De l'astrométrie relativiste à la phase quantique, un même outil : la fonction d'univers de Synge

P. Teyssandier
SYRTE/UMR-CNRS 8630, Obs. Paris

Ch. Le Poncin-Lafitte
SYRTE/UMR-CNRS 8630, Obs. Paris

B. Linet
Lab. de Mathématiques et Physique Théorique, Univ. François Rabelais, Tours

Introduction

Modélisation relativiste de la propagation de la lumière :

- Comparaison d'horloges sol/satellite : ACES $\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim 10^{-16}$
- Missions astrométriques GAIA ou SIM : $\Delta\alpha \sim$ qques μas
- Tests de la RG dans le système solaire (GAIA, LATOR, ...)

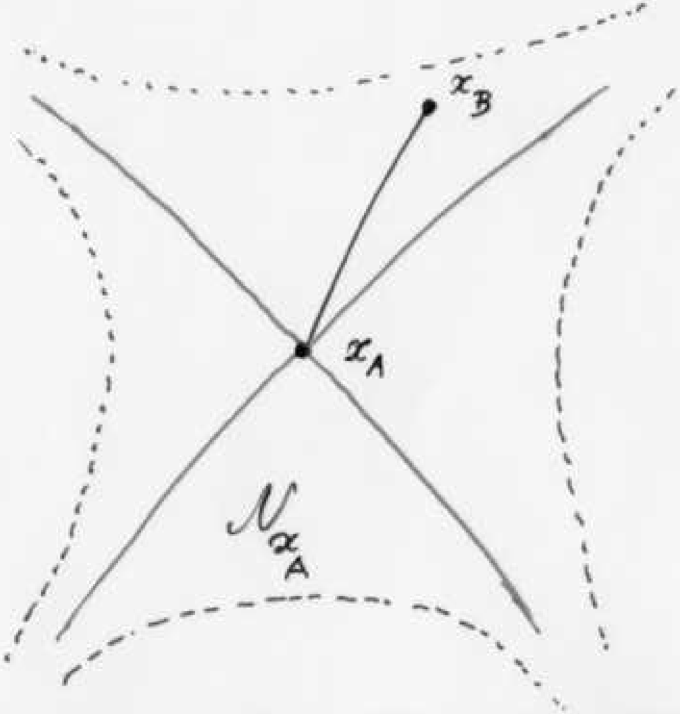
Un outil performant : la bifonction $\Omega(x_A, x_B)$ de Synge.

Récemment, développements postminkowskiens généralisés
(Le Poncin, Linet, T. 2004)

→ Contribution des termes en G^2/c^4 en symétrie sphérique statique.

Application de Ω à l'interférométrie dans un champ gravitationnel.

Définition de la fonction d'univers $\Omega(x_A, x_B)$



- (V_4, g), x_A et $x_B \in V_4$

- On suppose x_A et x_B joints par une et une seule géodésique Γ_{AB}

$$\Updownarrow$$

$$x_B \in \mathcal{N}_{x_A}, \quad \mathcal{N}_{x_A} = \text{domaine exponentiel de } x_A$$

(voisinage convexe de x_A)

- Distance géodésique entre x_A et x_B :

$$s_{AB} \underset{\text{déf}}{=} \int_{\Gamma_{AB}} \sqrt{|g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu|}$$

$$\boxed{\epsilon_{AB} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Gamma_{AB} \text{ genre temps} \\ 0 & \text{si } \Gamma_{AB} \text{ isotrope} \\ -1 & \text{si } \Gamma_{AB} \text{ genre espace} \end{cases}}$$

$$\underbrace{\Omega(x_A, x_B) \underset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\, \epsilon_{AB} \left(s_{AB}\right)^2 = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{AB}} g_{\mu\nu}(x(\lambda))\, \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}\, d\lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq 1}_{\text{THEOREME DE PYTHAGORE GENERALISE}}$$

λ = paramètre affine de Γ_{AB}

THEOREME DE PYTHAGORE GENERALISE

Propriétés de $\Omega(x_A, x_B)$

Principe variationnel

Γ_{AB} = géodésique reliant x_A et x_B $\iff$ $$\delta \int_A^B \underbrace{\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}(x(\lambda))\, \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}_{\text{Fonction de Lagrange } L(x^\alpha, \dot{x}^\beta)}\, d\lambda = 0$$

