the system can spend in the closed loop. This time depends on the temporal evolution of the layers and is a function of the wind profile [124]. In this paper, after a presentation of the GSM, a method to determine the wind in a few layers using cross-correlations of the slopes of the wave front is exposed.

The presentation of the GSM

Principle As explained above, the GSM is a monitor of the outer scale which measures also the seeing angle and the scintillation index. It is constituted of four telescopes with 10 cm apertures (Fig. 1). Each one has a module which measures the angles of arrival (AA) of the wave front incoming from a single unresolved star. The modules are described in Martin et al. (1994) [103]. In this standard mode, the GSM measures the atmospheric parameters every four minutes. During the two first minutes, it records the AA and the two other minutes are used for computing. Two telescopes are coupled on the same mount to work as the Differential Image Motion Monitor (DIMM) of the ESO. The four telescopes are disposed in a L–shaped layout (Fig. 2) to allow the measurements of the speed and the direction of the winds. This configuration permits to construct

FIG. 8.2 – Figure 1 : The GSM instrument at La Silla

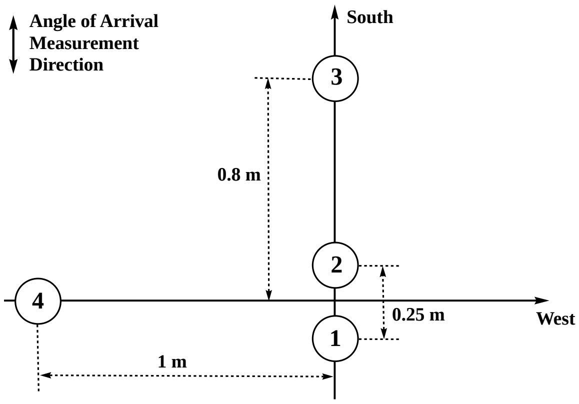


FIG. 8.3 – Figure 2 : The layout of the GSM

six baselines for the cross-analysis between the AA. The comparison between the six experimental spatial-covariances of the AA and a grid of theoretical one leads to six values of $\mathcal{L}_0$. The final value is the median of the six. The theoretical spatial-covariances are computed from the Von Kàrmàn power–spectrum of the phase. The seeing angle ε is deduced from the variance of the AA measured individually with each telescope and differentially with the two telescopes coupled. As the GSM measures also the flux of the star, the dispersion of the flux, corrected from noise, provides the scintillation index σ_I^2.

Results obtained for $\mathcal{L}_0$, ε and σ_I^2 at La Silla (Chile) and at Maydanak (Uzbekistan)

The figures 3 and 4 present these three parameters measured respectively at La Silla (Chile) in August–September of 1997 and at Maydanak (Uzbekistan) in July of 1998.

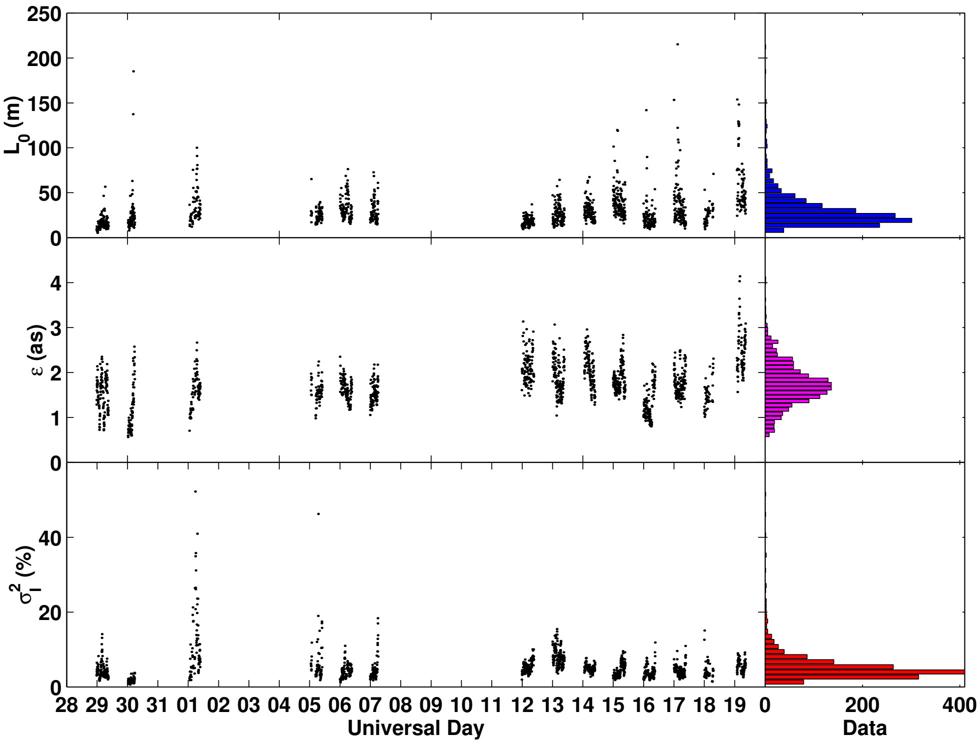


FIG. 8.4 – Figure 3 : La Silla (Chile) August 28 – September 19 1997

The two graphs show the parameters versus the time over the whole mission and the corresponding histograms. For both missions, a DIMM worked near the GSM and a good agreement was found between the seeing measured by both instruments.

La Silla The mission ran for 14 nights. The mean value of $\mathcal{L}_0$, ε and σ_I^2 are respectively 25 m, 1.7 arcsec and 4.4%. The mean value of ε is strongly higher than the typical values registered at La Silla. The statistical distributions of $\mathcal{L}_0$ and σ_I^2 look like a log–normal distribution as the distribution of ε is not. The seeing ε is more dependent of the C_n^2 in the surface layer than the two other parameters. σ_I^2 depends principally on the C_n^2 of the layers in the free atmosphere and $\mathcal{L}_0$ is the mean weighted by the C_n^2 of the geophysical outer scale. So the difference between the distributions of $\mathcal{L}_0$ and σ_I^2 on the one hand and the distribution of ε on the other hand could revealed an active surface layer at La Silla during this period. It could also explained the high values of ε.

Maydanak The mission ran for 9 nights. The mean value of $\mathcal{L}_0$, ε and σ_I^2 are respectively 32 m, 0.7 arcsec and 4.4%. The distributions of the three parameters are quasi log–normal. The mission at Maydanak are remarkable for the stable meteorological conditions and for the very low seeing angles.

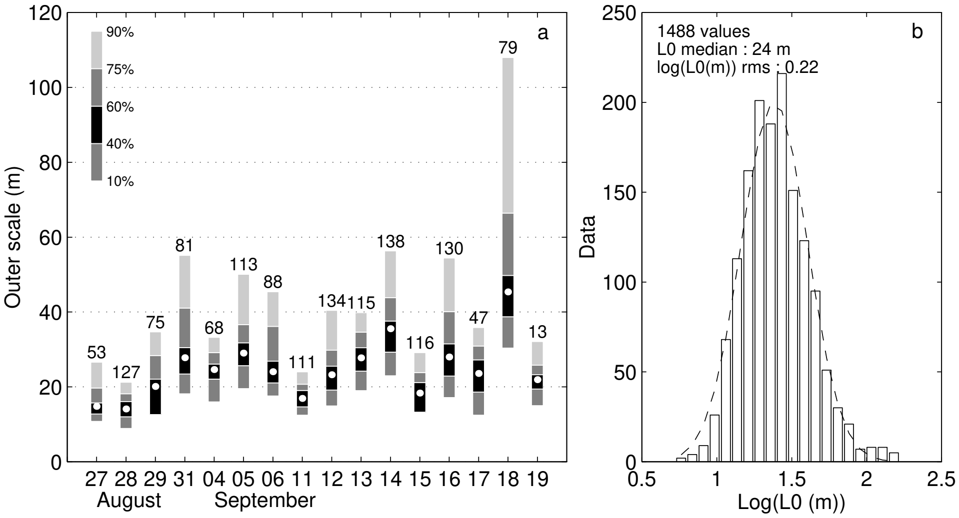


FIG. 8.5 – Figure 4 : Maydanak (Uzbekistan) July 16–24 1998

Analysis of the spatio-temporal cross-correlation of the AA

Principle The objective here is to measure the wind in the layers which deteriorate the wave front. The following demonstration is based on two assumptions. The first one is that the whole atmosphere is a pile of turbulent layers and the second is that the Taylor hypothesis is true in each layer. The first hypothesis is now well–verified by the C_n^2 profiles measured since many years and the evidence of the second will be made by the comparison with the winds measured by the weather station of the DIMM. On the figure 5, two of the six baselines and the wind direction of a layer are drawn on the schematic layout of the GSM. From this graph, an important time can be defined : the time $\Delta\tau_{ij}$ taken by a turbulent eddy, carried by the wind, to be detected successively by two telescopes. This time depends on the baseline which links up the two telescopes and on the wind [11] as follows :

$$\Delta\tau_{ij} = \frac{B_{ij}\cos(\gamma_{ij} - \eta)}{v},$$

where i and j represent the telescopes and the couple (B_{ij},γ_{ij}) and (v,η) are the polar coordinates of the baseline vector and of the wind vector respectively. In the cross-correlation between the AA measured by the telescopes i and j, $\Delta\tau_{ij}$ corresponds also to the position of the peak due to the motion of the eddy of the layer characterized by the wind (v,η). The aim being to find both speed v and direction η of the wind, another baseline, non parallel to the first one, gives another $\Delta\tau_{kl}$ and the two equations lead to the polar coordinates of the wind vector. In fact, with the six baselines, 15 couples of equations exist and the elimination of the couples of baselines parallel (1.2, 2.3, 1.3) or nearly parallel (1.4, 2.4) gives finally 11 couples of equations. The final wind is the mean of the 11 winds.

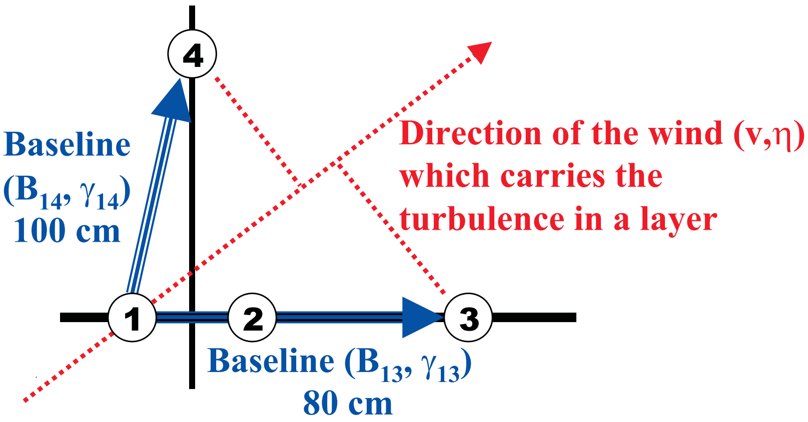


FIG. 8.6 – Figure 5 : Baselines and wind

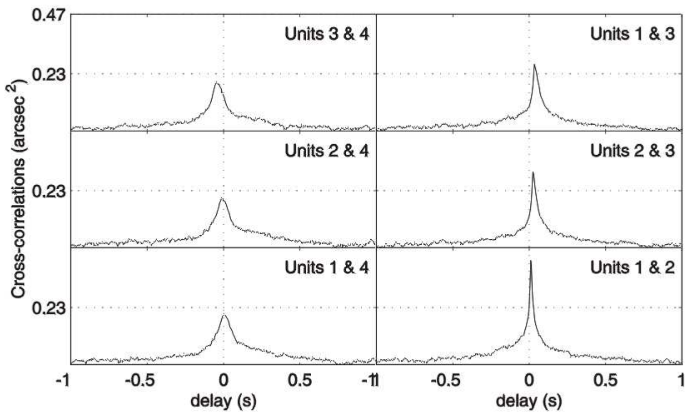


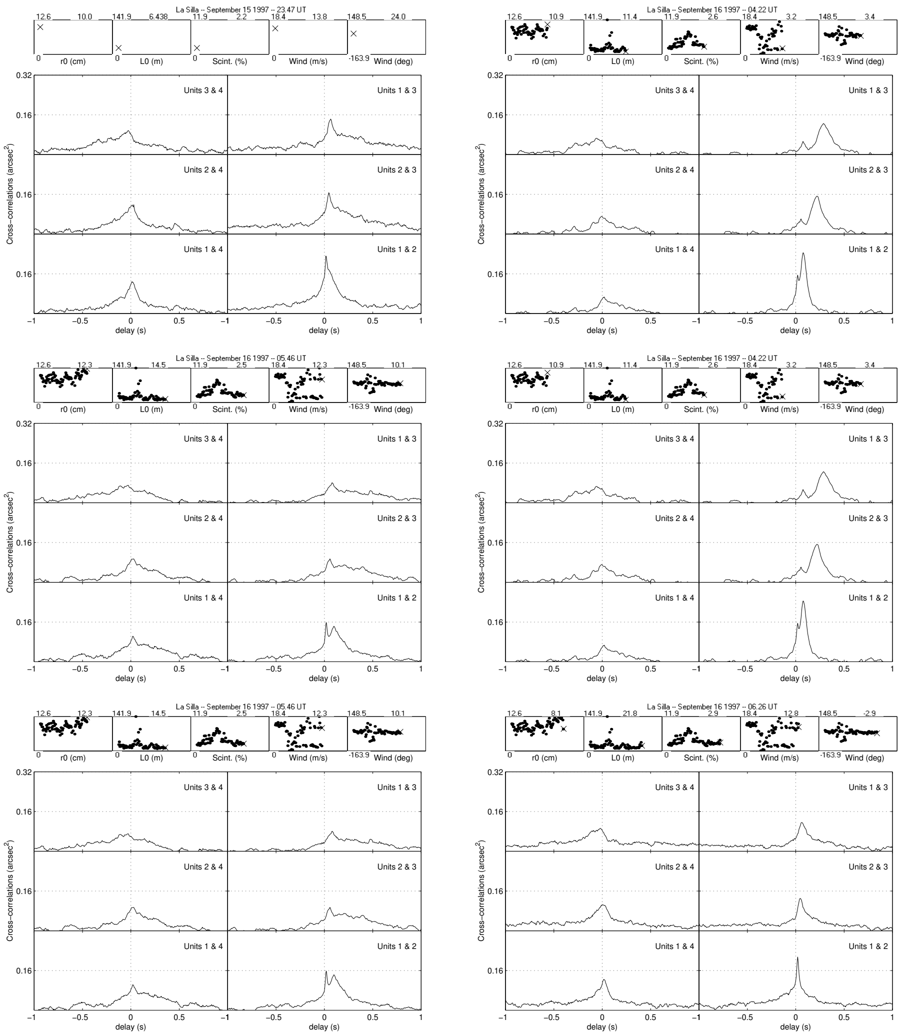
FIG. 8.7 – Figure 6 : La Silla 18 Sept. 1998 – 02 :53 UT

