Math Exercices

Differential equations

1 First order

Solve the following differential equations. Find an explicit form $y(x)$ when possible, otherwise an implicit equation $F(x,y)=0$. Answers are given between brackets, C is the undetermined constant.

$(4y+3x^2)y'+2xy=0$	$\left[y^4+3x^2y^2=C\right]$
$x^2y'+y^2=xyy'$	$\left[\frac{y}{x}-\ln y=C\right]$
$y'=\dfrac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}$	$\left[\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-y^2}=C\right]$
$3xy^3-2y+(x^2y^2+x)y'=0$	$\left[y=Cx^2(xy^2-1)\right]$
$(3x^2y+2xy+y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$	$\left[e^{3x}(x^2y+\frac{y^3}{3})=C\right]$
$y'=\dfrac{a^2}{(x+y)^2}$	$\left[y-a\arctan\left(\frac{x+y}{a}\right)+C=0\right]$
$y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$	$\left[y=\sin x-1+Ce^{-\sin(x)}\right]$
$y'=(x+y+1)^2$	$[y=-x-1-\tan(C-x)]$
$y'=-\frac{1}{2xy}\left(y^2+\frac{2}{x}\right)$	$\left[xy^2=C-2\ln x\right]$
$y'=\frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$	$\left[(4y-x-3)(y+2x-3)^2=C\right]$
$(x^3+x^2+x+1)y'^2-(3x^2+2x+1)yy'+2xy^2=0$	$\left[(y-C(x+1))(y-C(x^2+1))=0\right]$
$dx-(xy+x^2y^3)dy=0$	$\left[2-y^2+Ce^{-y^2/2}=\frac{1}{x}\right]$
$(1-x^2)y'-xy=xy^2$	$\left[\frac{1}{y}=-1+C\sqrt{x^2-1}\right]$
$2x^3y'=1+\sqrt{1+4x^2y}$	$\left[\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{1+4x^2y}\right)+\frac{1}{2}\ln y=C\right]$
$x^2y'^2-2(xy-4)y'+y^2=0$	$\left[y=\frac{2}{x}\ ;\ (y-Cx)^2+8C=0\right]$
$(1-x)y^2dx-x^3dy=0$	$\left[\dfrac{2x^2}{1-2x+2Cx^2}\right]$

TD M1. Feuille 1. Eq. dif.

1) $(4y + 3x^2)\, y' + 2xy = 0$.

$$\underbrace{2xy}_{u}\, dx + \underbrace{(4y + 3x^2)}_{v}\, dy = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 6x \qquad \to \text{ find } \lambda(y).$$

$$\ln \lambda(y) = \int \frac{1}{2xy}\,(6x - 2x)\, dy$$

$$= \int \frac{2}{y}\, dy = 2 \ln y \Rightarrow \lambda = y^2.$$

test: $\begin{cases} A = 2xy^3 \to \dfrac{\partial A}{\partial y} = 6xy^2 \\ B = 4y^3 + 3x^2y^2 \to \dfrac{\partial B}{\partial x} = 6xy^2 \end{cases} \Rightarrow$ ok, exact.

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = A \Rightarrow U = x^2y^3 + f(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2y^2 + f'(y) = B = 3x^2y^2 + 4y^3$$

$$\Rightarrow f(y) = y^4$$

$$\Rightarrow U(x,y) = \cancel{3x^2y^2}\; x^2y^3 + y^4 = c^{te}$$

Sol^n: $\boxed{y^4 + \cancel{3x^2y^2}\; x^2y^3 = C}$

2) $x^2 y' + y^2 = x y y'$

$\Rightarrow \quad dx \underbrace{y^2}_{A} + \underbrace{(x^2 - xy)}_{B} dy = 0.$

$\begin{cases} A(ax, ay) = a^2 \; A(x,y) \\ B(ax, ay) = a^2 \; B(x,y) \end{cases}$

$\rightarrow$ homog. $r = 2$

change : $y = vx$

$\Rightarrow \quad dy = v\,dx + x\,dv$

$(v\,dx + x\,dv)(x^2 - vx^2) + dx\, v^2 x^2 = 0.$

$x^3 dv (1 - v) + dx\,(v x^2 - \cancel{v^2 x^2} + v^2 x^2) = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{dv}{v}(1-v)x^3 + x^2 dx = 0$

$\Rightarrow \quad dv\left(1 - \frac{1}{v}\right) = \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \quad \ln(x) = v - \ln(v) + cte$

$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{y}{x} - \ln(y) = C}$

3) $y' + y \cdot \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$

eq. homogen. : $Y' + Y \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Y'}{Y} = -\cos x$

$\ln Y = -\sin x \quad \Rightarrow \quad Y = C e^{-\sin(x)}$

var. const : $y_0(x) = C(x)\, e^{-\sin x}$

$y_0' = C'(x)\, e^{-\sin x} - C(x) \cos x \, e^{-\sin x} = 0$

putting into the ED :

