La loi de Newton contestée

XVIII et XIXe siècles

F. Mignard

OCA/ Cassiopée

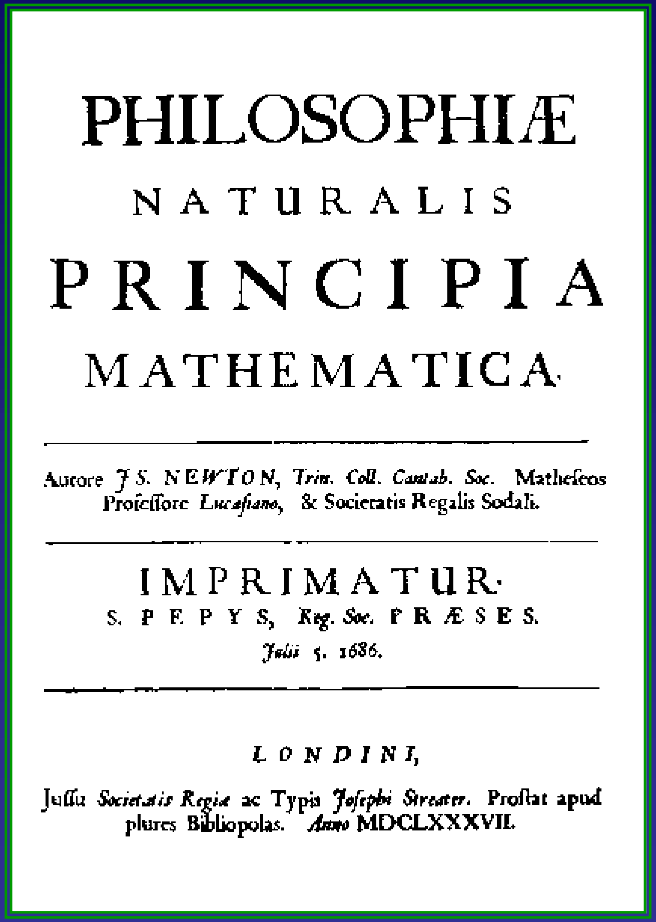
Sommaire

- Publication et réception des Principia
- Confrontations aux observations dans le système solaire
- Comment vérifier la loi en $1/r^2$
- Les remises en cause de 1700 à 1900
- Conclusions

L’analogie féconde…

et quelques années plus tard …

Let Newton be …(*)


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S.* NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Publication 1687, 1717, 1726

- Livre I
  - Etude mathématique des mouvements en $1/r^2$
- Livre II
  - Etude des mouvements avec milieu résistant
- Livre III
  - Attraction et applications au système du monde

(*) "Nature and Nature's laws lay hid in night; God said, **Let Newton be**"! (*Alexander Pope*)

Vérification de la loi en $1/r^2$

- $r < 10$ m : expériences de laboratoire
- $r \sim 1000$ km : mouvement des satellites
- <u>$r \sim 1$ ua - 100 ua : dynamique du système solaire</u>
- $r \sim 10$ kpc : existence de la galaxie

- Points durs < 1900
  - Mouvement du périgée lunaire
  - Accélération du moyen mouvement lunaire
  - Précession du périhélie de Mercure
  - Accélération de Jupiter et Saturne
  - Perturbation d'Uranus
  - Accélération de la comète de Encke

Problème du périgée lunaire

Théorie de la Lune jusqu'à Newton

- Astronomie grecque
  - Mouvement géocentrique
  - Plan orbital différent de l' écliptique
  - Compréhension du mécanismes des éclipses
  - Connaissance de la distance Terre-Lune (~ 10%)
  - Découverte de la rotation de la ligne des apsides
  - Découverte de l' équation du centre et de l' évection

- Renaissance
  - Découverte de la variation (amplitude = 39') par Tycho Brahé
  - Application des lois de Kepler du mouvement elliptique
  - Introduction du mouvement elliptique perturbé par J. Horrocks

Théorie de la Lune de Newton

- Livre III, Props. 22, 25-35
- Construite à partir de la décomposition des forces agissantes
- Il la considérait comme le test idéal des lois de la gravitation
- Importance pratique du problème pour la détermination des longitudes
  - Mais 10′ sur Terre = 18 km → 40 s de temps → 20″ sur la position de la Lune
- Newton a été peu satisfait du résultat
  - Évolution entre les trois éditions des Principia
- Il retrouve par la théorie les plus grosses inégalités du mouvement
  - En particulier la Variation découverte par Tycho Brahé
    - $d\lambda = 0.^\circ 603 \sin(2\lambda - 2\lambda')$ (valeur moderne : 0.660 deg)
    - Laplace considérait que la méthode était un chef d'oeuvre des Principia
  - Inégalités périodiques du périgée et du noeud jamais observées à l'époque
- Problème majeur avec le mouvement séculaire du périgée