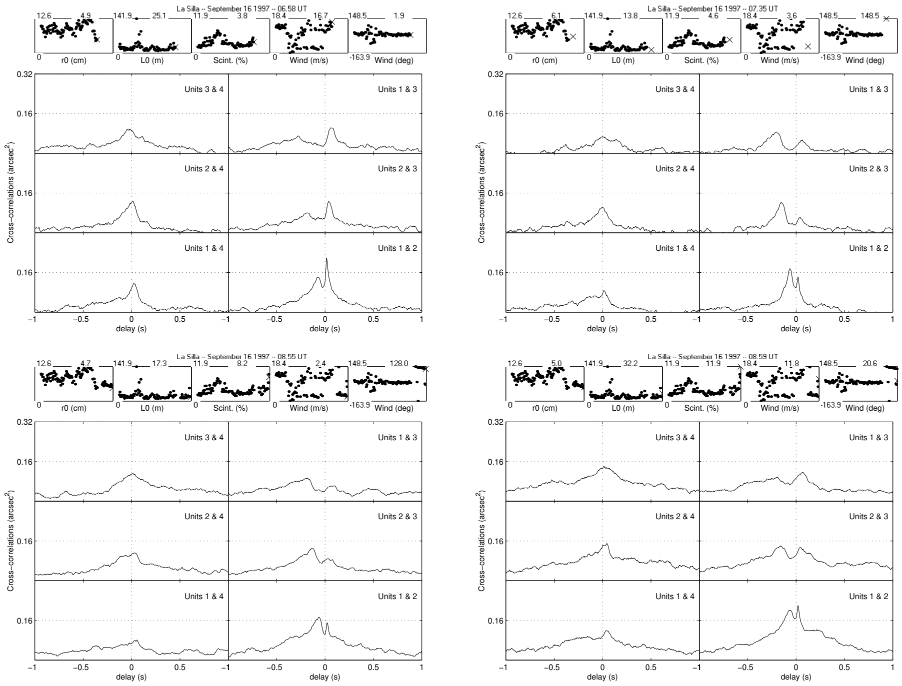
The figure 6 is an example of the six cross-correlations. The units are the corresponding telescopes. It is a zoom between -1 and $+1$ second of the complete cross-correlations which vary from -2 mn to $+2$ mn. The positions of the peaks give a wind which blows approximately from the north at 25 m/s.

Temporal evolution of the cross-correlations of the AA

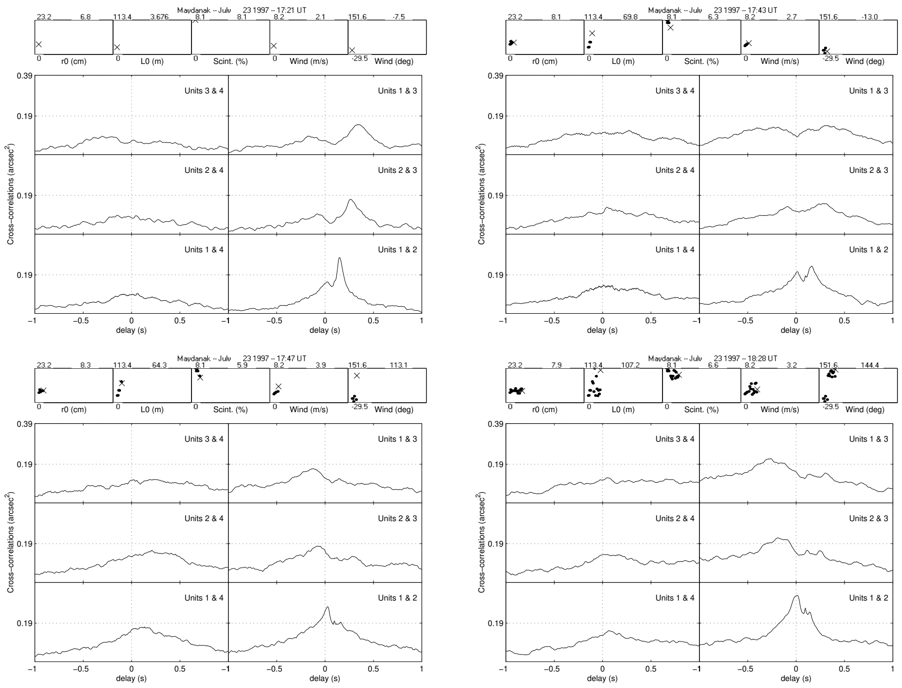
Snapshots at La Silla and at Maydanak In the precedent example (fig. 6), one layer is put in evidence but most of the time, until 4 layers are detected and the winds measured. The cross–correlation shape becomes a multi–peak cross–correlation associated with the multi–layer structure of the atmosphere. Keeping in mind that a peak is related to a layer and that the GSM records the AA every four minutes, the trace of the layers is followed all the night long. Both following sets of graphs for the La Silla and Maydanak missions represent a few extracts of the total sets of cross-correlation of two nights. Each graph shows the cross-correlations as defined in the figure 6 and the corresponding values of the Fried parameter r_0, the outer scale $\mathcal{L}_0$ and the scintillation σ_I^2. The speed and the direction of the wind are deduced from the position of the highest peak of the cross–correlation. The cross indicates the current value and the dots the past values. The graphs are plotted chronologically and must be read from the left to the right and from the top to the bottom.

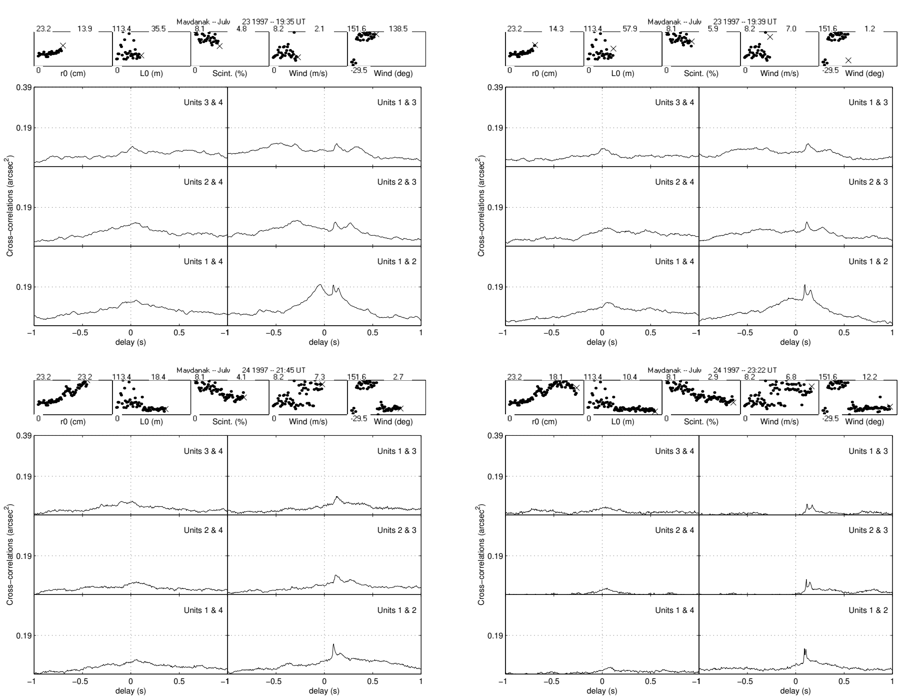
– Cross-correlations of the AA at La Silla (September 15 1997)(Figure 8)





– Cross-correlations of the AA at Maydanak (July 23 1998) (Figure 8)





Discussion The speed and the direction of the winds measured during both nights at La Silla and at Maydanak are reported on the polar graphs, figures 9 and 10 respectively.

On the figure 9, the asterisks represent the winds related to the peak called "closer peak" which is the peak detected all the night and always the nearest of the zero delay line. The other winds are plotted with dots and the diamonds show the winds measured by the weather station of the DIMM. The analysis of the cross–correlations bring out three different winds and let supposed three layers. But the comparison between the winds of the GSM and the winds of the weather station demonstrates the existence of only two layers because for one of them the direction of the wind has changed. And a variation in the direction of the wind causes a variation in the position $\Delta\tau_{ij}$ of the associated peak. The night of September 15 is typical of the winds measured at La Silla during this period. Almost each night, two layers were detected. One gives winds which match the winds measured by the weather station and the other layer have winds blowing all nights in the same direction. The fact that the Taylor hypothesis permits to deduce wind characteristics which are confirmed by another independent measurement proves its validity. The altitude of the layers remains unknown but for the layer which have the same wind than that one measured by the weather station, it is obvious that it is the surface layer.

For Maydanak, the cross–correlations put in evidence four layers well–identified because, during the night, all the combinations of pairs or triplets of layers appear successively. Three winds blow approximately in the direction of the east but with three different speeds : lower than 4m/s, higher than 6.8m/s and between both. The last wind blows in the north–west direction at a speed inferior at 5m/s.

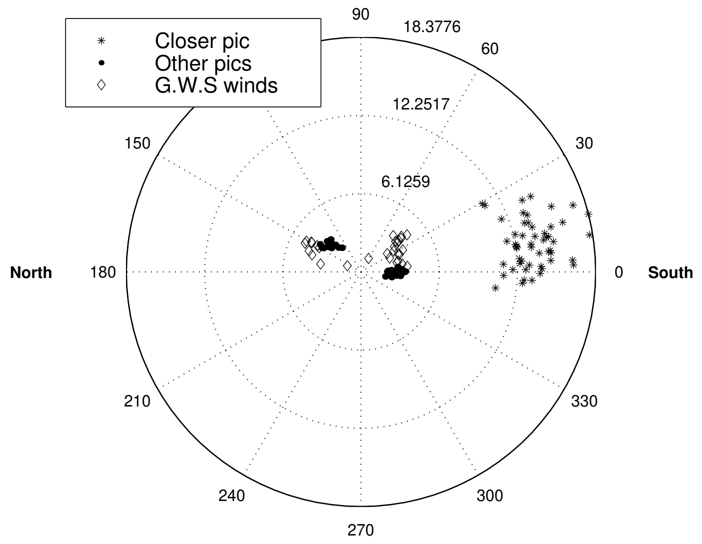


FIG. 8.8 – Figure 9 : Winds measured at La Silla

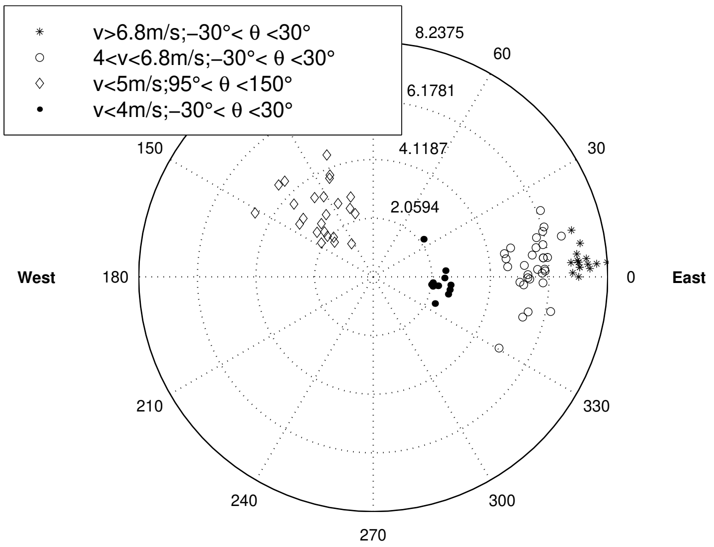


FIG. 8.9 – Figure 10 : Winds measured at Maydanak

Conclusion

The GSM is an instrument which has evolved since its first mission at La Silla (Chile). At first, it gave just the outer scale, the seeing and the scintillation. The analysis of the cross–correlation of the AA has shown how the GSM detects also the predominant turbulent layers and how it measures their winds. The new improvement is the measurement of the isoplanatic angle. The mission at Maydanak was also used to compare the isoplanatic angle measured by the GSM and by the isoplanometer of the team of the Sternberg Astronomical Institute of the University of Moscow ([1]http ://www–astro.unice.fr/GSM/Publications/Maydanak_report.ps). A very good agreement was found between both series of data. Now, the GSM is the unique portable instrument able to provide a so complete set of atmospheric parameters for the optical astronomy. The name of the instrument has followed the evolution, the acronym GSM remains but at the beginning it means Grating Scale Monitor due to the conception of the modules which measure the AA and to the main purpose fixed to the experiment. Henceforth the Generalized Seeing Monitor denomination is more adapted to its widened competencies. Two other missions have occurred at Oukaimden in Morocco and at Maydanak in Uzbekistan. In October 1998, a new mission will take place at the Cerro Pachon in Chile, the site of the Gemini South telescope. The GSM will work simultaneously with the Generalized Scidar of the Department of Astrophysic of the University of Nice [8] and in–situ profiles of pressure, temperature, humidity, C_n^2 and wind will be collected with sounding–balloons. It will be the first time than these different instruments dedicated to the study of the atmosphere are gathered on the same site and the expected result is a better understanding of the effects of the turbulent phenomena in optical astronomy. The last mission of the year 1998 will be at Cerro Paranal in December.

8.1.2 Discussion

Malheureusement, après la publication de cette communication, une étude plus approfondie de la covariance spatiale des AA, nous a convaincu que l'interprétation des résultats publiés devait être révisée. Cette étude, qui est le sujet de l'article de la section 3.6 du chapitre 3, montre que la covariance est anisotrope et que cette anisotropie rend caduque la relation de l'Eq.(8.1) à deux exceptions près. L'Eq.(8.1) reste valable lorsque la direction du vent est parallèle à la direction de la base et/ou à la direction de mesure des AA.

L'anisotropie remet aussi en cause l'interprétation quantitative des corrélations temporelles. Jusqu'alors, on admettait qu'à chaque maximum de la corrélation correspondait une couche ou un ensemble de couches turbulentes caractérisé par un vent $\vec{v}$, or la forme particulière de la covariance des AA permet dans certaines configurations qu'à $\vec{v}$ soient associés deux maxima.

[1] A Web server for the GSM data is under construction in order that the scientific community can consult the growing data base of the GSM and particularly the unique data base concerning the outer scale (URL : http ://www–astro.unice.fr/GSM).

L'analyse de l'évolution temporelle des AA doit aussi être reconsidérée. En effet, supposons que nous ayons obtenu une corrélation avec deux maxima. Si, au cours du temps, les amplitudes des deux maxima varient indépendamment l'une de l'autre, on pourrait en déduire qu'il s'agit de deux couches turbulentes chacune avec son propre vent. Or, la corrélation obtenue avec une couche turbulente unique mais dont l'orientation du vent fluctue autour de la direction perpendiculaire à la base produit le même résultat.