$C'(x)\, e^{-\sin x} - \cancel{C \cdot \cos x \, e^{-\sin x}} + \cancel{C \cdot \cos x \, e^{-\sin x}} = \frac{1}{2} \sin 2x$

$\Rightarrow \quad C'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \; e^{\sin x} = \underbrace{\sin x}_{U} \cdot \underbrace{\cos x}_{U'} \; \underbrace{e^{\sin x}}_{e^U}$

$\Rightarrow \quad C(x) = \int U e^U dU = U e^U - e^U + cte$

$\Rightarrow \quad C(x) = \sin(x)\, e^{\sin x} - e^{\sin x}$

$\Rightarrow \quad y_0 = \sin(x) - 1$

$\Rightarrow \quad y(x) = y_0 + Y = C\, e^{-\sin x} + \sin(x) - 1$

---

4) $y' = \dfrac{a^2}{(x+y)^2}$

de la forme $y' = f(ax + by + c)$

$\Rightarrow \quad v = x + y.$

$\Rightarrow \quad dx = dv - dy$

$dy = \dfrac{a^2}{v^2}(dv - dy) \Rightarrow dy\left(1 + \dfrac{a^2}{v^2}\right) = \dfrac{a^2}{v^2}\, dv$

$\Rightarrow \quad dy = \dfrac{a^2}{a^2 + v^2}\, dv \quad \Rightarrow \quad y = a \cdot \operatorname{arctg}\left(\dfrac{v}{a}\right) + cte$

$\Rightarrow \quad \boxed{y - a \cdot \operatorname{Arctg}\left(\dfrac{x+y}{a}\right) = C}$

---

5) $3xy^3 - 2y + (x^2y^2 + x)\, y' = 0.$

$\Rightarrow \quad \underbrace{(3xy^3 - 2y)}_{\text{ok si } y = [x]^{-\frac{1}{2}}}\, dx + \underbrace{(x^2y^2 + x)}_{\text{ok si } [y^2] = [x]^{-1} \Rightarrow y = [x]^{-\frac{1}{2}}}\, dy = 0.$

$\Rightarrow$ éq. isobare de degré $m = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ changement : $y = v\, x^{-\frac{1}{2}}$ ou $x = u\, y^{-2}$

(voir cours) : on obtient :

$dx = du\, y^{-2} - \dfrac{2}{y^3}\, u\, dy$

$\Rightarrow \quad (3uy - 2y)(du\, y^{-2} - 2u\, y^{-3}\, dy) + (u^2 y^{-2} + u\, y^{-2})\, dy = 0$

$\times y^2$

$\Rightarrow \quad (3uy - 2y)(du - 2u\, y^{-1}\, dy) + (u^2 + u)\, dy = 0.$

$du\,(3uy - 2y) + dy\,(-6u^2 + 4u + u^2 + u) = 0.$

$$\Rightarrow y\,du\,(3u-2) + dy\,(-5u^2+5u) = 0$$

$$\Rightarrow du\,(3u-2) + \frac{dy}{y}(5u-5u^2) = 0$$

$$\Rightarrow du\left(\frac{3u-2}{5u-5u^2}\right) + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-3}{5(u-1)} - \frac{2}{5u^2-5u}\,du\,.$$

décomp. él. simple : $\frac{2}{5u^2-5u} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}$

trouver A : $\times u$ puis $u=0 \Rightarrow \frac{2}{5(-1)} = -\frac{2}{5} = A$

B : $\times(u-1)$ puis $u=1 \Rightarrow \frac{2}{-5} = +\frac{2}{5} = B$

$$\Rightarrow \frac{2}{5u(u-1)} = \frac{-2}{5u} + \frac{2}{5(u-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{3}{5(u-1)} + \frac{2}{5u} - \frac{2}{5(u-1)} = \frac{1}{5(u-1)} + \frac{2}{5u}$$

$$\ln y = \frac{1}{5}\ln(u-1) + \frac{2}{5}\ln u + c$$

$$\Rightarrow y = C(u-1)^{\frac{1}{5}} \cdot u^{2/5} \cancel{+c}$$

$$\Rightarrow y^5 = C(xy^2-1)(xy^2)^2 \Rightarrow y = C(xy^2-1)(x^2)$$

$$\boxed{y = Cx^2(xy^2-1)}$$

5) $\underbrace{(3x^2y + 2xy + y^3)}_{A}\, dx + \underbrace{(x^2+y^2)}_{B}\, dy = 0.$ (5

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 3x^2 + 2x + 3y^2 \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = 2x.$$

recherche $\lambda(x)$:

$$\ln(\lambda(x)) = \int \frac{1}{B}\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{(x^2+y^2)} \cdot (3x^2 + 2x + 3y^2 - 2x)\, dx.$$

$$= \int 3\, dx = 3x \Rightarrow \boxed{\lambda(x) = e^{3x}}$$

$$\Rightarrow A_1 = (3x^2y + 2xy + y^3)\, e^{3x} \qquad B_1 = (x^2+y^2)\, e^{3x}.$$

$$B_1 = \frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow U(x,y) = e^{3x}\left(yx^2 + \frac{y^3}{3}\right) + f(x).$$

$$U'_x = 3e^{3x}\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + e^{3x} \cdot 2xy + f'(x)$$

$$A_1 = 3x^2ye^{3x} + 2xye^{3x} + y^3e^{3x} + 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0$$

la solution $U = cte$ donne : $\boxed{e^{3x}\left(yx^2 + \frac{y^3}{3}\right) = C}$