Moments conjugués : $p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\beta$

Fonction de Hamilton : $H(x^\alpha, p_\beta) = \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}(x(\lambda))\, p_\mu p_\nu = L(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$

On a un système conservatif avec énergie potentielle nulle :

Formalisme de la mécanique analytique

Théorie d'Hamilton-Jacobi

Propriétés de $\Omega(x_A, x_B)$

1) Tangentes à Γ_{AB} en x_A et x_B :

$$\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)_A = -\frac{\partial\Omega}{\partial x_A^\mu}$$

$$\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)_B = \frac{\partial\Omega}{\partial x_B^\mu}$$

2) Γ_{AB} = géodésique isotrope

$$\Updownarrow$$

$$\Omega(x_A, x_B) = 0$$

$\Longrightarrow$ Déviation des rayons lumineux entre deux points à distance finie.

Temps de propagation de la lumière entre x_A et x_B :

$$\Omega(x_A^0, \vec{x}_A, x_B^0, \vec{x}_B) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_B^0 - x_A^0 = c\,\mathcal{T}_e(x_A^0, \vec{x}_A, \vec{x}_B) = \underbrace{c\,\mathcal{T}_r(x_B^0, \vec{x}_A, \vec{x}_B)}_{\text{Fonctions de transfert de temps}}$$

3) Equations d'Hamilton-Jacobi :

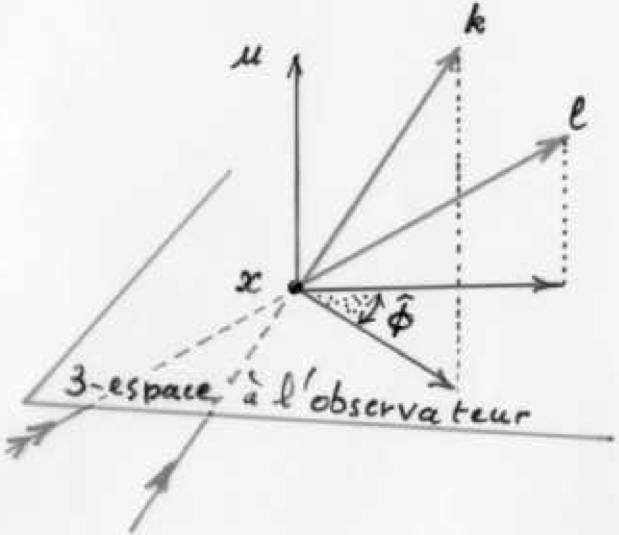
$$\frac{1}{2}g_B^{\alpha\beta}\frac{\partial\Omega}{\partial x_B^\alpha}\frac{\partial\Omega}{\partial x_B^\beta} = \Omega(x_A, x_B) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}g_A^{\alpha\beta}\frac{\partial\Omega}{\partial x_A^\alpha}\frac{\partial\Omega}{\partial x_A^\beta} = \Omega(x_A, x_B)$$

$\longrightarrow$ Détermination de Ω par des méthodes d'approximations successives

Applications à la lumière

La connaissance de $c\mathcal{T}_e$ (ou de $c\mathcal{T}_r$) suffit pour résoudre les pbs fondamentaux

1) Angle $\hat{\Phi}$ entre deux rayons lumineux mesuré par un observateur



$$2 \sin^2 \frac{\hat{\Phi}}{2} = \frac{g^{\mu\nu} k_\mu \ell_\nu}{(u^\alpha k_\alpha)(u^\beta \ell_\beta)}$$