On constate donc que la mesure du vent et l'estimation du nombre de couches prédominantes dans l'atmosphère à partir des corrélations temporelles d'une composante des AA reste un problème délicat dont la solution n'est évidente que lorsque la corrélation ne présente qu'un seul maximum. Lorsque l'on a accès aux deux composantes des AA, il a été montré [64, 112, 140, 141] que l'on peut plus aisément interpréter les corrélations et en déduire la vitesse du vent de chaque couche.

8.2 Mesure de la vitesse et de la direction du vent dans les couches turbulentes

Nous avons montré que la formule classique donnée par l'Eq.(8.1) ne peut s'appliquer, dans le cas général, à la corrélation temporelle des AA. J'ai donc développé une méthode permettant d'obtenir le module v et la direction du vent γ dans la couche turbulente associée à un maximum de la corrélation tout en tenant compte de l'anisotropie de la covariance.

La corrélation temporelle est une coupe de la covariance bi–dimensionnelle selon la droite $y = B_y - \tan(\gamma)\,(B_x - x)$. B_x et B_y sont les coordonnées cartésiennes de la base. Pour une direction du vent fixe, les maxima de la corrélation pour différentes bases sont portés par une courbe unique. Sur la figure 8.10, nous avons reporté les lignes de niveau de la covariance spatiale et symbolisé par des carrés noirs les différentes bases de GSM. Les deux courbes en trait plein représentent les positions des maxima pour $\gamma = 15^o$ et $\gamma = 60^o$, respectivement. Les coupes des six bases pour les deux directions du vent sont indiquées en pointillé. Le maximum de chaque coupe, indiqué par un cercle, se trouve sur la courbe des maxima correspondant à la direction de la coupe selon la direction du vent. Donc, pour mesurer v et γ, il suffit de trouver sur quelle courbe des maxima se positionnent les maxima des six corrélations.

La procédure pour mesurer v et γ est la suivante :

1. Mesure des positions du maximum τ_{max} de chaque corrélation.
2. Calcul des coordonnées spatiales des maxima par la relation $\vec{B} - \tau_{max}\vec{v}$ pour $\vec{v}$ fixé.
3. Calcul de la corrélation temporelle à partir de l'expression théorique de la covariance spatiale le long de la droite $y = B_y - \tan(\gamma)\,(B_x - x)$ pour les valeurs de r_0 et $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ obtenues au moyen du GSM et pour les six bases.
4. Mesure des coordonnées spatiales des maxima des corrélations théoriques.
5. Calcul de la somme des écarts quadratiques S entre les coordonnées spatiales des maxima théoriques et expérimentaux.

6. Itération sur v et γ.

Puisque à chaque valeur de S est associée un vecteur vent $\vec{v}$, la plus petite valeur de S nous donne les valeurs de v et γ. La valeur de γ est obtenue à π près car une coupe dans la direction $\vec{v}$ ou $-\vec{v}$ a le même maximum.

Malheureusement, cette méthode ne peut fonctionner que dans le cas mono-couche. Dans le cas multi–couches, chaque corrélation peut présenter plusieurs maxima et il est impossible de savoir quels sont les maxima des six corrélations qui se rapportent à la même couche.

Très peu de nuits présente un seul maximum sur les six corrélations tout au long de la nuit. Ce fut le cas pour la nuit du 18 Septembre 1997 à l'observatoire de la Silla et la nuit du 12 Avril 1998 à l'observatoire de l'Oukaimeden. Les diagrammes polaires de la figure 8.11 donnent les valeurs de v et γ mesurées en utilisant la méthode précédemment décrite. Les valeurs moyennes de v et γ sont $20,6 \pm 3,2$m.s^{-1} et 16 ± 15^o à La Silla et $6.2 \pm 1,2$m.s^{-1} et 202 ± 20^o à l'Oukaimeden, respectivement. La grande disparité des valeurs de γ s'explique soit par les fluctuations de la direction du vent au cours de la nuit, soit par le manque de discrimination entre les différentes courbes des maxima pour les courtes bases.

La direction de référence est donnée par la base 12 (Fig.6.13) qui est orientée du Nord vers le Sud. L'orientation correcte du vent est déduite de la corrélation des AA entre les modules 1 et 2. Si le maximum de cette corrélation est positif, le vent vient du Nord sinon il vient du Sud. Lorsque la direction de vent est perpendiculaire à la base 12, son orientation est obtenue à partir des corrélations entre les modules 1 et 4 ou 2 et 4.

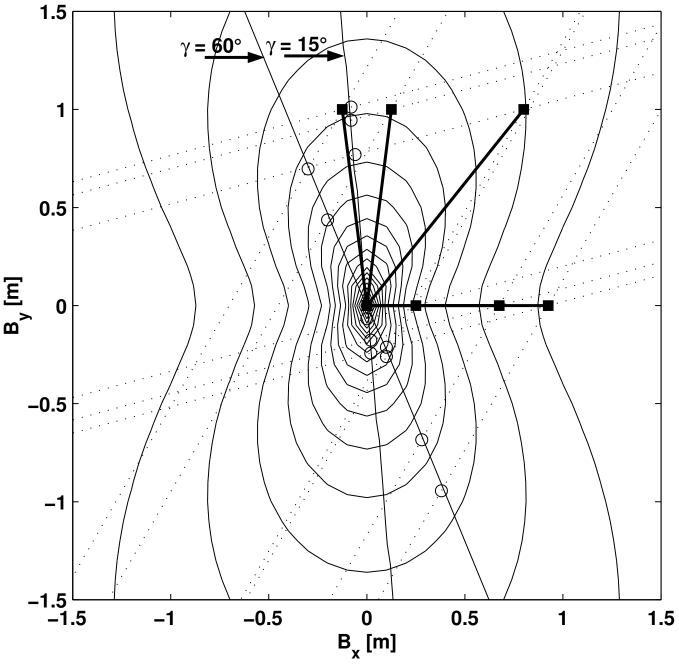


FIG. 8.10 – Lignes de niveau de la covariance spatiale bi–dimensionnelle des AA sur lesquelles on a reporté les bases de GSM symbolisées par ■ et les courbes des maxima pour $\gamma = 15^o$ et 60^o, respectivement. Les courbes en pointillé donnent les positions des différentes coupes et les cercles les positions des maxima des différentes coupes.

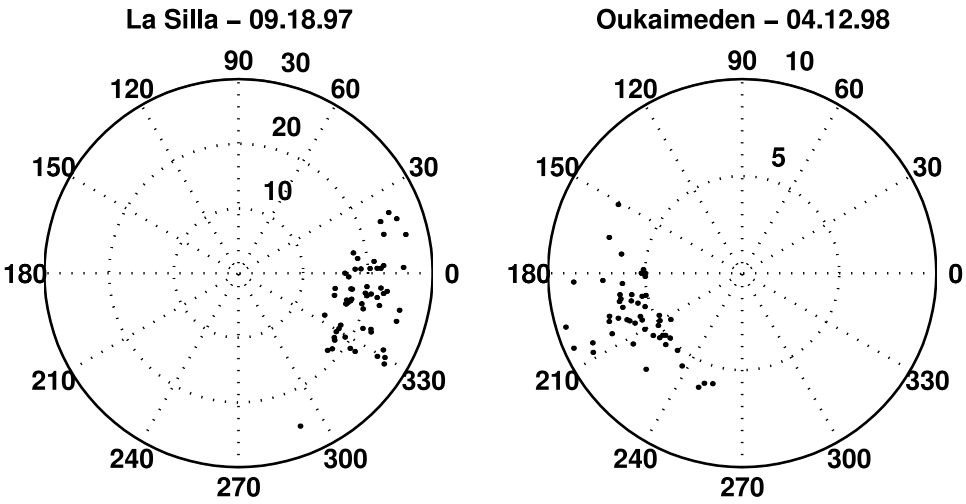


FIG. 8.11 – Représentation des coordonnées polaires du vecteur vent mesuré la nuit du 18 Septembre 1997 à l'observatoire de La Silla (Chili) et la nuit du 12 Avril 1998 à l'observatoire de l'Oukaimeden (Maroc).

Chapitre 9

Analyse de la mission du “Generalized Seeing Monitor” à l’Observatoire du Cerro Paranal du point de vue de l’Optique Adaptative

Dans les chapitres précédents ont été présentés les résultats des différentes missions effectuées au moyen du GSM. La base de données ainsi constituée est unique non seulement par les valeurs d’échelle externe qu’elle contient mais aussi par le nombre de paramètres mesurés. Cette base de données peut être exploitée pour estimer les performances d’une technique HRA sur un site où des mesures ont été réalisées avec le GSM.

Dans ce chapitre, j’utilise les valeurs du paramètre de Fried r_0 et de l’échelle externe $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ mesurées à l’Observatoire de Cerro Paranal au moyen du GSM pour évaluer les performances d’un système d’optique adaptative associé à un grand ou un très grand télescope sur ce site. Ce télescope est supposé n’être limité que par la diffraction et l’atmosphère. On admet aussi que le modèle de Von Kármán est parfaitement vérifié. Je calcule en particulier la variance des polynômes de Zernike, l’erreur résiduelle après correction et le rapport de Strehl après correction pour des télescopes de diamètre $D = 8$, 30 et 100 m.

9.1 La variance des coefficients des polynômes de Zernike

Les figures 9.1, 9.2 et 9.3 donnent le rapport $R_{\langle |a_i|^2 \rangle}$ entre les variances $\langle |a_i|^2 \rangle$ calculées pour une échelle externe finie et pour une échelle externe infinie. Le diamètre D du télescope est successivement égal à 8 m, 30 m et 100 m et les valeurs de r_0 et $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ sont celles obtenues au moyen du GSM à l’Observatoire du Paranal. Les valeurs de $\langle |a_i|^2 \rangle$ sont obtenues à partir des expressions établies dans la section 4.2 du chapitre 4.

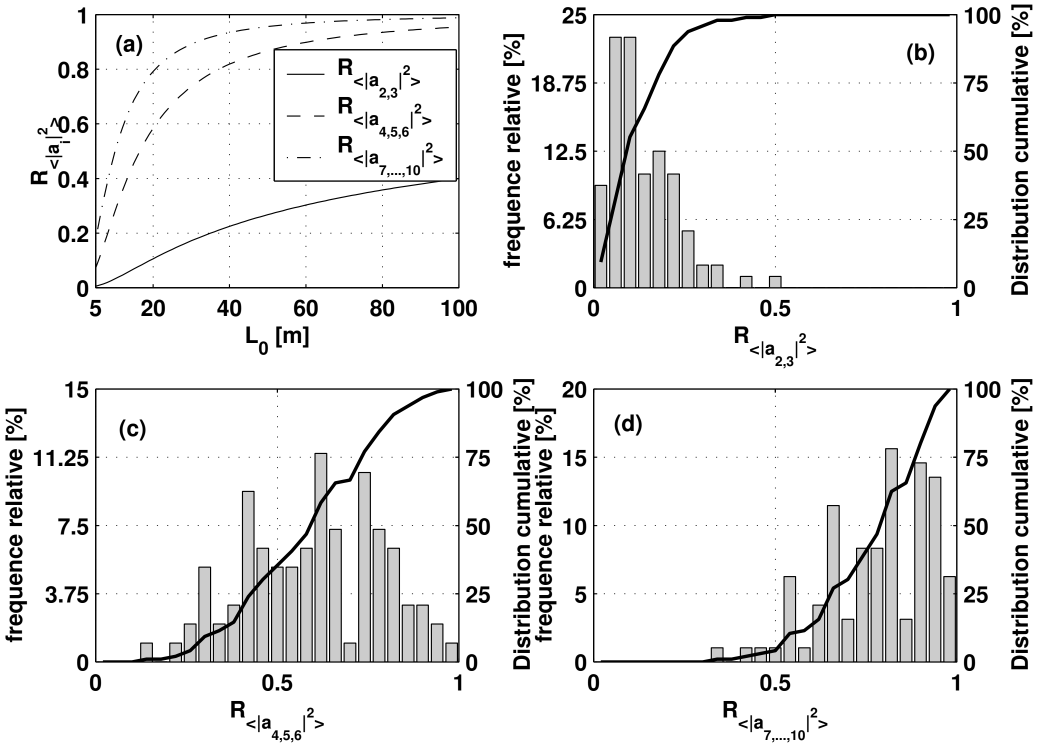


FIG. 9.1 – Rapport $R_{\langle|a_i|^2\rangle}$ entre les variances des coefficients des polynômes de Zernike calculées pour une échelle externe finie et pour une échelle externe infinie. Le diamètre D du télescope est égal à 8 m. Le graphique (a) rappelle la variation théorique de $R_{\langle|a_i|^2\rangle}$ en fonction de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$. Les trois autres graphiques (b), (c) et (d) représentent les histogrammes de $R_{\langle|a_i|^2\rangle}$ pour les modes de Zernike $i = 2{,}3$, $i = 4{,}5{,}6$ et $i = 7, \ldots, 10$, respectivement.

Le graphique (a) rappelle la variation théorique de $R_{\langle|a_i|^2\rangle}$ en fonction de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$. Les trois autres graphiques (b), (c) et (d) représentent les histogrammes de $R_{\langle|a_i|^2\rangle}$ pour les modes de Zernike $i = 2{,}3$, $i = 4{,}5{,}6$ et $i = 7, \ldots, 10$, respectivement. Chaque histogramme correspond donc à un degré radial.

Lorsque D augmente, l'importance du tip/tilt diminue dramatiquement pour représenter moins de 1/100 de sa valeur pour une échelle externe infinie lorsque D = 100 m. Le poids des autres modes diminue rapidement avec D mais leurs distributions sont plus étalées que celle du tip/tilt car ils saturent plus vite. Ils tendent à avoir la même distribution que le tip/tilt du fait de l'homogénéisation de l'énergie de tous les modes imposée par la valeur finie de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$.