---

3) $y' = \dfrac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}$ séparable.

$$\frac{dy\, y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \begin{cases} u = 1+x^2 \\ du = 2x\, dx \end{cases}$$

$$= \int \frac{du/2}{\sqrt{u}} = \sqrt{u}.$$

d'où : $\boxed{\sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+x^2} + C.}$

7) $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

classique : E.H + Sol. particulière.

EH : $Y' + Y \cos x = 0 \Rightarrow \frac{dY}{Y} = -\cos x \, dx \Rightarrow \boxed{Y = c \cdot e^{-\sin x}}$

variation constante : $y_0(x) = C(x) \, e^{-\sin x}$.

$\Rightarrow y_0' = c' \, e^{-\sin x} - C \cdot \cos x \cdot e^{-\sin x}$

plug dans l'E.D. $\Rightarrow$ les termes en C partent.

$c' \, e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x = \sin x \cos x$

$\Rightarrow c' = \underbrace{\sin x}_{u} \cos x \, e^{\sin x} = u \cdot u' e^{u}$

$\Rightarrow C = \int u \cdot u' e^{u} = [u e^{u}] - \int e^{u}$

$C = \sin x \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x}$

$\Rightarrow \boxed{y_0(x) = \sin x - 1}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \sin x - 1 + C \cdot e^{-\sin x}}$

8) $y' = (x+y+1)^2$

de la forme $y' = f(ax+by+c) \Rightarrow v = x+y+1 \Rightarrow y = v - x - 1$

$\Rightarrow y' = v' - 1$

$\Rightarrow v' - 1 = v^2 \Rightarrow v' = 1 + v^2 \Rightarrow \frac{dv}{1+v^2} = dx$

$\Rightarrow \operatorname{arctg} v = x + C \Rightarrow v = \operatorname{tg}(x + C)$

$\Rightarrow \boxed{y = \operatorname{tg}(x+C) - x - 1}$

9) $y' = \frac{-1}{2xy}\left(y^2 + \frac{2}{x}\right)$

isobare avec $m^{-1/2} \Rightarrow [y] = [x]^{-1/2}$

test : $[y'] = [y][x^{-1}]$ et $\left[-\frac{1}{2xy}(\ )\right] = \frac{[y^2]}{[x][y]} = \frac{[y]}{[x]}$

$\Rightarrow y = v \, x^{-1/2} \Rightarrow dy = x^{-\frac{1}{2}} dv - \frac{1}{2} v \, x^{-3/2} dx$.

l'ED est : $\left(y^2 + \frac{2}{x}\right) dx + 2xy \, dy = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{v^2}{x} + \frac{2}{x}\right) dx + 2xy \left(\frac{dv}{\sqrt{v}} - \frac{v \, dx}{2x\sqrt{x}}\right) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{x} + v\,dv = 0$ séparable

$\Rightarrow \dfrac{v^2}{2} + \ln(x) = C$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{y^2 x}{2} + \ln(x) = C}$

---

10) $y' = \dfrac{2x - 5y + 3}{2x + 4y - 6}$

Fraction rationnelle en x, y.

Soit : $\begin{cases} X = x + \alpha \\ Y = y + \beta \end{cases}$ avec $\begin{cases} 2\alpha - 5\beta + 3 = 0 \\ 2\alpha + 4\beta - 6 = 0 \end{cases}$ $\beta = 1$ par soustraction $\Rightarrow \alpha = 1$

$\Rightarrow$ le nouveau système est :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X - 5Y}{2X + 4Y} \Big\} \ F(X,Y) \text{ homogène de } d^\circ\, 0$$

la solution s'obtient par $Y = vX$

et $\dfrac{v'}{F(1,v) - v} = \dfrac{1}{X}$ $\qquad F(1,v) = \dfrac{2 - 5v}{2 + 4v}$

$$\Rightarrow \frac{v'}{\dfrac{2 - 5v - v(2+4v)}{2+4v}} = \frac{v'(2+4v)}{2 - 7v - 4v^2} = \frac{dX}{X}.$$

$$\frac{1}{4v^2 - 7v - 2} = \frac{1}{(v+2)(4v-1)} = \frac{A}{v+2} + \frac{B}{4v-1}$$