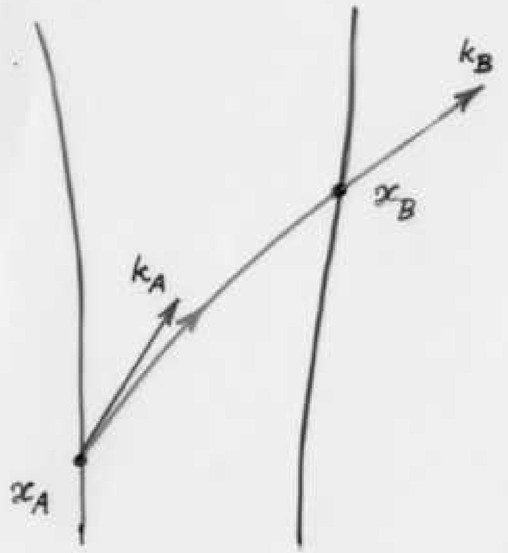
$$= \frac{g^{00} + g^{0i}\left(\frac{k_i}{k_0} + \frac{\ell_i}{\ell_0}\right) + g^{ij} \frac{k_i}{k_0} \frac{\ell_j}{\ell_0}}{(u^0)^2 \left(1 + \frac{v^i}{c} \frac{k_i}{k_0}\right)\left(1 + \frac{v^j}{c} \frac{\ell_j}{\ell_0}\right)}$$

$\frac{v^i}{c} = \frac{dx^i}{dx^0} = \frac{1}{c}$. vitesse coordonnée de l'observateur

$$u^\mu u_\mu = 1 \implies \frac{1}{(u^0)^2} = g_{00} + 2 g_{0i} \frac{v^i}{c} + g_{ij} \frac{v^i}{c} \frac{v^j}{c}$$

Si on a une orbitographie pour l'observateur, il suffit de connaître $\frac{k_i}{k_0}$ et $\frac{\ell_i}{\ell_0}$ pour calculer l'angle $\hat{\Phi}$.

2) Transfert de fréquences une-voie



$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{(u^\beta k_\beta)_B}{(u^\alpha k_\alpha)_A} = \frac{u^0_B}{u^0_A}\,\frac{(k_0)_B}{(k_0)_A}\,\frac{1+\left(\frac{v^i}{c}\frac{k_i}{k_0}\right)_B}{1+\left(\frac{v^i}{c}\cdot\frac{k_i}{k_0}\right)_A}$$

Si on a une orbitographie pour l'émetteur et le recepteur, il suffit de connaître $\frac{(k_0)_B}{(k_0)_A}$, $\left(\frac{k_i}{k_0}\right)_B$ et $\left(\frac{k_i}{k_0}\right)_A$.

Nous avons montré que

$$\left(\frac{k_i}{k_0}\right)_B = -c\,\frac{\partial T_e}{\partial x^i_B} = -c\,\frac{\partial T_r}{\partial x^i_B}\left(1-\frac{\partial T_r}{\partial t_B}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{k_i}{k_0}\right)_A = c\,\frac{\partial T_r}{\partial x^i_A} = c\,\frac{\partial T_e}{\partial x^i_A}\left(1+\frac{\partial T_e}{\partial t_A}\right)^{-1}$$

$$\frac{(k_0)_B}{(k_0)_A} = \left(1+\frac{\partial T_e}{\partial t_A}\right)^{-1} = 1-\frac{\partial T_r}{\partial t_B}$$

Développement postminkowskien général de Ω, T_e et T_r

On suppose que

$$g_{\mu\nu}(x,G) = \eta_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} G^n g^{(n)}_{\mu\nu}(x)$$

$$\Longrightarrow \qquad \Omega(x_A, x_B, G) = \Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \sum_{n=1}^{\infty} G^n \Omega^{(n)}(x_A, x_B)$$

$$\Omega^{(0)}(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\left[\left(x^0_B - x^0_A\right)^2 - R^2_{AB}\right] \qquad R_{AB} = |\vec{x}_B - \vec{x}_A|$$

$$\Omega^{(1)}(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\left(x^\mu_B - x^\mu_A\right)\left(x^\nu_B - x^\nu_A\right)\int_0^1 g^{(1)}_{\mu\nu}\, d\lambda$$

$$\Omega^{(2)}(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\left(x^\mu_B - x^\mu_A\right)\left(x^\nu_B - x^\nu_A\right)\int_0^1 \left[g^{(2)}_{\mu\nu} - \eta^{\rho\sigma} g^{(1)}_{\mu\rho}\, g^{(1)}_{\nu\sigma} - \eta^{\rho\sigma}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\rho}\frac{\partial g^{(1)}_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right] d\lambda$$

$$+ \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\mu_B}(x_A, x_B)\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu_B}(x_A, x_B)$$

Les intégrales sont prises le long de 'la droite' $x^\alpha_{(0)}(\lambda) = \left(x^\alpha_B - x^\alpha_A\right)\lambda + x^\alpha_A$.