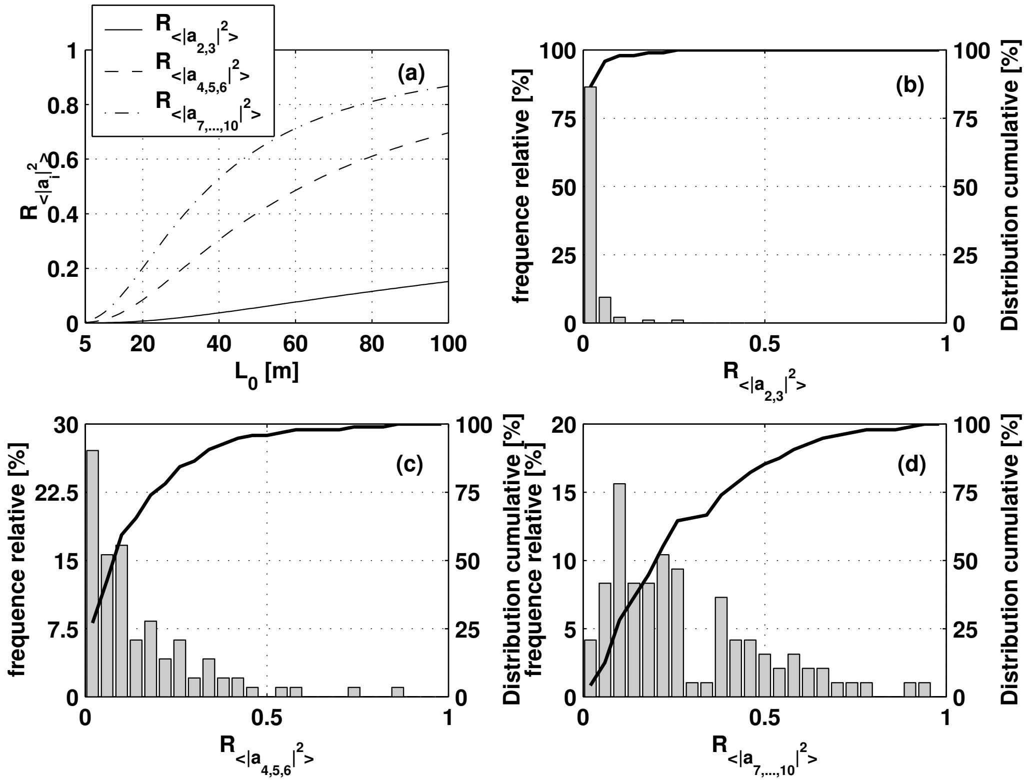


FIG. 9.2 – Rapport $R_{\langle|a_i|^2\rangle}$ entre les variances des coefficients des polynômes de Zernike calculées pour une échelle externe finie et pour une échelle externe infinie. Le diamètre D du télescope est égal à 30 m. Le graphique (a) rappelle la variation théorique de $R_{\langle|a_i|^2\rangle}$ en fonction de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$. Les trois autres graphiques (b), (c) et (d) représentent les histogrammes de $R_{\langle|a_i|^2\rangle}$ pour les modes de Zernike $i = 2{,}3$, $i = 4{,}5{,}6$ et $i = 7, \ldots, 10$, respectivement.

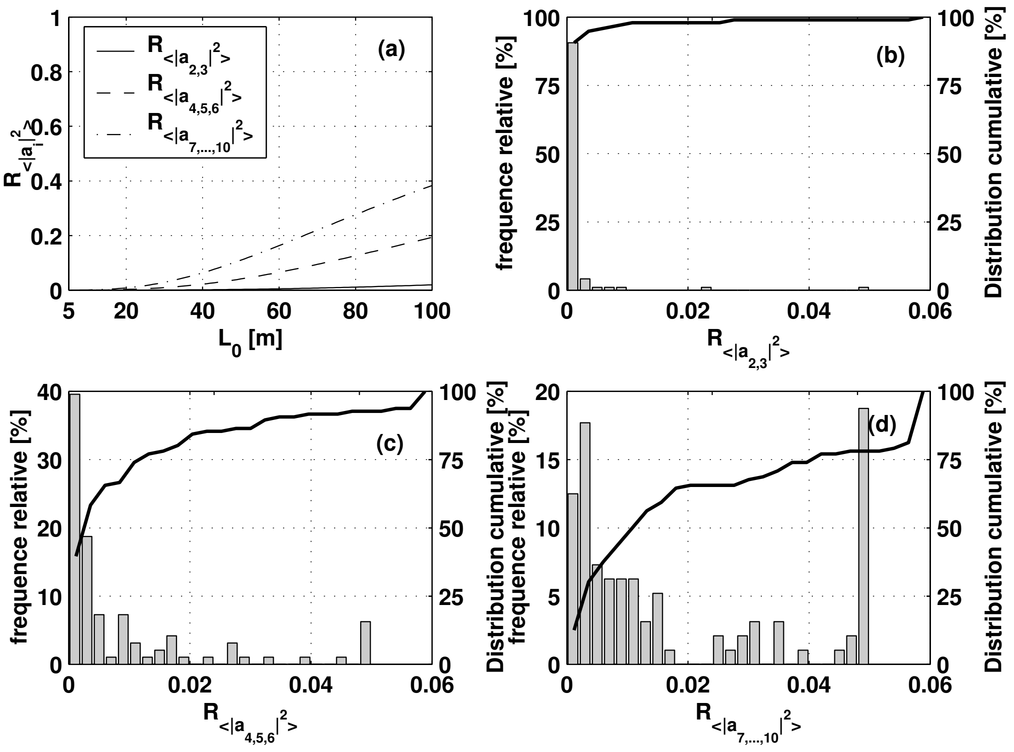


FIG. 9.3 – Rapport $R_{\langle|a_i|^2\rangle}$ entre les variances des coefficients des polynômes de Zernike calculées pour une échelle externe finie et pour une échelle externe infinie. Le diamètre D du télescope est égal à 100 m. Le graphique (a) rappelle la variation théorique de $R_{\langle|a_i|^2\rangle}$ en fonction de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$. Les trois autres graphiques (b), (c) et (d) représentent les histogrammes de $R_{\langle|a_i|^2\rangle}$ pour les modes de Zernike $i = 2{,}3$, $i = 4{,}5{,}6$ et $i = 7, \ldots, 10$, respectivement.

9.2 L'erreur résiduelle après correction

Les figures 9.4, 9.5 et 9.6 donnent le rapport R_{Δ_N} entre les erreurs résiduelles Δ_N calculées pour une échelle externe finie et pour une échelle externe infinie. Le diamètre D du télescope est successivement égal à 8 m, 30 m et 100 m et les valeurs de r_0 et $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ sont celles obtenues au moyen du GSM à l'Observatoire du Paranal. Les valeurs de Δ_N sont obtenues à partir des expressions établies dans la section 4.3 du chapitre 4.

Le graphique (a) rappelle la variation théorique de R_{Δ_N} en fonction de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$. Les trois autres graphiques (b), (c) et (d) représentent les histogrammes de R_{Δ_N} pour des ordres de correction égaux à $N = 3$, $N = 6$ et $N = 10$, respectivement.

Pour un télescope de 8 m à l'Observatoire du Cerro Paranal avec les valeurs de r_0 et $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ mesurées au moyen du GSM, il n'y a pas une atténuation significative de l'erreur résiduelle après reconstruction de la phase, excepté pour le tip/tilt. Lorsque D augmente, les distributions de R_{Δ_N} se "déplacent" de la limite $R_{\Delta_N} = 1$ (très faible atténuation) vers la limite $R_{\Delta_N} = 0$ (très forte atténuation). Ceci est dû à la diminution de l'énergie totale de la turbulence sur la pupille du télescope. On voit aussi apparaître une tendance à l'homogénéisation des distributions de R_{Δ_N} comme pour $R_{\langle |a_i|^2 \rangle}$.

9.3 Rapport de Strehl après correction

Les figures 9.7, 9.8 et 9.9 donnent les histogrammes du logarithme du rapport de Strehl SR. Le diamètre D du télescope est successivement égal à 8 m, 30 m et 100 m et les valeurs de r_0 et $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ sont celles obtenues au moyen du GSM à l'Observatoire du Paranal.

Le SR est calculé à partir de l'expression approchée donnée par l'Eq.(4.95). Pour les modes N inférieurs à 6, cette approximation est valide pour $Df_0 > 1$et pour $Df_0 < 1$, le rapport de Strehl est légèrement sous-estimé. Pour les modes supérieurs, l'approximation du SR est valide quelle que soit la valeur de Df_0. Pour $D = 8$ et 30 m, le SR est calculé pour les ordres de correction $N = 6$ et 10 et pour $D = 100$ m, il est calculé pour les ordres de correction $N = 3$, 6 et 10 afin de respecter les conditions précédentes.

Lorsque D augmente, la distribution de $\log(SR)$ s'élargit car pour une même valeur de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$, le SR sera plus dégradé pour un télescope de grand diamètre que pour un télescope de petit diamètre. La proportion de valeurs de SR supérieures à 10^{-1} diminue avec l'augmentation de D mais cette diminution sature pour les plus grandes valeurs de D. Comme pour les distribution de $R_{\langle |a_i|^2 \rangle}$ et R_{Δ_N}, les distributions de $\log(SR_N)$ s'homogénéisent lorsque la valeur de D est beaucoup plus grande que les valeurs de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$.

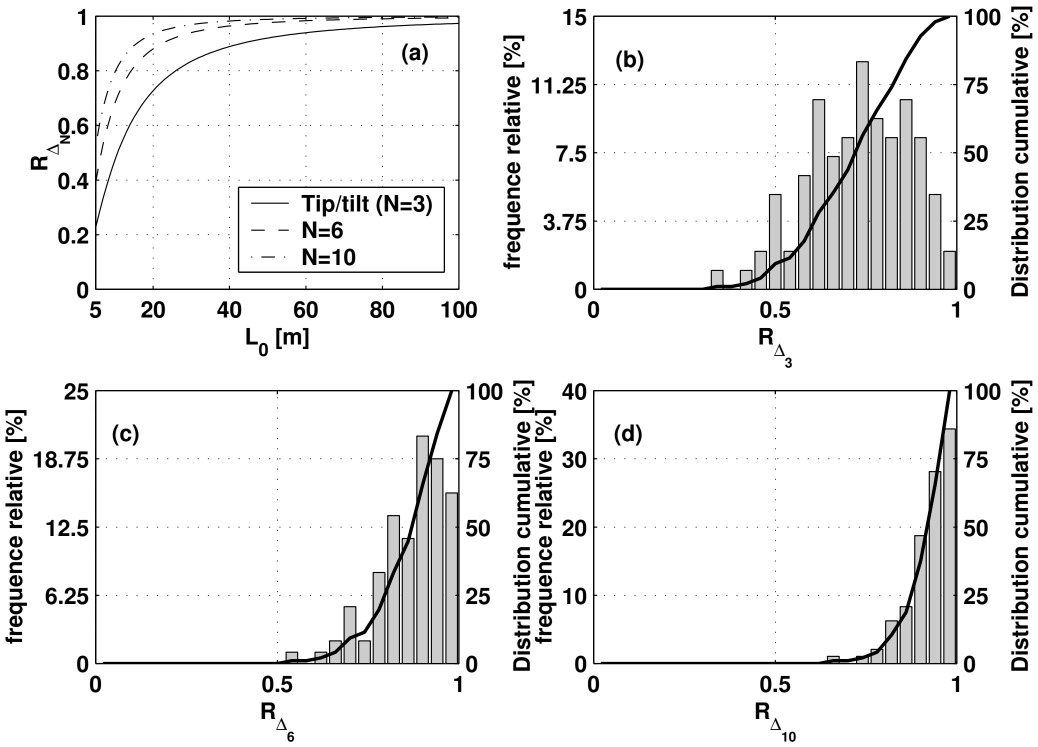


FIG. 9.4 – Rapport R_{Δ_N} entre les erreurs résiduelles calculées pour une échelle externe finie et pour une échelle externe infinie. Le diamètre D du télescope est égal à 8 m. Le graphique (a) rappelle la variation théorique de R_{Δ_N} en fonction de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$. Les trois autres graphiques (b), (c) et (d) représentent les histogrammes de R_{Δ_N} pour des ordres de correction égaux à $N = 3$, $N = 6$ et $N = 10$, respectivement.

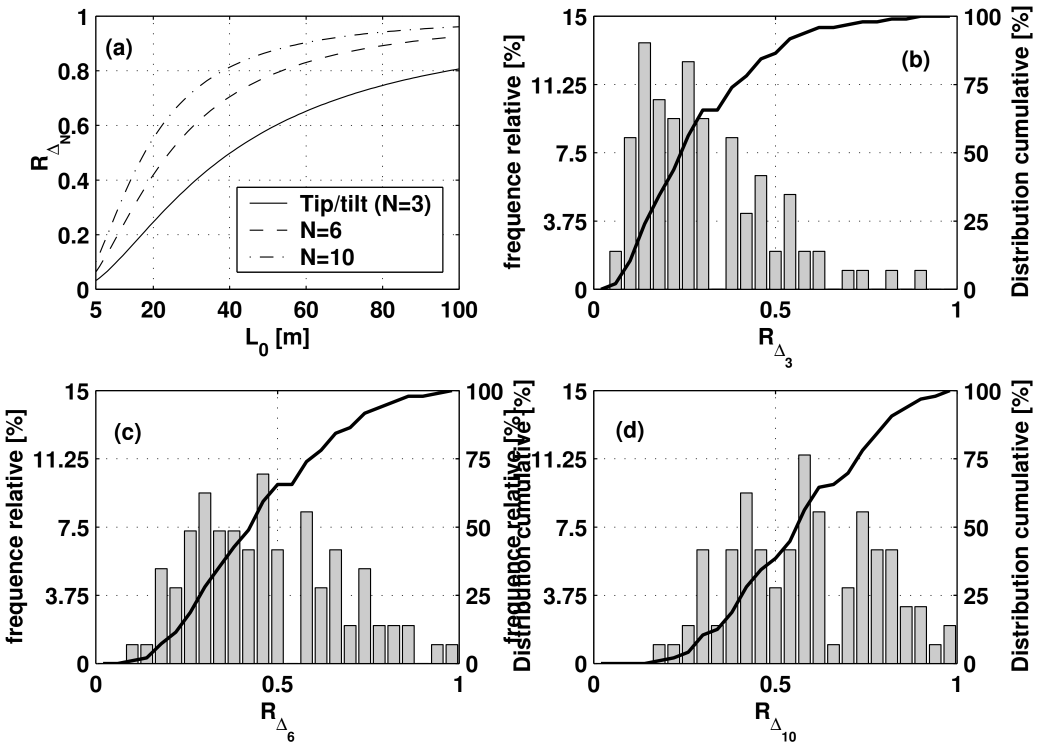


FIG. 9.5 – Rapport R_{Δ_N} entre les erreurs résiduelles calculées pour une échelle externe finie et pour une échelle externe infinie. Le diamètre D du télescope est égal à 30 m. Le graphique (a) rappelle la variation théorique de R_{Δ_N} en fonction de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$. Les trois autres graphiques (b), (c) et (d) représentent les histogrammes de R_{Δ_N} pour des ordres de correction égaux à $N = 3$, $N = 6$ et $N = 10$, respectivement.