Solution de Newton

- Introduction des perturbations solaires
  - Mouvement séculaire du plan de l'orbite : précession du noeud
  - Mouvement séculaire de l'orbite dans son plan : précession du périgée

$$\frac{d\Omega}{dt} = 19°18'1''/\mathrm{yr}$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = 20°17'55''/\mathrm{yr}$$

P = 18.65 ans

P = 17.73 ans

Observation : 18.6 ans 8.8 ans *Le terrible facteur2 !*

- Désaccord très important pour le périgée
  - Newton ne put résoudre le problème
  - Echec très sérieux de la théorie de la gravitation

Vers une solution I.

- Théories analytiques de Clairaut et D'Alembert (1748)
  - Apparition des méthodes 'modernes '

$$\frac{d\Omega}{dt} = -n\left[\frac{3}{4}m^2\right] \qquad \frac{d\varpi}{dt} = n\left[\frac{3}{4}m^2\right] \qquad m = \frac{n'}{n} = \frac{27.35}{365.56} = 0.0748$$

P = 17.8 ans   P = 17.8 ans

Observation : 18.6 ans   8.8 ans

- Clairaut propose à l'Académie de corriger la loi (15/11/1747):

$$F = \frac{1}{r^2} + \frac{\varepsilon}{r^3}$$

Vers une solution II.

- Cette modification de la force centrale aura pour effet :
  - ➢ aucune action sur le mouvement du noeud
    - conservation du moment angulaire
  - ➢ déplacement du périgée
  - ➢ avec $$F = \frac{1}{r^2} + \frac{\varepsilon}{r^3}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0 \qquad \frac{d\varpi}{dt} = n\left[\frac{\varepsilon}{2a}\right]$$

- On peut adopter une modification ad-hoc de la loi qui s'accorde avec l'observation

- Pour la Lune il faut ε/a ~ 0.004

- Cela impose une nouvelle constante fondamentale, homogène à une longueur

- A ce stade pas de problème majeur avec les planètes

Vers une solution III.

- Clairaut se rétracte le 17/04/1749 ayant trouvé par un calcul plus poussé :

$$\frac{d\varpi}{dt} = n\left[\frac{3}{4}m^2 - \frac{225}{32}m^3\right]$$

P = 10.48 ans (Observation : 8.8 ans)

- d'Alembert annonce un résultat similaire le lendemain
  - Il semble que celui-ci ait été déposé sous pli cacheté fin 1747
- Euler arrive indépendamment au même résultat
- La difficulté de la théorie de la Lune apparaît clairement
  - Pas de solution évidente pour les longitudes

Référence : introduction au 1er volume des oeuvres complètes de d'Alembert, M. Chapront-Touzé

Solution complète (Delaunay, Adams, Hill)

$$\frac{d\Omega}{dt} = n\left[-\frac{3}{4}m^2 + 0.28m^3 + 2.13m^4 + 4.78m^5 + 8.10m^6 + \cdots\right]$$

$$\frac{\dot{\Omega}}{n} = 0.00419[-1 + 0.027 + 0.015 + 0.0026 + \cdots] = -0.00399$$

Période du noeud : 18.6 ans

$$\frac{d\varpi}{dt} = n\left[\quad \frac{3}{4}m^2 + 7.03m^3 + 31.80m^4 + 129.6m^5 + 521.7m^6 + \cdots\right]$$

$$\frac{\dot{\varpi}}{n} = 0.00419[1 + 0.702 + 0.237 + 0.072 + 0.021 + \cdots] = 0.00857$$

Période du périgée : 8.8 ans

Au final : solution pûrement gravitationnelle avec la loi en $1/r^2$

Accélération séculaire de la Lune

Accélération séculaire de la Lune

- Observation initiale de Halley en 1693
  - Difficulté de concilier les observations arabes, de la Renaissance et modernes
  - Il suggère une accélération en longitude :

$$\lambda = \lambda_0 + nt + \dot{n}\frac{t^2}{2}$$

  - Confirmée par Dunthorne en 1749 dn/dt ~ 20"/cy^2 et Lalande 1757
  - Conséquence : accélération du mouvement ➔ rapprochement de la Lune
    - fin du monde … ?
  - Phénomène non prévu par la théorie de la gravitation