$A = -1/9 \qquad B = 4/9.$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3}\frac{dv}{4v-1} - \frac{2}{3}\frac{dv}{v+2} = \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \ln(X) = -\frac{1}{3}\ln(4v-1) - \frac{2}{3}\ln(v+2) + C.$$

$$\Rightarrow \ln\left(X^3 \cancel{\times} (4v-1) \times (v+2)^2\right) = cte$$

$$\Rightarrow X^3 (4v-1)(v+2)^2 = cte$$

$v = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{y+1}{x+1}$ on obtient finalement :

$$\boxed{(4y - x - 3)(y + 2x - 3)^2 = cte}$$

12) $dx - (xy + x^2y^3)\,dy = 0$

équation de type Bernoulli : $y' + f(x)\,y = g(x)\,y^n$

en effet : $\dfrac{dx}{dy} - y \cdot x = y^3 \cdot x^{2}$ ← $n=2$ $\Rightarrow$ c'est x la fonction, y la variable.

chg. Variable : $v = x^{1-n} = \dfrac{1}{x}$.

par commodité on va poser : $Y = x$ et $X = y$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} - XY = X^3 Y^2 \Rightarrow v = \frac{1}{Y} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = -\frac{v'}{v^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{v'}{v^2} - \frac{X}{v} = \frac{X^3}{v^2} \Rightarrow v' + Xv = -X^3$$

E. Homog : $\dfrac{dV}{V} = -X\,dX \Rightarrow V = c\,e^{-\frac{X^2}{2}}$

var. cste : $c'(x)\,e^{-X^2/2} = -X^3$

$$\Rightarrow c'(X) = -X^3 e^{+X^2/2} = +X^2\left(-Xe^{+\frac{X^2}{2}}\right)$$

$$C(x) = -\left[X^2 e^{+\frac{X^2}{2}}\right] + \int 2X\, e^{+\frac{X^2}{2}}$$

$$C(x) = -X^2 e^{+\frac{X^2}{2}} + 2e^{+\frac{X^2}{2}}$$

$$\Rightarrow v_0(x) = -X^2 + 2$$

$$\Rightarrow v(x) = 2 - X^2 + c\,e^{-\frac{X^2}{2}}$$

$$v = \frac{1}{Y} \Rightarrow \frac{1}{Y} = 2 - X^2 + c\,e^{-\frac{X^2}{2}}$$

$$\left.\begin{matrix} Y = x \\ X = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x} = 2 - y^2 + c\,e^{-\frac{y^2}{2}}}$$

13) $(1-x^2)\,y' - xy = xy^2$

éq. de Bernouilli, $n=2$.

$y' - \dfrac{xy}{1-x^2} = \dfrac{x}{1-x^2}\,y^2 \qquad f(x) = \dfrac{-x}{1-x^2} \quad ; \quad g(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

$n=2$

$v = \dfrac{1}{y}$.

$\Rightarrow$ eq en v (cf. Cours) :

$$\frac{v'}{+1} + \frac{x\,v(x)}{1-x^2} = \frac{-x}{1-x^2}.$$

E. H. : $\quad v' + \dfrac{x}{1-x^2}\,v(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{v'}{v} = -\frac{x}{1-x^2} \;\cancel{=}\; \frac{1}{2}\underbrace{(-2x)}_{u'}\;\underbrace{(1-x^2)^{-1}}_{u^{-1}}$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + c$$

$$\Rightarrow v = \text{cte}\,\sqrt{1-x^2}.$$

Sol. particulière : $v_0 = -1$ est évidente

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{-1 + C\sqrt{1-x^2}}}$$

14) $2x^3y' = 1 + \sqrt{1+4x^2y}$.

isobare : $[y] = [x]^{-2} \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{v}{x^2}$.

eq en v :

$$2x\,v' - 4v = 1 + \sqrt{1+4v}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{1+4v+\sqrt{1+4v}} = -\frac{dx}{2x}$$

$U = \sqrt{1+4v} \;\Rightarrow\; U^2 = 1+4v \;\Rightarrow\; 2U\,dU = 4\,dv$

$$\Rightarrow \int \frac{1/2\,U\,dU}{U^2+U} = 1/2\,\ln(1+U) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{1+4v}\right) + c.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+4v}+1\right) + c = -\frac{1}{2}\ln x.$$

Math Exercices

Differential equations

2 Higher order

$2x^2y'' - 3xy' - 15y = 0$ $\left[y = C_1x^{5/2} + \frac{C_2}{x^3}\right]$

$x^2y'' - 2y = x$ $\left[y = -\frac{x}{2} + C_1x^2 + \frac{C_2}{x}\right]$

$x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$ $\left[y = C_1x^4 + C_2x^4 \ln x\right]$

Without solving the equation, find a particular integral y_0 of
$y'' - 4y' - 12y = \sin(2x)$ $\left[y_0 = \frac{1}{40}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x)\right]$
$y'' - 4y' - 12y = xe^{4x}$ $\left[y_0 = \frac{-1}{36}(3x+1)e^{4x}\right]$

$x^3y^{(3)} - 6x^2y'' + 19xy' - 27y = 0$ $\left[y = C_1x^3 + C_2x^3\ln(x) + C_3x^3\ln(x)^2\right]$

$y^{(4)} + 2y'' + y = e^{-x}$ $\left[y = (C_2 + C_4x)\cos x + (C_1 + C_3x)\sin x + \frac{1}{4}e^{-x}\right]$