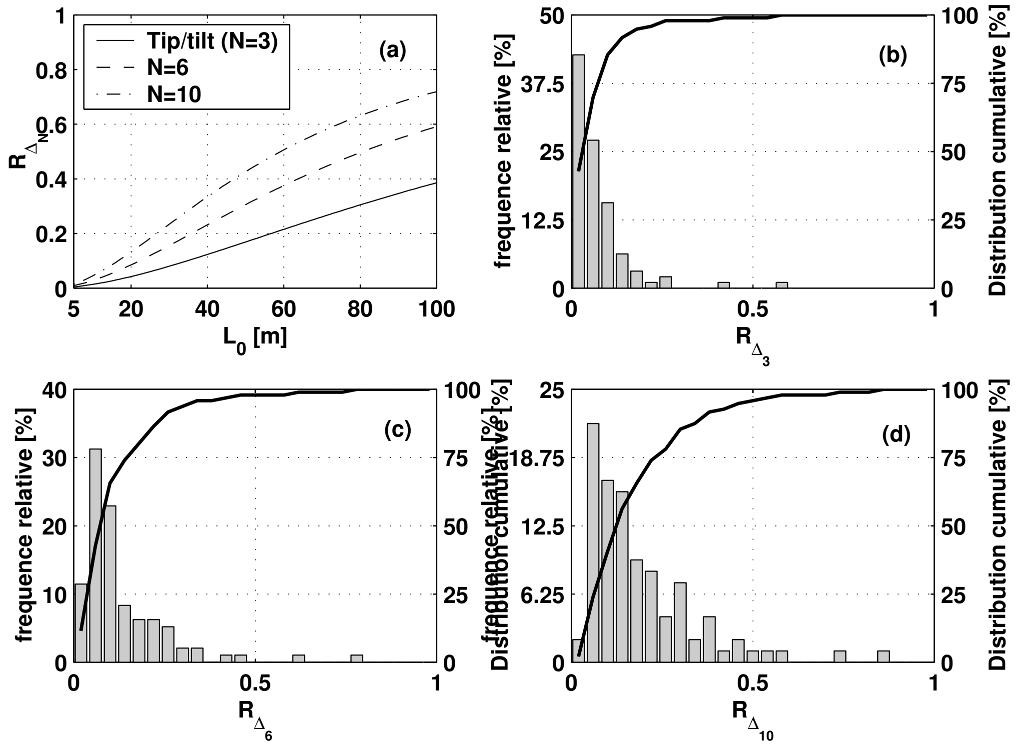


FIG. 9.6 – Rapport R_{Δ_N} entre les erreurs résiduelles calculées pour une échelle externe finie et pour une échelle externe infinie. Le diamètre D du télescope est égal à 100 m. Le graphique (a) rappelle la variation théorique de R_{Δ_N} en fonction de $\mathcal{L}_{\mathbf{0}}$. Les trois autres graphiques (b), (c) et (d) représentent les histogrammes de R_{Δ_N} pour des ordres de correction égaux à $N = 3$, $N = 6$ et $N = 10$, respectivement.

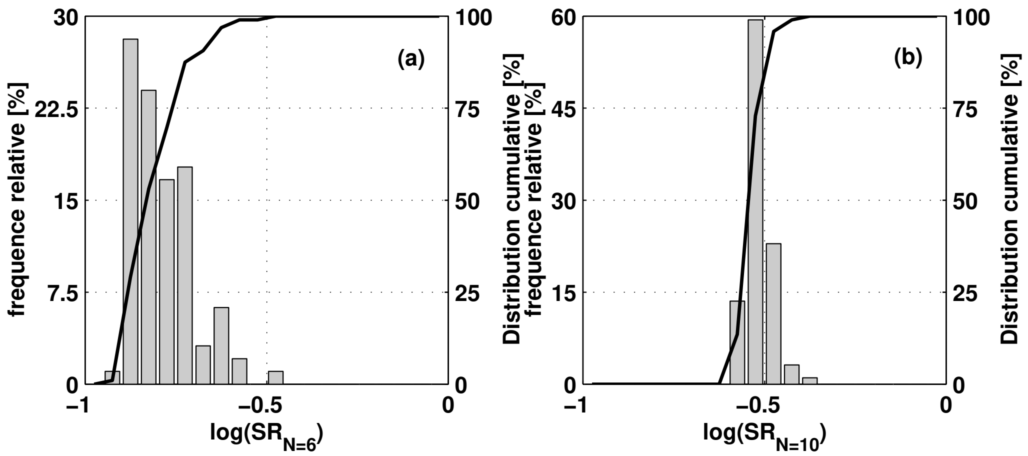


FIG. 9.7 – Histogrammes de $\log(SR)$ pour les ordres de correction $N = 6$ (a) et $N = 10$ (b) pour un diamètre D égal à 8 m.

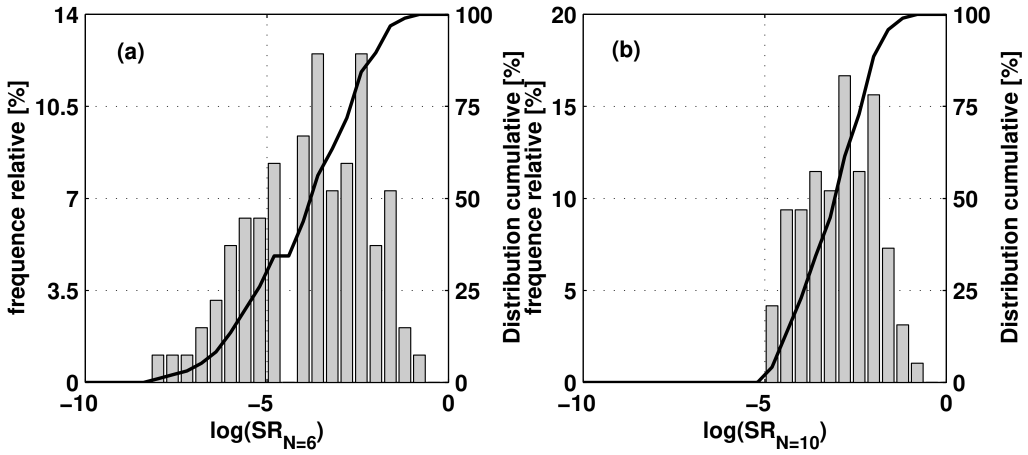


Fig. 9.8 – Histogrammes de $\log(SR)$ pour les ordres de correction $N = 6$ (a) et $N = 10$ (b) pour un diamètre D égal à 30 m.

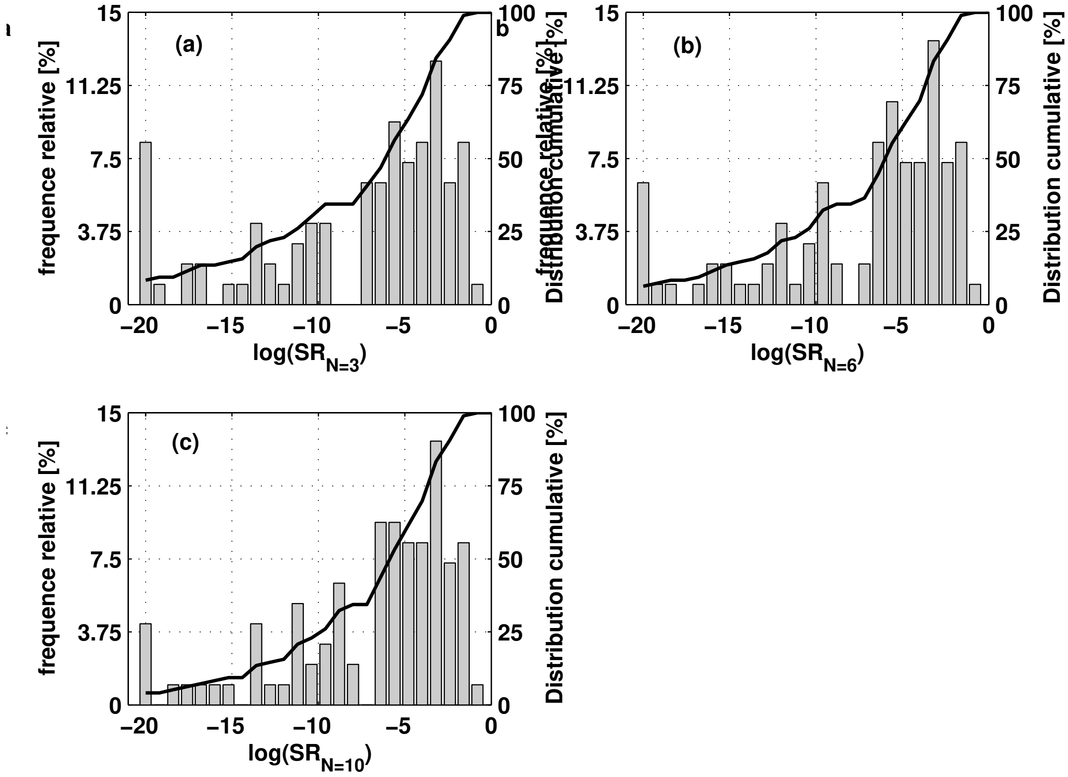


Fig. 9.9 – Histogrammes de $\log(SR)$ pour les ordres de correction $N = 3$ (a), $N = 6$ (b) et $N = 10$ (c) pour un diamètre D égal à 100 m.

Conclusion

Cette partie a présenté le moniteur des paramètres optiques de la turbulence atmosphérique : le GSM.

Le premier chapitre présente une partie importante de mon travail consacrée à l'élaboration et au développement des programmes de traitements des données post–mission. Ce travail a constitué un apport essentiel au développement de l'instrument permettant un traitement systématique des données.

Le second chapitre donne les principaux résultats des différentes missions du GSM. J'ai contribué à ces missions en participant aux campagnes de mesures effectuées au Maroc sur le site de l'Oukaimeden et au Chili à l'observatoire du Paranal (VLT).

Le troisième chapitre s'intéresse aux corrélations des AA. On y montre que pour interpréter convenablement les corrélations, il faut avant tout bien connaître la covariance spatiale des AA. Une méthode innovante de la mesure de la vitesse et de l'orientation du vent dans les couches turbulentes est proposée. Cette méthode à l'avantage de prendre en considération l'anisotropie de la covariance. Mais elle ne s'applique qu'au cas mono–couche. Les nuits pour lesquelles une seule couche turbulente s'est manifestée ne représentent qu'une petite fraction des différentes configurations enregistrées au moyen du GSM. Le cas le plus courant est la présence simultanée de deux maxima dans les corrélations. Le cas multi–couches nécessiterait des développements spécifiques comme l'usage de techniques d'inversion ou de traitements non–linéaire des données.

Le dernier chapitre de cette partie applique à un système d'OA à l'Observatoire de Cerro Paranal les résultats obtenus dans la seconde partie avec les valeurs de r_0 et $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ mesurées au moyen du GSM sur le site. La variance des coefficients des polynômes de Zernike, l'erreur résiduelle et le rapport de Strehl après correction sont calculés pour les premiers modes à la fois pour le modèle de Von Kármán et pour le modèle de Kolmogorov. On constate une forte atténuation de la variance et de l'erreur résiduelle lorsque l'échelle externe est finie et ceci d'autant plus que le diamètre de télescope est grand. Le rapport de Strehl se dégrade avec l'augmentation du diamètre. La fraction de très bonnes valeurs du rapport de Strehl décroît aussi avec le diamètre mais de façon non–linéaire, elle décroît moins vite pour les grands diamètres. Si l'effet de l'échelle externe n'est pas très significatif pour des télescopes de 8 mètres à l'Observatoire du Paranal, il deviendrait majeur pour des télescopes de dimensions supérieures.

Conclusion et perspectives

A travers ce travail, j'ai tenté d'apporter des éléments de réponse au problème de l'effet de l'échelle externe de cohérence spatiale sur les techniques de HRA. L'étude s'est effectuée en trois étapes qui sont la définition d'un formalisme mathématique, la modélisation des effets de la turbulence atmosphérique à l'aide de ce formalisme dans le cadre du modèle de Von Kármán et la présentation d'un instrument de mesure de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ qui a permis de quantifier l'importance de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ avec les paramètres déduits de la modélisation.

J'ai montré que le calcul de quelques intégrales généralisées dépendant d'un petit nombre de paramètres permettait d'obtenir l'expression de la plupart des grandeurs caractérisant les techniques de la HRA. La solution de ces intégrales a été établie avec une méthode d'intégration originale encore peu utilisée. Les valeurs des solutions de ces intégrales sont aussi précises que les valeurs obtenues par une intégration numérique par exemple. De plus, le gain en temps de calcul est très élevé ce qui pourrait être fort utile pour des calculs en temps réel dans la boucle fermée d'un système asservi comme celui d'un système d'optique adaptative ou d'un suiveur de franges.

Les solutions des intégrales généralisées trouvent leur utilité dans une grande variété de problèmes. Dans mon travail, je ne les ai appliquées qu'au cas du modèle de Von Kármán mais en changeant la valeur de quelques paramètres, elles pourraient être utilisées avec d'autres modèles comme par exemple le modèle de Greenwood–Tarazano. Parfois, les solutions des intégrales ne sont valables que lorsque les paramètres vérifient certaines inégalités. Cependant, j'ai montré pour des cas particuliers que cette limitation pouvait être contournée par l'utilisation de la méthode d'intégration de "steepest–descent". Une étude de ces cas spéciaux devrait être menée dans l'avenir afin d'obtenir des solutions applicables à tous les cas. Lorsque le nombre de paramètres des intégrales augmente, l'obtention de la solution est de plus en plus fastidieuse. L'ensemble des règles utilisées par la méthode d'intégration pourrait servir de base à un algorithme informatique d'algèbre mathématique pour le calcul des solutions. De cette façon, il ne serait plus nécessaire d'entrer dans les détails de la méthode pour trouver la solution. Ceci rendrait l'usage de cette technique d'intégration plus abordable.

Avec l'aide des solutions de ces intégrales généralisées, de nouvelles expressions dans la partie consacrée à la modélisation des effets de la turbulence atmosphérique en présence de l'échelle externe de cohérence spatiale ont été établies. J'ai d'abord expliqué la différence entre l'échelle externe de turbulence L_0 qui est un paramètre géophysique et l'échelle externe de cohérence spatiale du front d'onde $\mathcal{L}_0$ qui est un paramètre ad–hoc dépendant d'un modèle. L_0 peut être déduit de mesure in–situ de la pression, de la température et de la constante de structure des fluctuations de température. Tandis que $\mathcal{L}_0$ est déduit de l'ajustement entre des grandeurs théoriques déduites d'un modèle et les même quantités mesurées expérimentalement.