Accélération séculaire de la Lune

- Cause : milieu résistant, vitesse finie de la propagation de la gravité ?
- Prix de l'Académie en 1770 pour déterminer si ce phénomène relevait de la théorie de la gravitation
  - Euler remporte le prix avec la conclusion :

    " *il est maintenant sûr que cet effet ne peut être produit par les forces de gravitation* "
- Nouveau Prix en 1774 sur l'effet de figure de la Terre et de la Lune
  - Prix remporté par Lagrange, sans avoir trouvé l'origine
  - Après discussion des observations, il conteste son existence

Accélération séculaire de la Lune

- Explication de Laplace en 1787 (Principia + 1 siècle !)
  - Suspicion rejetée d'un ralentissement de la rotation de la Terre
  - Il étudie la propagation à vitesse finie : 8×10^6 c !
  - Solution gravitationnelle de Laplace :

$$\frac{d\lambda}{dt} = n\left[1 - m^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{3}{2}\gamma^2\right)\right]$$

- e' : excentricité de l'orbite terrestre
  - $e' = e'_0 + at$
  - $a = -4.2\times10^{-5}$ /cy (en fait terme périodique de ~ 10^5 ans)

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \dot{n} = -3n\,m^2 e' \frac{de'}{dt} = +20.7''/\,cy^2$$

(en fait il donne $10.''1816213t^2$ pour le terme quadratique !)

Accélération séculaire de la Lune

- Mais au milieu du XIXe siècle la théorie se développe :

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \dot{n} = -n\left[3m^2 - \frac{3771}{32}m^4 - \frac{34047}{32}m^5 + \cdots\right]e'\frac{de'}{dt} = +13.2''/cy^2$$

- Il reste donc ~ 7"/cy² inexpliquées.
  - confirmation des calculs théoriques
  - discussions autour de la valeur observée
  - introduction des phénomènes dissipatifs➔ dn/dt < 0 !
  - introduction d'un terme empirique à longue période dans la théorie
  - solution début du XXe siècle

La Solution

- Effets combinés :
  - de la dissipation des marées
    - dn/dt = - a
  - du ralentissement séculaire de la rotation de la Terre
  - échelle de temps terrestre ≠ temps uniforme de Newton

$$\alpha = \omega t - \dot{\omega}\frac{t^2}{2} \quad (\dot{\omega} > 0) \quad \Rightarrow \quad \tau = t - \frac{\dot{\omega}}{\omega}\frac{t^2}{2}$$

En TD : $$\lambda = \lambda_0 + nt + (\dot{n} - a)\frac{t^2}{2} \quad (\dot{n},\ a > 0)$$

En TU : $$\lambda = \lambda_0 + n\tau + \left(n\frac{\dot{\omega}}{\omega} + \dot{n} - a\right)\frac{\tau^2}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 25.2''/\mathrm{cy}^2 \quad \text{(Laser Lune)} \\ \dot{\omega}/\omega = 1.85 \times 10^{-8}/\mathrm{cy} \ \text{(Rotation de la Terre)} \\ \dot{n} = 13''/\mathrm{cy}^2 \quad \text{(Laplace)} \end{array}\right\} \Rightarrow + 20''\tau^2$$

Au final : solution complexe, gravitationnelle avec la loi en $1/r^2$

Anomalie du périhélie de Mercure

Avance du périhélie de Mercure

- Théorie planétaire générale ~ 1850 : Le Verrier
- Calcul des tables et réduction complète des observations
- Mouvement du périhélie de Mercure
  - Précession ~ 5000"/cy
  - perturbations planétaires ~ 500 "/cy
  - résidu inexpliqué ~ 38"/cy (puis 43 "/cy) → $e\delta\varpi$ = 8.5 "/cy

- Nombreuses hypothèses étudiées
  - non-sphéricité du Soleil (α > 1/2000 ! + mvt noeud)
  - anneau intérieur orbite de Mercure
  - anneau entre Mercure et Vénus
  - planète intramecurielle
  - modification de la loi de Newton

Périhélie de Mercure : autres lois

- Loi en $1/r^{2+\varepsilon}$

$$F = -\frac{GM}{r^{\alpha}} \rightarrow \frac{d\varpi}{dt} = n(1 - \sqrt{(3-\alpha)}) \sim n\varepsilon/2$$

$d\varpi/dt = 43''/cy \rightarrow \alpha = 2.000\,000\,16\ldots$

Pour la Lune : $\frac{\delta\dot{\varpi}}{\dot{\varpi}} \approx 10^{-4}$ Totalement irréaliste