Note that $y = x$ is a solution of the following equation if the right side where 0. Use this fact to obtain the solution of the equation as given
$(1-x)y'' + xy' - y = (1-x)^2$ $\left[y = C_1x + C_2e^x + x^2 + 1\right]$

Given the particular integral $y_1 = \frac{x}{1-x}$, solve
$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$ []

$y''(x)^2 = 1 + y'(x)$ $\left[y = -x + C_1\ ;\ y = \frac{x^3}{12} + \frac{C_1x^2}{4} + (\frac{C_1^2}{4} - 1)x + C_2\right]$

$yy'' - y'^2 - 6xy^2 = 0$ $\left[y = C_1\exp(x^3 + C_2x)\right]$
hint : try $v = y'/y$

1) $2x^2y'' + 3xy' - 15y = 0$

éq. d'Euler : recherche de solution en x^m

$\Rightarrow \quad 2x^2 m(m-1) x^{m-2} . x^2 + 3m x^{m-1} x - 15 x^m = 0$

$\Rightarrow \quad 2m(m-1) + 3m - 15 = 0.$

$\Delta = 121, \quad m = -3, \frac{5}{2}$ 2 racines

$\Rightarrow \boxed{y = c_1 x^{5/2} + \frac{c_2}{x^3}}$

2) $x^2y'' - 2y = x$.

éq. d'euler avec 2nd membre.

1 solution particulière évidente est $y_0(x) = -\frac{x}{2}$

* sol^n à l'E.H.

$x^2y'' - 2y = 0$ → recherche de solutions $Y = \cdot$

$\Rightarrow \quad m(m-1) - 2 = 0 \quad ; \quad \Delta = 9 \quad ; \quad m = 2, -\cdot$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{c_1}{x} + c_2 x^2}$.

3) $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$.

éq. d'euler.

polynome : $m(m-1) - 7m + 16 = 0$

$m^2 - 8m + 16 = 0$

$(m-4)^2 = 0 \qquad m = 2$ raci

$\Rightarrow \quad y_1 = x^4, \quad y_2 = x^4 \ln(x).$

$\Rightarrow \quad \boxed{y = c_1 x^4 + c_1 x^4 \ln(x)}.$

on passe dans $\mathbb{C}$: $z'' - 4z' - 12z = e^{2ix}$; $y = \mathcal{I}$

essai : $z_0 = A e^{2ix}$ $\rightarrow$ $z_0' = 2iA e^{2ix}$

$z_0'' = -4A e^{2ix}$

$\Rightarrow -4A - 8iA - 12A = 1$

$\Rightarrow A = \dfrac{-1}{4 + 8i + 12} = \dfrac{-1}{8(i+2)}$

$\Rightarrow z_0 = \dfrac{-1}{8(i+2)} e^{2ix}$ prendre maintenant

$z_0 = -\dfrac{(2-i)}{8 \times 5} e^{2ix} = -\dfrac{2}{40} e^{2ix} + \underbrace{\dfrac{1}{40} i e^{2ix}}_{\frac{1}{40} e^{i(2x}}$

$$\boxed{\mathcal{I}m(z_0) = -\frac{1}{20} \sin(2x) + \frac{1}{40} \underbrace{\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}_{\cos(2x)}}$$

5) particular integral : $y'' - 4y' - 12y = x e^{4x}$

on cherche
$$\begin{cases} y_0 = (ax+b) e^{4x} \\ y_0' = a e^{4x} + 4(ax+b) e^{4x} \\ y_0'' = 8a e^{4x} + 16(ax+b) e^{4x} \end{cases}$$

plug dans ED :

$4a e^{4x} - 12(ax+b) e^{4x} = x e^{4x}$

$\Rightarrow 4a - 12ax - x - 12b = 0$

$$\forall x = \begin{cases} 4a - 12b = 0 \\ 12a + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{12} \\ b = +\frac{1}{36} \end{cases}$$

$y_0(x) = -\dfrac{1}{12}\left(x - \dfrac{1}{3}\right) e^{4x}$

polynome caractéristique :

$$m(m-1)(m-2) - 6m(m-1) + 19m - 27 = 0.$$

$$\Rightarrow \quad m^3 - 9m^2 + 27m - 27 = 0$$

$$= (m-3)^3$$

$\Rightarrow$ base de fonctions : x^3, $x^3 \ln(x)$, $x^3 \ln(x)^2$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 x^3 + c_2 x^3 \ln(x) + c_3 x^3 \ln(x)$$

7) $y^{(4)} + 2y'' + y = e^{-x}$

EH : $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

eq. caract : $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 = (\lambda^2+1)^2$ racines

$\Rightarrow$ fn de base : e^{ix}, e^{-ix}, $x e^{ix}$, $x e^{-}$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix} + x c_3 e^{-ix} + x c_4$$

peut se mettre sous la forme ($e^{ix} = \cos x + i$
$e^{-ix} = \cos x -$

$$\left[Y = K_1 \cos x + k_2 \sin x + x(k_3 \cos x + k_4 \right.$$

Solution particulière : on cherche $A e^{-x}$ $\Rightarrow$ $A = \frac{1}{4}$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = Y + \frac{1}{4} e^{-x}.}$$

8) Seconde solution.

$$(1-x)\, y'' + x y' - y = (1-x)^2.$$

$y_1 = x$ est une de l'éq.

essai par la méthode de Wronskien.