J'ai montré que la qualité d'une image long temps de pose évaluée à travers l'estimation de la largeur à mi–hauteur de la réponse impulsionnelle et du rapport de Strehl s'améliore grandement lorsque $\mathcal{L}_0$ est plus petit que le diamètre D du télescope. De manière générale, pour toutes les grandeurs que j'ai été amené à calculer, il y a toujours deux régimes dans leur variation en fonction de $\mathcal{L}_0$: le cas $D < \mathcal{L}_0$ et le cas $D > \mathcal{L}_0$. Pour $D < \mathcal{L}_0$, l'effet de $\mathcal{L}_0$ est peu significatif alors que pour $D > \mathcal{L}_0$, l'influence de $\mathcal{L}_0$ se traduit par une diminution importante des effets dégradants de la turbulence atmosphérique par rapport au modèle de Kolmogorov. Dans ce dernier cas, l'effet bénéfique de la valeur finie de $\mathcal{L}_0$ se traduit par une amélioration des performances des techniques de la HRA qui se rapprochent de leurs performances théoriques. J'ai étudié l'influence de $\mathcal{L}_0$ sur les valeurs de l'angle d'isoplanétisme et de la scintillation. La valeur finie de $\mathcal{L}_0$ tend à accroître la taille du domaine d'isoplanétisme par contre son influence sur la scintillation est peu significative.

J'ai analysé l'effet de $\mathcal{L}_0$ sur les performances des systèmes d'OA pour lesquels la phase est reconstruite sur la base des polynômes de Zernike. Avec les solutions des intégrales généralisées, j'ai pu retrouver les expressions de la covariance des coefficients de ces polynômes $\langle a_i a_j \rangle$ et de la variance des fluctuations de phase résiduelle Δ_N établies par d'autres auteurs. Ces expressions étant proportionnelles à des fonctions hypergéométriques dont la convergence est lente pour $D > \mathcal{L}_0$, de nouvelles expressions valables uniquement pour $D > \mathcal{L}_0$ et permettant un calcul rapide sont données. Avec ces expressions, les valeurs des variances des coefficients a_i s'égalisent lorsque $D \gg \mathcal{L}_0$. J'ai montré que si on choisit d'avoir comme valeur maximale de Δ_N celle donnée par le modèle de Kolmogorov alors le nombre de modes N à corriger peut être réduit sans que la valeur de Δ_N calculée pour le modèle de Von Kármán ne dépasse la valeur limite. Ceci est possible lorsque la valeur de $\mathcal{L}_0$ est inférieure à une valeur critique qui dépend de D. Le rapport de Strehl après correction a été calculé de façon exacte ce qui a permis la comparaison avec la formule approchée $\exp(-\Delta_N)$ et la confirmation de la validité de cette approximation lorsque la valeur de Δ_N est faible. J'ai évalué la valeur du rapport de Strehl sans correction du tip–tilt. Lorsque $D \gg \mathcal{L}_0$ c'est–à–dire lorsque les modes de Zernike deviennent équivalent en terme d'énergie, la faible dégradation du rapport de Strehl montre que la correction du tip–tilt n'est plus nécessaire comme elle l'était pour le modèle de Kolmogorov. Ce résultat est important pour les étoiles de référence laser monochromatique dont la principale difficulté est qu'elles ne peuvent pas être utilisées pour mesurer le tip–tilt.

L'effet de $\mathcal{L}_0$ sur les performances d'un interféromètre a été analysé. J'ai calculé l'expression de la différence de marche atmosphérique (ddm) en fonction de D, de la base B et de $\mathcal{L}_0$. La ddm décroît lorsque D augmente et elle est quasiment constante lorsque $B \gg \mathcal{L}_\mathbf{0}$. J'ai aussi calculé la ddm résiduelle après correction par un suiveur de franges en tenant compte de deux sources d'erreurs : le temps d'exposition T fini du senseur de franges et le retard τ entre l'instant de la mesure de la ddm et l'instant ou la correction est appliquée. Pour des valeurs fixes de T et τ, la valeur finie de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ entraîne une diminution de la ddm résiduelle par rapport à sa valeur pour une échelle externe infinie. La valeur finie de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ permet aussi d'augmenter les valeurs de T et τ sans que la valeur de la ddm résiduelle soit très affectée.

La dernière partie de la thèse est consacrée à la mesure de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ avec le "Generalized Seeing Monitor" (GSM). Le GSM est un moniteur de r_0, de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$, de θ_0 et de σ_I^2 qui sont déduits de l'analyse statistique des angles d'arrivée (AA) et de la scintillation mesurés en quatre points du front d'onde. J'ai réalisé l'ensemble des programmes de traitement des données du GSM qui ont fourni la quasi-totalité des résultats des articles et rapports présentant les résultats des campagnes de mesures effectuées par le GSM. Six missions, au Chili (Observatoires de La Silla, Cerro Tololo et Paranal), au Maroc (site de l'Oukaimeden), en Ouzbekistan (Observatoire de Maydanak) et en France (Observatoire du Plateau de Calern) ont donné lieu à la constitution d'une base de données unique. Cette base de données se singularise parce qu'elle est la seule à posséder des valeurs de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ en si grand nombre sur autant de sites à travers le monde. Elle est aussi remarquable parce qu'elle donne un aperçu très complet de l'effet de la turbulence atmosphérique sur chaque site grâce à l'analyse croisée de tous les paramètres mesurés. Il a été mis en évidence, pour quelques nuits, un phénomène particulier qui est une brusque augmentation des valeurs de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ sur une échelle de temps de quelques minutes. Une tentative d'explication est qu'il pourrait s'agir de la signature de l'injection d'énergie turbulente dans la cascade d'énergie. Aucune corrélation systématique entre les valeurs de r_0 et $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ n'a pu être établi au cours de ces différentes missions à l'échelle de temps d'une nuit ou de la durée d'une mission.

Je me suis aussi intéressé à l'analyse spatio–temporelle des AA mesurés au moyen du GSM. Dans le cadre de l'hypothèse de Taylor, la corrélation temporelle des AA est donnée par une coupe de la covariance spatiale bi–dimensionnelle des AA. La position de cette coupe est fixée par le vecteur base et la direction du vent dans la couche turbulente prédominante. J'ai calculé l'expression de la covariance spatiale et j'ai donné une interprétation physique simple de son anisotropie. Une expression du temps de décorrélation des AA dans le cadre du modèle de Von Kármán a aussi été obtenue. L'anisotropie de la covariance ne permet pas d'associer systématiquement à chaque maximum de la corrélation temporelle des AA une couche turbulente unique. Elle est la cause de la relation non–linéaire existant entre la position du maximum et le vecteur vent de la couche turbulente associée. J'ai proposé une méthode de détermination de la vitesse et de la direction du vent tenant compte de l'anisotropie. Cette méthode ne peut fonctionner que lorsque les six corrélations ne présentent qu'un seul maximum.

Afin de montrer l'intérêt pratique que présente la connaissance des valeurs de $\mathcal{L}_\mathbf{0}$, j'ai utilisé les valeurs de r_0 et $\mathcal{L}_\mathbf{0}$ mesurées à l'Observatoire du Cerro Paranal au moyen du GSM pour analyser statistiquement pour ce site les performances théoriques d'un système d'optique adaptative et d'un interféromètre dans le cadre du modèle de Von Kármán . Pour ceci, la variance des coefficients des polynômes de Zernike, la variance des fluctuations de phase résiduelle et le rapport de Strehl après correction pour des télescopes de diamètre égal à 8 m, 30 m et 100 m ont été calculés. Les résultats obtenus montrent qu'avec les valeurs de $\mathcal{L}_0$ mesurées l'effet de l'échelle externe est peu significatif pour un système d'OA sur un télescope de 8 m. Par contre pour des télescopes de plus grande taille les performances d'un système d'OA sont améliorées de façon importante et ceci est d'autant plus vrai que le rapport $D/\mathcal{L}_0$ croît. J'ai aussi calculé la ddm atmosphérique entre deux télescopes d'un diamètre de 8 m et pour des bases de 40 m, 100 m et 200 m. Pour l'Observatoire du Paranal et dans le cadre du modèle de Von Kármán , la ddm est dix fois plus faible que celle donnée par le modèle de Kolmogorov et elle est presque la même pour les trois bases.

Tous les résultats que j'ai présentés dépendent du modèle choisi pour représenter les effets optiques de la turbulence atmosphérique. Avec, les formules que j'ai établies pour le modèle de Von Kármán , il est possible désormais de confronter ce modèle aux résultats expérimentaux c'est-à-dire avec les mesures des systèmes d'OA des grands télescopes et de la ddm atmosphérique mesurée par les interféromètres.

Dans un futur proche, il faudra aussi se poser la question du domaine de validité des modèles avec échelle externe. S'ils sont une alternative au modèle de Kolmogorov aux bornes du domaine inertiel, ces modèles ont certainement une distance limite au-delà de laquelle d'autres modèles devront prendre le relais. En effet, ces modèles comme celui de Kolmogorov sont basés sur l'hypothèse d'isotropie de la turbulence. Or, l'on sait que lorsque la distance entre deux points de mesure augmente, les lois de la turbulence sont de plus en plus régies par les variations de température moyenne et non par les fluctuations de température autour de la moyenne. Comme ces variations de température moyenne sont fortement anisotropes, les modèles actuels ne pourront plus s'appliquer.

Pour finir, j'espère que ce travail a montré l'importance des effets de l'échelle externe de cohérence spatiale et ainsi, a prouvé la nécessité de prendre en compte la valeur finie de $\mathcal{L}_0$ pour les futurs développements de la Haute Résolution Angulaire en Astronomie réalisés au moyen d'instruments basés au sol.

Bibliographie

[1] A. Agabi. *GSM : Une expérience dédiée à la mesure des paramètres de cohérence des fronts d'onde en Haute Résolution Angulaire*. PhD thesis, Université de Nice–Sophia Antipolis (Nice, France), 1994.

[2] A. Agabi, J. Borgnino, F. Martin, A. Tokovinin, and A. Ziad. G.S.M. : A Grating Scale Monitor for atmospheric turbulence measurements. II. first measurements of the wavefront outer scale at the O.C.A. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 109 :557–562, 1995.

[3] L.C. Andrews, R.L. Phillips, C.Y. Hopen, and M.A. Al–Habash. Theory of optical scintillation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 16(6) :1417–1429, June 1999.

[4] G. Arfken. *Mathematical Method for Physicists*. Academic Press, New–York, 1970.

[5] J.T. Armstrong, D. Mozurkewich, L.J. Rickard, D.J. Hutter, J.A. Benson, P.F. Bowers, N.M. Elias II, C.A. Hummel, K.J. Johnston, D.F. Buscher, J.H. Clark III, L. Ha, L.-C. Ling, N.M. White, and R.S. Simon. The Navy Prototype Optical Interferometer. *Astrophysical Journal*, 496 :550–571, March 1998.

[6] R. Arsenault, D. Salmon, J. Kerr, F. Rigaut, D. Crampton, and W. Grundman. "PUEO", the Canada–France–Hawaii Telescope adaptive optics bonnette I : System description. In M.A. Ealey and F. Merkle, editors, *Adaptive Optics in Astronomy*, volume 2201, pages 833–842. SPIE, 1994.

[7] R. Avila. *Caractérisation de la Turbulence Atmosphérique Pour la Haute Résolution Angulaire En Astronomie : Mise En Oeuvre et Exploitation Du Scidar Généralisé et Du Grating Scale Monitor*. PhD thesis, Université de Nice – Sophia Antipolis, 1998.

[8] R. Avila, J. Vernin, , and E. Masciadri. Whole atmospheric-turbulence profiling with generalized scidar. *Applied Optics*, 36(30) :7898–7905, October 1997.

[9] R. Avila and J. Vernin. Mechanism of formation of atmospheric turbulence relevant for optical astronomy. In J. Franco and A. Carramiñna, editors, *Interstellar Turbulence*. Cambridge University Press, 1998.

[10] R. Avila, J. Vernin, and S. Cuevas. Turbulence profiles with generalized scidar at San Pedro Màrtir observatory and isoplanatism studies. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 110 :1106–1116, September 1998.

[11] R. Avila, A. Ziad, J. Borgnino, F. Martin, A. Agabi, and A. Tokovinin. Theoretical spatio-temporal analysis of angle of arrival induced by atmospheric turbulence as observed with the Grating Scale Monitor experiment. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(11) :3070–3082, November 1997.

[12] H.W. Babcock. The possibility of compensating astronomical seeing. *Pub. Astron. Soc. Pac.*, 65 :229, 1953.

[13] J.E. Baldwin, R.C. Boysen, G.C. Cox, C.A. Haniff, J. Rogers, P.J. Warner, D.M.A. Wilson, and C.D. Mackay. COAST : Its current status, operation and results. In J.B. Breckenridge, editor, *Amplitude and Intensity Spatial Interferometry II*, volume 2200, pages 112–118, Kona, Hawaii, March 1994. SPIE.

[14] P. Beckman. *Probability in Communication Engineering.* Harcourt ,Brace & World, Inc., New–York, 1967.

[15] J.S. Bendat and A.G. Piersol. *RANDOM DATA : Analysis and Measurement Procedures.* Wiley-Interscience, New–York, 1971.

[16] M.J. Beran and J. Oz-Vogt. Imaging through turbulence in the atmosphere. In *Progress in Optics*, volume XXXIII. E. Wolf, 1994.

[17] P. Berio. *Interférométrie Optique À Haute Résolution Spectrale : Traitement Des Données et Exploitation Astrophysique.* PhD thesis, Université de Nice–Sophia Antipolis, 1999.

[18] Ph. Berio, D. Mourard, F. Vakili, J. Borgnino, and A. Ziad. Effects of atmospheric spectral decorrelation on visibility measurements in michelson interferometry. *J. Opt. Soc. Am.*, 14(1) :114–121, 1997.

[19] M. Bester, W.C. Danchi, C.G. Degiacomi, L.J. Greenhill, and C.H. Townes. Analysis of atmospheric fluctuations and their implications for high resolution astronomy. In J.M. Beckers and F. Merkle, editors, *ESO Conference on High–Resolution Imaging by Interferometry II. Part II Multiple aperture interferometry*, pages 1017–1027, Garching bei München, October 1991. ESO, ESO.

[20] M. Bester, W.C. Danchi, C.G. Degiacomi, L.J. Greenhill, and C.H. Townes. Atmospheric fluctuations : Emprirical structure functions and projected performance of future instruments. *Astrophysical Journal*, 392 :357–374, June 1992.

[21] J.-L. Beuzit, N. Hubin, E. Gendron, L. Demailly, P. Gigan, F. Lacombe, F. Chazallet, D. Rabaud, and G. Rousset. ADONIS : A user–friendly adaptive optics system for the ESO 3.6–m telescope. In M.A. Ealey and F. Merkle, editors, *Adaptive Optics in Astronomy*, volume 2201, pages 955–961. SPIE, 1994.