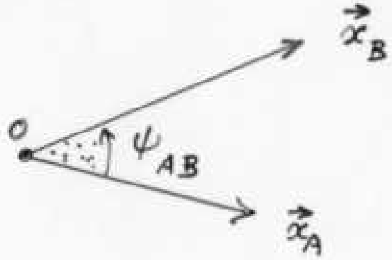
Développement de $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$

$$\mathcal{T}_e(t_A, \vec{x}_A, \vec{x}_B, G) = \frac{1}{c} R_{AB} + \sum_{n=1}^{\infty} G^n \underbrace{\mathcal{T}_e^{(n)}(t_A, \vec{x}_A, \vec{x}_B)}_{\uparrow}$$

$$\mathcal{T}_e^{(n)} = \text{fonction}\left(R_{AB}, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(n)}, \mathcal{T}_e^{(1)}, \dots, \mathcal{T}_e^{(n-1)}\right)$$

$\boxed{\text{Métrique à symétrie sphérique statique avec 3 paramètres PN } \beta, \gamma, \delta}$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + 2\beta \frac{G^2M^2}{c^4 r^2}\right)(dx^0)^2 - \left(1 + 2\gamma \frac{GM}{c^2 r} + \frac{3}{2}\delta \frac{G^2M^2}{c^4 r^2}\right)\delta_{ij}\, dx^i dx^j$$



$$\mathcal{T}(\vec{x}_A, \vec{x}_B) = \frac{R_{AB}}{c}\Bigg\{ 1 + \underbrace{(\gamma+1)\frac{GM}{c^2 R_{AB}} \ln\left(\frac{r_A + r_B + R_{AB}}{r_A + r_B - R_{AB}}\right)}_{\text{Terme de Shapiro}}$$

$$+ \underbrace{\frac{G^2M^2}{c^4 r_A r_B}\left[\left(2 - \beta + 2\gamma + \frac{3}{4}\delta\right)\frac{\psi_{AB}}{\sin\psi_{AB}} - \frac{(1+\gamma)^2}{1+\cos\psi_{AB}}\right]}_{\text{Généralisation d'un résultat de Brumberg en R.G. (1987)}}\Bigg\} + \mathcal{O}(G^3)$$

Phase quantique accumulée par une particule test entre x_A et x_B

$$\Phi_{AB} = \frac{mc}{\hbar}\int_{\Gamma_{AB}} ds = \frac{mc}{\hbar}\, s_{AB} = \frac{mc^2}{\hbar}\,\tau_{AB}$$

$$\Longrightarrow \qquad \Phi_{AB} = \frac{mc}{\hbar}\sqrt{2\,\Omega(x_A, x_B)}$$

<u>Espace-temps stationnaire</u>

- $\Omega = \Omega\left(x^0_B - x^0_A,\ \vec{x}_A,\ \vec{x}_B\right)$

- Intégrale première : $u_0 \equiv g_{0\alpha}\dfrac{dx^\alpha}{ds} = C^{te} = \dfrac{E}{mc^2}$

  Pour une particule en mouvement hyperbolique, E serait l'énergie totale mesurée à l'infini par un observateur au repos, dans un espace-temps asymptotiquement euclidien.