$\rightarrow$ recherche de la 2^e sol de l'EH.

$$W(x) = W_0 \exp - \int \frac{b}{a}\, dx$$

avec $b = +x$ et $a = 1-x$

$$\Rightarrow \quad W = W_0 \exp + \int \frac{-x}{\quad}\, dx = e^x (x-1)$$

$\rightsquigarrow \quad y_1 y_2 - y_2 y_1 = e \ (x-1)$

$x_{*} y_2' - y_2 = e^x(x-1).$

Sol. EH : $x y_2' - y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = C x$.

Va. Const : $y_2 = C(x) \cdot x$

$\Rightarrow \quad x C' x + C x - C x = e^x (x-1)$

$\Rightarrow \quad C' = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^x \left(\frac{x-1}{x^2} \right.$

comment intégrer : $\underset{u'}{e^x} \times \underset{v}{\frac{1}{x}} + \underset{u}{e^x} \underset{v'}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$

$= \left(\frac{e^x}{x} \right)'$

$\Rightarrow \quad C = \frac{e^x}{x} \quad \Rightarrow \quad Y_2 = e^x$

Sols de l'EH : $\quad C_1 x + C_2 e^x$.

Sol particulières essai d'une solution polynomiale

$\Rightarrow \quad y_0 = a x^2 + b x + c$

$y_0' = 2ax + b \quad ; \quad y_0'' = 2a$.

$\Rightarrow \quad (1-x) 2a + x(2a + b) - a x^2 - b x - c = (x-$

$\Rightarrow \quad a x^2 + 2ax + 2a - c = (1-x)^2 = 1 - 2$

$\Rightarrow \quad a = 1 \ , \quad c = 1 \ , \quad b$ quelconque

$\uparrow$

normal : bx va se diss

dans la solution générale

$\Rightarrow \quad y_0 = x^2 + 1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) = c_1 x + C_2 e^x + x^2 + 1}$$

2) $y''^2(x) = 1 + y'(x)$

(non linéaire)

pas de terme en y ⇒ pose de $v = y'$

$\Rightarrow \quad v'^2 = 1 + v$) on dérive pour linéar

$2v'v'' = v' \quad \Rightarrow \quad v'(2v''-1) = 0$

$v' = 0 \qquad 2v''-1 = 0.$

Sol. 1 $\quad v' = 0. \quad \Rightarrow \quad v = cte \quad \Rightarrow \quad y = ax + b.$

plug dans l'ED :

$(y'')^2 - 1 - y' = -1 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a =$

$\Rightarrow$ Sol 1 : $\boxed{y_1(x) = x + b}$

Sol 2 $\quad 2v''-1 = 0$

$\Rightarrow \quad v'' = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{1}{2}x + b \qquad (y$

$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{4}x^2 + bx + c \qquad (y$

$\Rightarrow \quad y = \frac{x^4}{12} + \frac{b}{2}x^2 + cx + d$

3 cste : 1 de trop

plug dans l'ED.

$$\left(\frac{1}{2}x + b\right)^2 - 1 - \frac{1}{4}x^2 - bx - c = 0$$

$$\frac{x^2}{4} + bx + b^2 - 1 - \frac{x^2}{4} - bx - c = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = b^2 - 1.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_2(x) = \frac{x^2}{12} + \frac{b}{2}x^2 + (b^2-1)x + d}$$

10) $yy'' - y'^2 - 6xy^2 = 0$

on divise par y^2 $\Rightarrow$ $\dfrac{y''}{y} - \dfrac{y'^2}{y^2} = 6x$

on pose $v = \dfrac{y'}{y}$ $\Rightarrow$ $v' = \dfrac{y''}{y} - \dfrac{y'}{y^2}\,y'$

l'éq. devient $v' = 6x$ $\Rightarrow$ $v = 3x^2 + C_1$

$\Rightarrow$ $\dfrac{y'}{y} = 3x^2 + C_1$ $\Rightarrow$ $\ln y = x^3 + C_1 x + C_2$

$\Rightarrow$ $\left[\, y = \exp\left(x^3 + C_1 x + C_2\right) = C \exp\left(x\right.\right.$

11) Bessel eq :

$$y'' + \frac{y'}{x} + y\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) = 0 \quad ; \; y(\pi) = 0 \qquad b = \frac{1}{x},$$