[22] G.D. Boreman and C. Dainty. Zernike expansions for non–kolmogorov turbulence. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(3) :517–522, March 1996.

[23] J. Borgnino. Estimation of the spatial coherence outer scale relevant to long baseline interferometry and imaging in optical astronomy. *Applied Optics*, 29(13) :1863–1865, 1990.

[24] J. Borgnino, F. Martin, and A. Ziad. Effect of a finite spatial–coherence outer scale on the covariances of angle-of-arrival fluctuations. *Optics Communications*, 91 :267–279, 1992.

[25] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon Press, 1980.

[26] R.N. Bracewell. *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw-Hill Book Company, New–York, 1978.

[27] D.F. Buscher. A thousand and one nights of seeing at Mt Wilson. In *Amplitude and Intensity Spatial Interferometry*, volume 2200, pages 260–271. SPIE, 1994.

[28] D.F. Buscher, J.T. Armstrong, C.A. Hummel, A. Quirrenbach, D. Mozurkewich, K.J. Johnston, C.S. Denison, M.M. Colavita, and M. Shao. Interferometric seeing measurements on Mt. Wilson : Power spectra and outer scales. *Applied Optics*, 34(6) :1081–1096, February 1995.

[29] D.F. Buscher, J.T. Armstrong, D. Mozurkewich, C.S. Denison, M.M. Colavita, and M. Shao. Atmospheric fluctuation measurements with the MKIII interferometer and the power spectra of everything. In J.M. Beckers and F. Merkle, editors, *ESO Conference on High–Resolution Imaging by Interferometry II. Part II Multiple aperture interferometry*, pages 1029–1038, Garching bei München, October 1991. ESO, ESO.

[30] F. Chassat. Calcul du domaine d'isoplanétisme d'un système d'optique adaptative fonctionnant à travers la turbulence atmosphérique. *J. Optics (Paris)*, 20(1) :13–23, 1989.

[31] F. Chassat. *Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique. Etude modale de l'anisoplanétisme et application à l'optique adaptative.* PhD thesis, Université Paris XI Orsay (Paris, France), 1992.

[32] M.M. Colavita, M. Shao, and D.H. Staelin. Atmospheric phase measurements with the Mark III stellar interferometer. *Applied Optics*, 26 :4106–4112, 1987.

[33] M.M. Colavita, J.K. Wallace, B.E. Hines, Y. Gursel, F. Malbet, D.L. Palmer, X.P. Pan, M. Shao, J.W. Yu, A.F. Boden, P.J. Dumont, J. Gubler, C.D. Koresko, S.R. Kulkarni, B.F. Lane, D.W. Mobley, and G.T. Van Belle. The Palomar Testbed Interferometer. *Astrophysical Journal*, 510 :505–521, January 1999.

[34] J.-M. Conan, D. Mouillet, F. Rigaut, E. Gendron, and G. Rousset. NAOS analysis report. Technical Report VLT–TRE-NAO–11650–1–000000–0002, ONERA/ODP/LAOG, 1999.

[35] J.M. Conan, G. Rousset, and P.Y. Madec. Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 12(7) :1559–1570, July 1995.

[36] R. Conan, A. Ziad, R. Avila, A. Tokovinin, F. Martin, and J. Borgnino. Spatio–temporal analysis of the wave front with the GSM. In D. Bonaccini, editor, *Topical Meeting on Astronomy with Adaptive Optics, Present Results and Future Programs*, ESO, pages 133–142, Munich (Germany), September 1998. ESO.

[37] A. Consortini and L. Ronchi. Choice of the model of atmospheric turbulence. *Applied Optics*, 11(5) :1205–1211, May 1972.

[38] A. Consortini, L. Ronchi, and E. Moroder. Role of the outer scale of turbulence in atmospheric degradation of optical images. *J. Opt. Soc. Am.*, 63(10) :1246–1248, October 1973.

[39] A. Consortini, L. Ronchi, and L. Stefanutti. Investigation of atmospheric turbulence by narrow laser beams. *Applied Optics*, 9(11) :2543–2547, November 1970.

[40] C.E. Coulman. Fundamental and applied aspects of astronomical "seeing". In G. Burbidge, editor, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, volume 23, pages 19–57. Annual Reviews Inc., 1985.

[41] C.E. Coulman, J. Vernin, Y. Coqueugniot, and J.L. Caccia. Outer scale of turbulence appropriate to modeling refractive-index structure profiles. *Applied Optics*, 27(1) :155–160, January 1988.

[42] C.E. Coulman, J. Vernin, and A. Fuchs. Optical seeing–mechanism of formation of thin turbulent laminae in the atmosphere. *Applied Optics*, 34(24) :5461–5474, August 1995.

[43] K. Creath. *Phase–Measurement Interferometry Techniques*, pages 351–391. Progress in Optics XXVI. E. Wolf, elseiver science publishers b.v. edition, 1988.

[44] G. Dai. Modal wave–front reconstruction with Zernike polynomials and Karhunen-loève functions. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(6) :1218–1225, June 1996.

[45] Guang-Ming Dai. Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of Zernike polynomials and Karhunen–Loève functions. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(10) :2182–2193, October 1995.

[46] J. Davis, P.R. Lawson, A.J. Booth, W.J. Tango, and E.D. Thorvaldson. Atmospheric path variations for baselines up to 80 m measured with the Sydney University Stellar Interferometer. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, 273 :L53–L58, 1995.

[47] J. Davis and W.J. Tango. A new very high angular resolution stellar interferometer. *Proc. ASA*, 6(1) :38–43, 1985.

[48] D. Dayton, B. Pierson, B. Spielbusch, and J. Gonglewski. Atmospheric structure function measurements with a shack–hartmann wave–front sensor. *Optics Letters*, 17(24) :1737–1739, December 1992.

[49] F. Deckens, D. Kirkman, G. Chanan, T. Mast, J. Nelson, G. Illingworth, and P. Wizinowich. High speed seeing measurements at the keck telescope. In *Adaptive Optics in Astronomy*, volume 2201, pages 310–313. SPIE, March 1994.

[50] F.D. Eaton, W.A. Peterson, J.R. Hines, and G. Fernandez. Isoplanatic angle direct measurements and associated atmospheric conditions. *Applied Optics*, 24(19) :3264–3273, October 1985.

[51] B.L. Ellerbroek. Including outer scale effects in zonal adaptive optics calculations. *Applied Optics*, 36(36) :9456–9467, December 1997.

[52] B.L. Ellerbroek. Power series evaluation of covariances for turbulence–induced phase distortions including outer scale and servo lag effects. *J. Opt. Soc. Am. A*, 16(3) :533–548, March 1999.

[53] S. Esposito, A. Riccardi, and B. Femenía. Differential piston angular anisoplanatism. *Astron. Astrophys.*, 353 :L29–L32, 2000.

[54] R.L. Fante. Mutual coherence function and frequency spectrum of a laser beam propagating through atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 64(5) :592–598, May 1974.

[55] A.J. Favre, J.J. Caviglio, and R. Dumas. Space-time correlations and spectra in a turbulent boundary layer. *Journal of Fluids Mechanics*, 2(4) :313–342, 1957.

[56] A.J. Favre, J.J. Caviglio, and R. Dumas. Further space-time correlations of velocity in a turbulent boundary layer. *Journal of Fluids Mechanics*, 3(4) :344–356, 1958.

[57] D.L. Fried. Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures. *J. Opt. Soc. Am.*, 56(10) :1372–1379, October 1966.

[58] D.L Fried. Varieties of isoplanatism. *Proc. SPIE*, 75 :20–29, 1976.

[59] D.L. Fried. Anisoplanetism in adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am.*, 72(1) :52–61, January 1982.

[60] B. Frieden. *Probability, Statistical Optics and Data Testing.* Springer–Verlag, New–York, 1983.

[61] U. Frish. *Turbulence. The Legacy of Kolmogorov.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[62] C.S. Gardner. Effects of random path fluctuations on the accuracy of laser ranging systems. *Applied Optics*, 15(10) :2539–2545, October 1976.

[63] E .Gendron and P. Lena. Astronomical adaptive optics. I. modal control optimization. *Astron. Astrophys.*, 291 :337–347, 1994.

[64] E. Gendron and P. Lena. Single layer atmospheric turbulence demonstrated by adaptive optics observations. *Astrophysics and Space Science*, 239 :221–228, 1996.

[65] J. Gochermann, W.F. Wargau, C. Tappert, and T. Schmidt-Kaler et al. Seeing conditions at Sutherland. *Experimental Astronomy*, pages 1–15, 1999.

[66] R.E. Good, R.R. Beland, E.A. Murphy, J.H. Brown, , and E.M. Dewan. ‘atmospheric models of optical turbulence. volume 928, pages 165–186. SPIE, 1988.

[67] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products.* Academic Press, Inc., fifth edition, 1994.

[68] J.E. Graves, F. Roddier, M.J. Northcott, and J. Anuskiewicz. Adaptive optics at the University of Hawaii IV : A photon counting curvature wavefront sensor. In *Adaptive Optics in Astronomy*, volume 2201, pages 502–507. SPIE, 1994.

[69] D.P. Greenwood and D.O. Tarazano. A proposed form for the atmospheric micro-temperature spatial spectrum in the input range. Rep. RADC–TR–74–19 ADA 776294/1GI, Rome Air Development Center, Hanscom Air Force Base, Mass., 1974.

[70] S. Harder and A. Chelli. Estimating the point spread function of the adaptive optics system ADONIS using the wavefront sensor measurements. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 142 :119–135, 2000.

[71] G.R. Heidbreder. Image degradation with random wavefront tilt compensation. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, AP–15(1) :90–98, January 1967.

[72] R.E. Hufnagel. *The Infrared Handbook*. 1978.

[73] M.B. Jorgenson and G.J.M. Aitken. Prediction of atmospherically induced wave–front degradations. *Optics Letters*, 17(7) :466–468, April 1992.

[74] E.J. Kibblewhite and M.R. Chun. Design of tip–tilt and adaptive optics servos using measured angle–of–arrival and phase power spectra. In *Adaptive Optical System Technologies*, pages 522–530, Kona, Hawaii, March 1998. SPIE.

[75] V.A. Klückers, N.J. Wooder, T.W. Nicholls, M.J. Adcock, I. Munro, and J.C. Dainty. Profiling of atmospheric turbulence strength and velocity using a generalised SCIDAR technique. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 130 :141–155, May 1998.

[76] A.N. Kolmogorov. Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. In *Proceedings of the Royal Society of London A*, volume 434, pages 15–17, 1991.

[77] A.N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. In *Proceedings of the Royal Society of London A*, volume 434, pages 9–13, 1991.

[78] V. Kornilov. The four–channel stellar photometer with dichroic beam–splitter. *Baltic Astronomy*, 7 :513–524, 1998.

[79] J. Krause-Polstorff, A.M. Edmund, and L.W.Donald. Instrument comparison : corrected stellar scintillometer versus isoplanometer. *Applied Optics*, 32(21) :4051–4057, July 1993.

[80] A. Labeyrie. Interference fringes obtained on Vega with two optical telescopes. *Astrophys. J.*, 196 :L71–L75, March 1975.

[81] L. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique Des Fluides*. Editions MIR, Moscou, 1971.

[82] P. Lena. *Astrophysique – Méthodes Physique de L'observation*. InterEditions / CNRS Editions, Paris, 1996.

[83] M. Lesieur. *La Turbulence*. Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, 1994.

[84] M. Lloyd-Hart, J.R.P. Angel, B. Jacobsen, D. Wittman, R. Dekany, D. McCarthy, E. Kibblewhite, W. Wild, B. Carter, and J. Beletic. Adaptive optics experiments using sodium laser guide stars. *ApJ*, 439 :455–473, January 1995.

[85] G.C. Loos and C.B. Hogge. Turbulence of the upper atmosphere and isoplanetism. *Applied Optics*, 18(15) :2654–2661, August 1979.

[86] B. Lopez and M. Sarazin. The ESO atmospheric temporal coherence monitor dedicated to high angular resolution imaging. *Astron. Astrophys.*, 276 :320–326, 1993.

[87] V.P. Lukin. Optical measurements of the outer scale of the atmospheric turbulence. *Atmos. Oceanic Opt.*, 4 :229–242, 1992.

[88] V.P. Lukin. Intercomparison of models of the atmospheric turbulence spectrum. *Atmos. Oceanic Opt.*, 6 :628–631, 1993.

[89] V.P Lukin, E.V. Nosov, and B.V. Fortes. Effective outer scale of atmospheric turbulence. *Optika atmosphery y okeana (in russian)*, 10(2) :162–171, 1958.

[90] V.P Lukin, E.V. Nosov, and B.V. Fortes. The efficient outer scale of atmospheric turbulence. *Atmos. Oceanic Opt.*, 10(2) :100–105, February 1997.

[91] R.F. Lutomirski and R.G. Buser. Mutual coherence function of a finite optical beam and application to coherent detection. *Applied Optics*, 12(9) :2153–2160, September 1973.

[92] R.F. Lutomirski, W.L. Woodie, and R.G. Buser. Turbulence–degraded beam quality : Improvement obtained with a tilt–correcting aperture. *Applied Optics*, 16(3) :665–673, March 1977.

[93] R.F. Lutomirski and H.T. Yura. Wave structure function and mutual coherence function of an optical wave in a turbulent atmosphere. *J. Opt. Soc. Am.*, 61(4) :482–486, 1971.

[94] V. N. Mahajan. Strehl ratio for primary aberrations in terms of their aberration variance. *J. Opt. Soc. Am.*, 73(6) :860–861, June 1983.

[95] E. Marchetti and D. Bonaccini. Does the outer scale help adaptive optics or is Kolmogorov gentler ? In *Adaptive Optical System Technologies*, volume 3353, pages 1100–1108. SPIE, 1998.

[96] A. Maréchal. Etude des effets combinés de la diffraction et des aberrations géométriques sur l'image d'un point lumineux. *Rev. d'Opt.*, 26 :257–277, 1947.

[97] O.I. Marichev. *Integral Transform of Higher Transcendental Functions*. Ellis Horwood Limited, Chichester, England, 1983.

[98] J.M. Mariotti. Adaptive optics for long baseline optical interferometry. In D.M. Alloin and J.-M. Mariotti, editors, *Adaptive Optics for Astronomy*, pages 309–320. Kluwer Academic Publisher, 1994.

[99] J.M. Mariotti and G.P. Di Benedetto. Pathlength stability of synthetic aperture telescopes : The case of the 25 cm CERGA interferometer. In M.H. Ulrich and K. Jear, editors, *Very Large Telescopes, their Instrumentation and Programs*, volume 79, pages 257–265. Proc. IAU colloq., 1984.

[100] R.D. Marks, J. Vernin, M. Azouit, J.F. Manigault, and C. Clevelin. Measurement of optical seeing on the high antartic plateau. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 134 :161–172, January 1999.