- Dans le cas général : $\left(u_\alpha\right)_B = \dfrac{1}{\sqrt{2\Omega}}\cdot\dfrac{\partial\Omega}{\partial x^\alpha_B}$

On a donc

$$\Phi_{AB} = \frac{mc}{\hbar} \sqrt{2\,\Omega\left(x^0_B - x^0_A, \vec{x}_A, \vec{x}_B\right)} \qquad (A)$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\,\Omega\left(x^0_B - x^0_A, \vec{x}_A, \vec{x}_B\right)}} \; \frac{\partial\,\Omega\left(x^0_B - x^0_A, \vec{x}_A, \vec{x}_B\right)}{\partial\left(x^0_B - x^0_A\right)} = \frac{E}{mc^2}}_{} \qquad (B)$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi_{AB} = \frac{m^2 c^3}{\hbar E} \; \frac{\partial\,\Omega\left(x^0_B - x^0_A, \vec{x}_A, \vec{x}_B\right)}{\partial\left(x^0_B - x^0_A\right)} \qquad (C)$$

- On résout (B) en $x^0_B - x^0_A \longrightarrow x^0_B - x^0_A = c\,T\left(\vec{x}_A, \vec{x}_B, E\right)$ (D)
- On substitue (D) dans (C) $\longrightarrow \Phi_{AB} = \Phi\left(\vec{x}_A, \vec{x}_B, E\right)$

Calcul explicite pour un champ faible stationnaire

On pose $h_{\mu\nu} = G\, g^{(1)}_{\mu\nu}$ et

$$\left\{\begin{aligned} A(\vec{x}_A, \vec{x}_B) &= \frac{1}{2}\int_0^1 h_{00}\left(\vec{x}_{(0)}(\lambda)\right) d\lambda \\ B(\vec{x}_A, \vec{x}_B) &= \frac{x_B^i - x_A^i}{R_{AB}} \int_0^1 h_{0i}\left(\vec{x}_{(0)}(\lambda)\right) d\lambda \\ C(\vec{x}_A, \vec{x}_B) &= \frac{(x_B^i - x_A^i)(x_B^j - x_A^j)}{2 R_{AB}^2} \int_0^1 h_{ij}\left(\vec{x}_{(0)}(\lambda)\right) d\lambda \end{aligned}\right.$$

Dans ces intégrales :

$$\vec{x}_{(0)}(\lambda) = (\vec{x}_B - \vec{x}_A)\lambda + \vec{x}_A$$

En utilisant la formule générale donnant $\Omega^{(1)}(x_A, x_B)$, on trouve dans le cas $E > mc^2$:

$$x_B^0 - x_A^0 = R_{AB}\left\{ \frac{E}{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}\left[1 - \left(1 - \frac{m^2c^4}{E^2 - m^2c^4}\right) A(\vec{x}_A, \vec{x}_B) - C(\vec{x}_A, \vec{x}_B)\right] - B(\vec{x}_A, \vec{x}_B)\right\},$$

$$\Phi_{AB} = \frac{R_{AB}}{\hbar}\frac{m^2c^3}{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}\left[1 + \frac{E^2}{E^2 - m^2c^4} A(\vec{x}_A, \vec{x}_B) - C(\vec{x}_A, \vec{x}_B)\right].$$

Comparaison avec les méthodes de Linet - Tourrenc et de Stodolsky

Si on veut éviter l'emploi de $\Omega(x_A, x_B)$, on part de

$$\Phi_{AB} = \frac{mc}{\hbar} s_{AB} \qquad = \frac{mc}{\hbar} V(x_A, x_B) , \qquad V \underset{\text{déf}}{=} \sqrt{2\Omega}$$

On cherche un développement de s_{AB} :

$$s_{AB} = \int_{\Gamma_{AB}} ds = s^{(0)}_{AB} + G\, s^{(1)}_{AB} + \cdots$$

$\equiv$ Méthode de Stodolsky (1979)

Les éqs. d'Hamilton-Jacobi satisfaites par Ω entraînent

$$g^{\alpha\beta}_B \frac{\partial V}{\partial x^\alpha_B} \frac{\partial V}{\partial x^\beta_B} = 1 \quad (+ \text{ éq. id. en } x_A)$$

$$\Updownarrow$$

Equations eikonales satisfaites par Φ_{AB} $(= \Phi)$:

$$g^{\alpha\beta}_B \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha_B} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta_B} = \frac{mc}{\hbar} \quad (+ \text{ éq. id. en } x_A)$$