$W = \exp\left[-\int \frac{b}{a}\,dx\right] = \dfrac{1}{x}$ Wronskien

$\Rightarrow$ change $y = v \cdot \sqrt{W} = \dfrac{v}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow$ $y' = \dfrac{v'}{\sqrt{x}} - \dfrac{v}{2x^{3/2}}$

$$y'' = \frac{v''}{\sqrt{x}} \underbrace{- \frac{v'}{2x^{3/2}} - \frac{v'}{2x^{3/2}}} + \frac{3v}{4x^{5/2}}$$

plug $\Rightarrow$ $\dfrac{v''}{\sqrt{x}} - \cancel{\dfrac{v'}{x^{3/2}}} + \dfrac{3v}{4x^{5/2}} + \cancel{\dfrac{v'}{x^{3/2}}} - \dfrac{v}{2x^{5/2}} + \dfrac{v}{\sqrt{x}}\left(1 \ldots\right.$

$\dfrac{v''}{\sqrt{x}} + \cancel{\dfrac{1}{4}\dfrac{v}{x^{5/2}}} + \dfrac{v}{\sqrt{x}}\left(1 - \cancel{\dfrac{1}{4x^2}}\right) = 0$ $\quad \times \sqrt{x}$

reste $\boxed{v'' + v = 0}$

$\Rightarrow$ $v = A e^{ix} + B e^{-ix}$

$y(\pi) = 0 \Rightarrow v(\pi) = \ldots A e^{i\pi} \ldots B e^{-i\pi} \ldots$

$\Rightarrow \quad v = A\,(e^{x} - e^{-x}) = C \cdot \sinh x$

$\Rightarrow \quad \boxed{y = \dfrac{v}{\sqrt{x}} = \dfrac{C \sinh x}{\sqrt{x}}}$

N.B : 1 seule cst

car 1 cnd

Math Exercices

Differential equations

3 Power series

Use power series (expansion at $x = 0$) to solve the following equations. Solutions are given between brackets.

$$y' = x^2 y \qquad \left[y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n\, n!} \right]$$

$$y'' - xy' - y = 0 \ , \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \qquad \left[y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n\, n!} \right]$$

$$y'' + x^2 y' + xy = 0 \ , \ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1 \qquad \left[y = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{[2.5...(3n-1)]^2}{(3n+1)!} x^{3n+1} \right]$$

Show that the following Euler equation has a regular singular point at $x = 0$, and search a series solution by the Frobenius method. Compare to the direct solution.

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0 \qquad \left[y = C_1 x + B x^{-2} \right]$$

Using the Frobenius method, find a power series solution about the point $x = 0$ of

$$2x^2 y'' - xy' + (1+x)y = 0 \qquad \left[y = c_1 \sqrt{x} \left(1 - x + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{90} ... \right) + c_2 \left(x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{30} ... \right) \right]$$

Consider the two equations below. The first one has two equal indicial roots, the seond one has two integer roots. For both equations find a series expansion at the origin for the two basis solution $y_1(x)$ and $y_2(x)$. For y_2 give only the recurrence relation between the coefficients of the series, and the first 3 terms.

$$xy'' + y' + 2y = 0 \qquad \left[y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n!)^2} x^n \ ; \ y_2 = y_1 \ln(x) + c_1 + (4 - 2c_1)x + (c_1 - 3)x^2 + \dots \right]$$

$$y'' x = y \qquad \left[y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!(n+1)!} \ ; \ y2 = y_1 \ln(x) + 1 + c_1 x + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{3}{4} \right) x^2 + \dots \right]$$

Calculate the indicial roots r_1 and r_2 of the following equation, and show that they are complex. Show that the Frobenius method gives two power series y_1 and y_2 involving complex coefficients and powers. Considering only the first term of y_1 and y_2, combine them to find the first term of the two real-valued solutions $\tilde{y}_1$ and $\tilde{y}_2$ (hint : assume that the first coefficient of y_1 and y_2 is real).

$$x^2 y'' + (x^2 + x)y' + y = 0 \qquad [\tilde{y}_1 = \cos(\ln(x)) + \dots \ ; \ \tilde{y}_2 = \sin(\ln(x)) + \dots]$$

1) $y' = x^2 y$.

pas de singularité dans les coeff.

$$\Rightarrow \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \Rightarrow \quad x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = \sum_{p=2}^{\infty} c_{p-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n = 0$$

extrait les terms 0, 1

$$\underbrace{c_1}_{0} + \underbrace{c_2}_{0} x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big[\underbrace{(n+1) c_{n+1} - c_{n-2}}_{0} \Big] x^n = 0 \qquad \forall x.$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0$$

$$c_{n+1} = \frac{c_{n-2}}{n+1} \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{c_{n-3}}{n} \quad (n \geq 3)$$

$(n \geq 2)$

c_0 : on déterminé ; $c_1 = 0$; $c_2 = 0$

$c_3 = \frac{c_0}{3}$ $\qquad c_4 \qquad c_5$

$\qquad c_7 \qquad c_8$

$c_6 = \frac{c_3}{6} = \frac{c_0}{3 \times 6}$ $\qquad c_{3p+1} = 0 \qquad c_{3p+2} = 0$.