[101] F. Martin, J. Borgnino, A. Ziad, A. Agabi, R. Avila, and A. Tokovinin. G.S.M. : Un moniteur de l'échelle externe de cohérence spatiale des fronts d'onde. Technical Report ESO 44030/VLT/95/6200/G.W.I., UMR 6525, 1996.

[102] F. Martin, R. Conan, A. Tokovinin, A. Agabi, J. Borgnino, A. Ziad, and M. Sarazin. Report on the GSM measurement campaign at the Paranal observatory. ESO report VLT-TRE-UNI-17440-0006, ESO, 1998.

[103] F. Martin, A. Tokovinin, A. Agabi, J. Borgnino, and A. Ziad. G.S.M. : A Grating Scale Monitor for atmospheric turbulence measurements. I. the instrument and first results of angle of arrival measurements. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 108 :173–180, 1994.

[104] F. Martin, A. Tokovinin, A. Ziad, R. Conan, J. Borgnino, and R. Avila. Report on G.S.M. measurement campaign at La Silla. ESO report VLT–TRE–UNI–17440–0005, ESO, 1998.

[105] F. Martin, A. Tokovinin, A. Ziad, R. Conan, J. Borgnino, R. Avila, A. Agabi, and M. Sarazin. First statistical data on wave front outer scale at La Silla observatory from the G.S.M. instrument. *Astron. Astrophys.*, 336 :L49–L52, 1998.

[106] H.M. Martin. Image motion as a measure of seeing quality. *JASP*, 99 :1360–1370, December 1987.

[107] L. Meynadier, V. Michau, M.T. Velluet, J.M. Conan, L.M. Mugnier, and G. Rousset. Noise propagation in wave–front sensing with phase diversity. *Applied Optics*, 38(23) :4697–4979, August 1999.

[108] A.A. Michelson and F.G. Pease. Measurement of the diameter of α Orionis with the interferometer. *Astrophysical Journal*, 53 :249–259, 1921.

[109] D. Mourard, I. Tallon-Bosc, A. Blazit, D. Bonneau, G. Merlin, F. Morand, F. Vakili, and A. Labeyrie. The GI2T interferometer on Plateau de Calern. *Astron. Astrophys.*, 283 :705–713, 1994.

[110] T.W. Nicholls, G.D. Boreman, and J.C. Dainty. Use of a Shack–Hartmann wave–front sensor to measure deviations from a Kolmogorov phase spectrum. *Opics Letters*, 20(24) :2460–2462, December 1995.

[111] N.S. Nightingale and D.F. Buscher. Interferometric seeing measurements at the la palma observatory. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, 251 :155–166, 1991.

[112] T. Noel. *Caractérisation Spatiale et Temporelle de la Turbulence Atmosphérique.* Thèse, Université Paris VI, 1997.

[113] R.J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 66(3) :207–211, March 1976.

[114] G.R. Ochs, Ting i Wang, R.S. Lawrence, and S.F. Clifford. Refractive-turbulence profiles measured by one-dimensional spatial filtering of scintillations. *Applied Optics*, 15(10) :2504–2510, October 1976.

[115] V.G. Orlov, V. Voitsekhovich, and S. Cuevas. Speckle interferometry, partial adaptive correction for big telescopes and the outer scale of turbulence. In *Adaptive Optical System Technologies*, volume 3353, pages 668–676, Kona, Hawaii, 1998. SPIE.

[116] R. Racine and B.L. Ellerbroek. Profiles of night–time turbulence above Mauna Kea and isoplanatism extension in adaptive optics. In R.K Tyson and R.Q Fugate, editors, *Adaptive Optical Systems and Applications*, volume 2534, pages 248–257. SPIE, 1995.

[117] C. Rao, W. Jiang, and N. Ling. Measuring the power-law exponent of an atmospheric turbulence phase power spectrum with a Shack–Hartmann wave–front sensor. *Optics Letters*, 24(15) :1008–1010, August 1999.

[118] G.W. Reinhardt and S.A. Collins. Outer-scale effects in turbulence-degraded light-beam spectra. *J. Opt. Soc. Am.*, 62 :1526–1528, December 1972.

[119] F. Rigaud and E. Gendron. Laser guide star in adaptive optics : The tilt determination problem. *Astron. Astrophys.*, 261 :677–684, 1992.

[120] F. Rigaut, G. Rousset, P. Kern, J.C. Fontanella, J.P. Gaffard, F. Merkle, and P. Lena. Adaptive optics on a 3.6–m telescope : Results and performance. *Astron. Astrophys.*, 250 :280–290, 1991.

[121] S. Robbe. *Mise En Opération de L'interféromètre Stellaire Asservie I2T+ASSI.* PhD thesis, Université de Nice–Sophia Antipolis, 1996.

[122] F. Roddier. The effect of atmospheric turbulence in optical astronomy. In *Progress in Optics*, volume XIX. E. Wolf, 1981.

[123] F. Roddier. Curvature sensing and compensation : A new concept in adaptive optics. *Applied Optics*, 27(7) :1223–1225, April 1988.

[124] F. Roddier, J.M. Gilli, and G. Lund. On the origin of speckle boiling and its effects in stellar speckle interferometry. *J. Optics (Paris)*, 13(5) :263–271, 1982.

[125] F. Roddier, J.M. Gilli, and J. Vernin. On the isoplanatic patch size in stellar speckle interferometry. *J. Optics (Paris)*, 13(2) :63–70, 1982.

[126] F. Roddier and F. Rigaut. The UH–CFHT systems. In F. Roddier, editor, *Adaptive Optics in Astronomy*, chapter 9, pages 205–234. Cambridge University Press, 1999.

[127] M.C. Roggemann and B. Welsh. *Imaging Through Turbulence.* CRC Press, 1996.

[128] M.C. Roggemann, B.M. Welsh, D. Montera, and T.R. Rhoadarmer. Method for simulating atmospheric turbulence phase effects for multiple time slices and anisoplanatic conditions. *Applied Optics*, 34(20) :4037–4051, July 1995.

[129] G. Rousset. Wave–front sensors. In F. Roddier, editor, *Adaptive Optics in Astronomy*, chapter 5, pages 91–130. Cambridge Press University, 1999.

[130] G. Rousset and J.-L. Beuzit. The COME–ON/ADONIS systems. In F. Roddier, editor, *Adaptive Optics in Astronomy*, chapter 8, pages 171–203. Cambridge University Press, 1999.

[131] G. Rousset, J.-L. Beuzit, N. Hubin, E. Gendron, P.-Y. Madec, C. Boyer, J.-P. Gaffard, J.-C. Richard, M. Vittot, P. Gigan, and P. Léna. Performance and results of the Come–ON+ adaptive optics system at the ESO 3.6–meter telescope. In M.A. Ealey and F. Merkle, editors, *Adaptive Optics in Astronomy*, volume 2201, pages 1088–1098. SPIE, 1994.

[132] G. Rousset, J.C. Fontanella, P. Kern, P. Gigan, F. Rigaut, P. Léna, C. Boyer, P. Jagourel, J.P. Gaffard, and F. Merkle. First diffraction–limited astronomical images with adaptive optics. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 230 :L29–L32, 1990.

[133] D. Saint-Jacques. *Astronomical Seeing in Space and Time. A Study of Atmospheric Turbulence in Spain and England, 1994–98.* PhD thesis, University of Cambridge, 1998.

[134] D.G. Sandler, S. Stahl, J.R.P. Angel, M. Lloyd-Hart, and D. McCarthy. Adaptive optics for diffraction–limited infrared imaging with 8–m telescopes. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(2) :925–945, February 1994.

[135] M. Sarazin and F. Roddier. The ESO differential image motion monitor. *Astron. Astrophys.*, 227 :294–300, 1990.

[136] R.J. Sasiela. Strehl ratios with various types of anisoplanatism. *J. Opt. Soc. Am. A*, 9(8) :1398–1405, August 1992.

[137] R.J. Sasiela. *Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence. Evaluation and Application of Mellin Transforms.* Springer–Verlag, New–York, 1994.

[138] R.J. Sasiela and J.D. Shelton. Mellin transform methods applied to integral evaluation : Taylor series and asymptotic approximations. *J. Math. Phys*, 34(6) :2572–2617, June 1993.

[139] R.J. Sasiela and J.D. Shelton. Transverse spectral filtering and Mellin transform techniques applied to the effect of outer scale on tilt and tilt anisoplanatism. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(4) :646–660, April 1993.

[140] M. Schöck. *An Analysis of Turbulent Layers with a Wave Front Sensor.* PhD thesis, University of Wyoming, 1998.

[141] M. Schöck and E.J. Spillar. Measuring wind speeds and turbulence with a wavefront sensor. *Optics letters*, 23(3) :150–152, February 1998.

[142] M. Shao, M.M. Colavita, B.E. Hines, D.H. Staelin, D.J. Hutter, K.J. Johnston, D. Mozurkewich, R.S. Simon, J.L. Hershey, J.A. Hughes, and G.H. Kaplan. The mark III stellar interferometer. *Astron. Astrophys.*, 193 :357–371, 1988.

[143] E.E. Silbaugh, B.M. Welsh, and M.C. Roggemann. Characterization of atmospheric turbulence phase statistics using wave–front slope measurements. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(12) :2453–2460, December 1996.

[144] S.M. Stahl. Zernike decomposition of anisoplanatism for laser beacons and natural guide stars. In *Adaptive Optics in Astronomy*, pages 636–642. SPIE, March 1994.

[145] J.W. Strohbehn and S.V. Clifford. Polarization and angle-of-arrival fluctuations for a plane wave propagated through a turbulent medium. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-15(3) :416–422, May 1967.

[146] N. Takato and I. Yamaguchi. Spatial correlation of Zernike phase–expansion coefficients for atmospheric turbulence with finite outer scale. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(5) :958–963, May 1995.

[147] M. Talon and R. Foy. Adaptive telescope with laser probe : Isoplanatism and cone effect. *Astron. Astrophys.*, 235 :549–557, 1990.

[148] W.J. Tango and R.Q. Twiss. Michelson stellar interferometry. In E. Wolf, editor, *Progress in Optics*, volume XVII, pages 241–276. North–Holland Publishing Company, 1980.

[149] V.I. Tatarski. *Wave Propagation in a Turbulent Medium.* Dover Publications, Inc., New York, 1961.

[150] V.I. Tatarskii. *The effects of the turbulent atmosphere on wave propagation.* Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971.

[151] A. Tokovinin. A new method to measure the atmospheric image quality. *Astron. Letters*, 24 :768–771, 1998.

[152] A. Tokovinin, V. Kornilov, R. Conan, A. Ziad, F. Martin, S. Ilyasov, S. Ehgamberdiev, Y. Tillaev, K. Sultanov, and M. Sarazin. Report on the Maydanak site testing campaign in July 1998. Progress report N1, INTAS–96-0367, 1998.

[153] A.A. Tokovinin, A. Ziad, F. Martin, R. Avila, J. Borgnino, R. Conan, and M. Sarazin. Wavefront outer scale monitoring at La Silla. In D. Bonaccini and R.K. Tyson, editors, *Adaptive Optical System Technologies*, volume 3353 of *SPIE*, pages 1155–1162, March 1998.

[154] H. Trinquet. Influence de la couche limite surperficielle sur la dégradation des images astronomiques. Technical report, UMR 6525 – Université de Nice – Sophia Antipolis, 1999.

[155] G.A. Tyler. Analysis of propagation through turbulence : Evaluation of an integral involving the product of three bessel functions. *J. Opt. Soc. Am. A*, 7(7) :1218–1223, July 1990.

[156] B.J. Uscinski. *The Element of Wave Propagation in Turbulent Media.* McGraw-Hill International Book Company, New York, 1977.

[157] G.C Valley. Long– and short–term Strehl ratios for turbulence with finite inner and outer scales. *Applied Optics*, 18(7) :984–987, April 1979.

[158] G.C. Valley. Isoplanatic degradation of tilt correction and short–term imaging systems. *Applied Optics*, 19(4) :574–577, February 1980.

[159] J.P. Véran, F. Rigaut, H. Maître, and D. Rouan. Estimation of the adaptive optics long–exposure point–spread function using control loop data. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(11) :3057–3069, November 1997.

[160] J. Vernin, A. Agabi, R. Avila, M. Azouit, R. Conan, F. Martin, E. Masciadri, L. Sanchez, and A. Ziad. 1998 gemini site testing campaign Cerro Pachón and Cerro Tololo. Technical report, UMR 6525 – Université de Nice–Sophia Antipolis, 1999.

[161] J. Vernin and C. Muñoz-Tuñón. Optical seeing at La Palma observatory. I. general guidelines and preliminary results at the Nordic Optical Telescope. *Astron. Astrophys.*, 257 :811–816, 1992.

[162] V.V. Voitsekhovich. Outer scale of turbulence : Comparison of different models. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(6) :1346–1353, June 1995.

[163] V.V. Voitsekhovich and S. Cuevas. Adaptive optics and the outer scale of turbulence. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(11) :2523–2531, 1995.

[164] J.Y. Wang. Optical resolution through a turbulent medium with adaptive phase compensations. *J. Opt. Soc. Am.*, 67(3) :383–390, March 1977.

[165] J.Y. Wang and J.K. Markey. Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion. *J. Opt. Soc. Am.*, 68(1) :78–87, January 1978.

[166] D.M. Winker. Effect of a finite outer scale on the Zernike decomposition of atmospheric optical turbulence. *J. Opt. Soc. Am. A*, 8(10) :1568–1573, October 1991.

[167] H.T. Yura and D.L. Fried. Variance of the Strehl ratio of an adaptive optics system. *J. Opt. Soc. Am. A*, 15(8) :2107–2110, August 1998.

[168] H.T. Yura and M.T. Tavis. Centroid anisoplanatism. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2(5) :765–773, May 1985.

[169] A. Ziad. *Estimation des échelles limites de cohérence spatiale des fronts d'onde et optimisation des observations à Haute Résolution Angulaire en Astronomie.* PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis (Nice, France), 1993.

[170] A. Ziad, J. Borgnino, A. Agabi, and F. Martin. Optimized spectral bandwidth in high angular resolution imaging. effect of a finite spatial-coherence outer scale. *Exp. Astron.*, 5 :247–268, 1994.

[171] A. Ziad, J. Borgnino, F. Martin, and A. Agabi. Experimental estimation of the spatial–coherence outer scale from a wavefront statistical analysis. *Astron. Astrophys.*, 282 :1021–1023, 1994.

[172] A. Ziad, R. Conan, A. Tokovinin, F. Martin, and J. Borgnino. From the Grating Scale Monitor (GSM) to the Generalized Seeing Monitor (GSM). *Applied Optics*, 2000. to be published.