$\equiv$ Méthode de Linet - Tourrenc (1976)

puis méthode générale de Buchdahl (1990)

Méthode de Linet - Tourrenc :

Eq. eikonale + solution onde plane perturbée : $\Phi = \Phi^{(0)} + \delta\Phi$

$$\Phi^{(0)}_{AB} = \eta_{\mu\nu}\, \xi^{\mu} \left(x^{\mu}_{B} - x^{\mu}_{A}\right)$$

Si Γ_{AB} est le chemin classique correspondant, on a

$$\xi^{\mu} = \frac{mc}{\hbar} \frac{x^{\mu}_{B} - x^{\mu}_{A}}{\sqrt{(x^{0}_{B} - x^{0}_{A})^{2} - R^{2}_{AB}}} = \frac{mc}{\hbar} U^{\mu} \qquad \left(\Rightarrow \quad U^{\mu} U_{\mu} = 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi^{(0)}_{AB} = \frac{mc}{\hbar} \sqrt{(x^{0}_{B} - x^{0}_{A})^{2} - R^{2}_{AB}} = \frac{mc}{\hbar}\, s^{(0)}_{AB}$$

Pour la perturbation $\delta\Phi_{AB}$:

$$\delta\Phi_{AB} = \frac{1}{2} \frac{mc}{\hbar}\, s^{(0)}_{AB}\, U^{\mu} U^{\nu} \int_{0}^{1} h_{\mu\nu}\left(\vec{x}_{(0)}(\lambda)\right) d\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_{AB} = \frac{mc}{\hbar} \left[s^{(0)}_{AB} + \frac{1}{2}\, s^{(0)}_{AB}\, U^{\mu} U^{\nu} \int_{0}^{1} h_{\mu\nu} \left(\vec{x}_{(0)}(\lambda)\right) d\lambda \right]}$$

Méthode de Stokolsky

Elle conduit exactement à la même expression.

Recopions en explicitant :

$$\Phi_{AB} = \frac{mc}{\hbar} \sqrt{\underbrace{(x^0_B - x^0_A)^2}_{} - R^2_{AB}} \left[1 + \frac{1}{2} U^\mu U^\nu \int_0^1 h_{\mu\nu}(\vec{x}_{(0)}(\lambda))\, d\lambda \right]$$

Substituons l'expression de $x^0_B - x^0_A$ que nous avons trouvée p. 11. Il est facile de vérifier que nous retrouvons notre propre expression de Φ_{AB}.

- Les trois méthodes analysées ici donnent donc des résultats équivalents au 1er ordre ce qui est naturel !
- Notre méthode présente l'avantage d'éliminer le temps de parcours et de faire apparaître une énergie E qui est une quantité intrinsèque.
- Cette méthode conduit à un calcul global ne faisant pas explicitement un découpage du type $\Phi^{(0)} + \delta\Phi$. C'est plutôt heureux car $\delta\Phi$ n'est pas une quantité intrinsèque et n'a donc pas de signification physique en elle-même.

Références

Bifonction $\Omega(x_A, x_B)$:

- J. L. SYNGE, Relativity : the general theory (North Holland, 1964).

Transferts de temps et de fréquences :

- L. BLANCHET, C. SALOMON, P. TEYSSANDIER & P. WOLF : Astron. Astrophys 370, 320 (2001).
- B. LINET & P. TEYSSANDIER, Phys. Rev. D 66, 024045 (2002).

Développements postminkowskiens généralisés de $\Omega(x_A, x_B)$:

- C. LE PONCIN-LAFITTE, B. LINET & P. TEYSSANDIER, Class. Quantum Grav. 21, p. 4463 (2004).

Phase quantique dans un champ gravitationnel :

- B. LINET & Ph. TOURRENC, Canadian J. Physics, 54, 1129 (1976).
- L. STODOLSKY, Gen. Rel. Grav., 11, 391 (1979).
- B. LINET & P. TEYSSANDIER, preprint gr-qc/0206056 (2002).

Développement postminkowskien généralisé de $V(x_A, x_B)$:

- H.A. BUCHDAHL, Int. J. Theor. Phys. 29, 209 (1990).