- Loi en $1/r^2 + \varepsilon/r^3$

$$F = -\frac{1}{r^2} + \frac{\varepsilon}{r^3} \rightarrow \frac{d\varpi}{dt} = n\frac{\varepsilon}{2a}$$

$d\varpi/dt = 43''/cy \rightarrow \varepsilon/a = 1.6\times10^{-7} \rightarrow \varepsilon = 6\times10^{-8}$ au

Pour Vénus : $\dot{\varpi} \approx 8''/cy$ $e\dot{\varpi} \approx 0.06''/cy$

Pour la Terre : $\dot{\varpi} \approx 4''/cy$ $e\dot{\varpi} \approx 0.07''/cy$

- Einstein : $\varepsilon = 6GM/c^2$

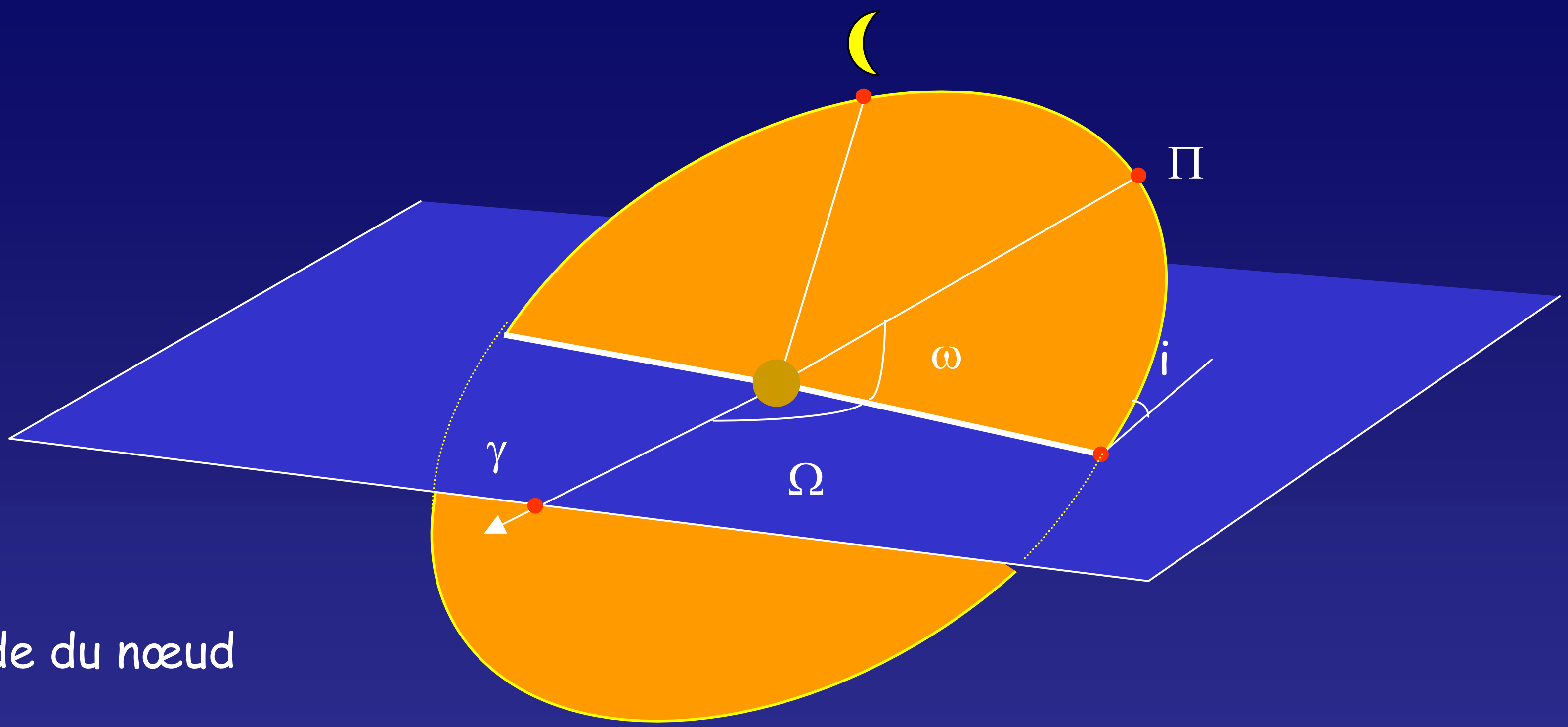
Au final : solution gravitationnelle, modification de la loi en $1/r^2$

Conclusions

- Bilan remarquable pour la loi de Newton
- Importance de l'observation astronomique de haute précision
- Phénomènes complexes et multiformes en jeu
- Nécessité d'une modélisation mathématique très élaborée
- Accomplissement du programme de Poincaré :
  - " Le but utlime de la mécanique céleste est de tester la loi de Newton"

- Ce qu'il reste aujourd'hui :
  - anomalie Pioneer
  - rotation des galaxies, mouvement des amas
  - mouvement des comètes
  - forces de radiation sur les astéroïdes
  - forces non gravitationnelles sur les satellites artificiels

Géométrie des orbites planétaires



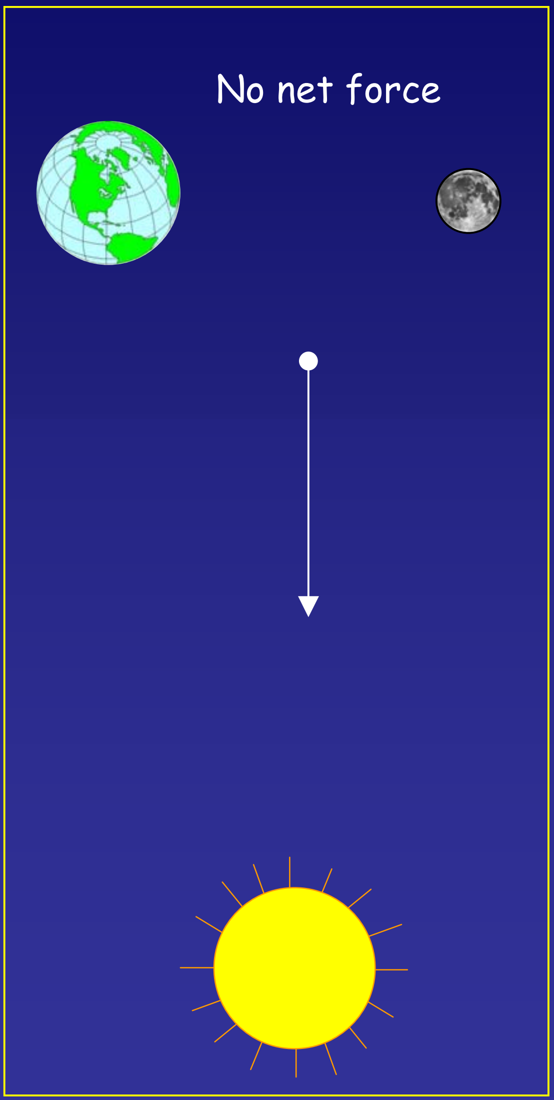
Ω = longitude du nœud

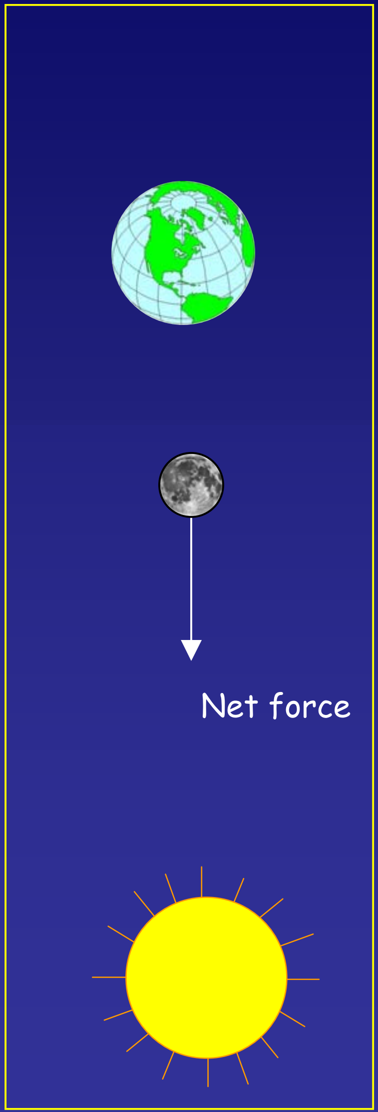
ω = argument du périgée

Solution Képlerienne : $d\Omega/dt = 0$, $d\omega/dt = 0$

Action du Soleil

- Approche Newtonienne de la décomposition des forces





$F = a[1+\cos(2\lambda-2\lambda')]$

$\langle F \rangle > 0 \rightarrow n^2a^3 < GM_t$

$\omega^2 r \sim F_t + F_s$

$\rightarrow$

$d\lambda/dt \sim \cos(2\lambda-2\lambda')$

$\rightarrow$

$\lambda \sim \sin(2\lambda-2\lambda')$

= Variation