$c_9 = \frac{c_6}{9} = \frac{c_0}{3 \times 6 \times 9}$

$\vdots$

$$\boxed{c_{3n} = \frac{c_0}{3 \times 6 \times 9 \times \dots 3n} = \frac{c_0}{\underbrace{(3 \times 3 \times .)}_{3^n} \times \underbrace{(1 \times 2 \times 3 . \times n)}_{n!}} = \frac{c_0}{3^n n!}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) = c_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{3p}}{3^p p!}} \quad \text{avec } n = 3p \qquad = c_0 \sum \left(\frac{x^3}{3} \right.$$

$$\boxed{y(x) = c_0 \exp\left(\frac{x^3}{3}\right)}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad \text{pas de pts singulier.}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n C_n x^{n-1} \Rightarrow xy' = \sum_{0}^{\infty} n C_n x^n$$

$$y'' = \sum_{0}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} = \sum_{\underline{2}}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} = \sum_{\underline{0}}^{\infty} (n+1)(n+2) C_{n+2} x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[(n+1)(n+2) C_{n+2} - n C_n - C_n \right] = 0$$

$$\Rightarrow C_{n+2} = \frac{C_n}{n+2} \quad \text{récurrence 2} \Rightarrow \text{2 const indéterm}$$

$$C_2 = \frac{C_0}{2} \; ; \; C_4 = \frac{C_2}{4} = \frac{C_0}{2\times 4} \; ; \; C_6 = \frac{C_4}{6} = \frac{C_0}{2\times 4\times 6}$$

$$\Rightarrow C_{2n} = \frac{C_0}{2^n n!} \quad ; \quad y(0) = C_0 = 1$$

$$C_1 = 0 \text{ car } y'(0) = C_1 = 0 \Rightarrow C_{2n+1} = 0$$

d'où $\boxed{y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p p!} x^{2p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)}$$

---

3) $y'' + x^2 y' + xy = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 1$

pas de singularité.

$$y = \sum_{0} C_n x^n \Rightarrow xy = \sum_{0} C_n x^{n+1}$$

$$y' = \sum_{0} n C_n x^{n-1} \Rightarrow x^2 y' = \sum_{0} n C_n x^{n+1}$$

$$y'' = \sum_{0} n(n-1) C_n x^{n-2} = \sum_{\underline{-3}} (n+3)(n+2) C_{n+3} x^{n+1} = \sum_{\underline{-1}} (n+3)(n+2) C_{n+3} x^{n+1}$$

(nul pour $n = -2, -3$)

$$= \underset{\text{terme } n=-1}{2 C_2} + \sum_{0} (n+3)(n+2) x^{n+1} C_{n+3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{2 C_2}_{0} + \sum_{0}^{\infty} x^{n+1} \underbrace{\left[(n+3)(n+2) C_{n+3} + n C_n + C_n \right]}_{} = 0$$

$$C_{n+3} = - \frac{C_n \ (n+1)}{(n+2)(n+3)}.$$

↳ C_0, c_1, c_2

C_2 déjà

$\Rightarrow C_{3n+2}$

$y(0)=0 \Rightarrow C_0=0 \Rightarrow C_{3n}=0.$

$y'(0)=1 = C_1$

$\Rightarrow C_4 = -c_1 \dfrac{2}{3\times 4}$; $c_7 = -c_4 \cdot \dfrac{5}{6\times 7} = (-)^2 \dfrac{5\times 2}{3\times 4 \times}$

↑ manque pou

$\Rightarrow C_7 = \dfrac{2^2 \cdot 5^2}{7!}$

$$C_{3n+1} = (-)^n \frac{[2\times 5\times 7 \ldots \times(3n-1)]^2}{(3n+1)!} = (-)^n \frac{[(3n-1}{(3n+1}$$

$n>1$

$C_1=1$

avec $n!!!$

$=(n)(n-3)$

on saute

4) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$

pt singulier régulier (pôle de $q(x)$)
ordre 1

$y = \sum_0 c_n x^{n+r}$

$xy' = \sum_0 c_n (n+r) x^{n+r}$

$x^2y'' = \sum_0 c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \left[(n+r)(n+r-1) + 2(n+r) - 2 \right] = 0.$$

éq. indicielle $(n=0) \Rightarrow r(r-1) + 2(r) - 2 = 0 \Rightarrow$ $r=$

racines

pour $n>0$: impossible d'annuler le [ ] $\forall n>0$ pour $r=0$

$\Rightarrow c_n = 0 \quad \forall n>0$

$\Rightarrow$ solution $\boxed{y_1(x) = C_0 x}$

$r=-2$: le terme $n=3$ annule le [ ] $\Rightarrow C_3$ indéterminé. les

$\Rightarrow y = b x^{-2} + b x$

point singulier régulier en $x=0$

$y(x) = \sum_0 c_n x^{n+r}$; $xy = \sum_0 c_n x^{n+r+1} = \sum_1 c_{n-1} x$

$xy' = \sum_0 (r+n) c_n x^{n+r}$

$x^2 y'' = \sum_0 (r+n)(n+r-1) c_n x^{n+r}$

$\Rightarrow \sum_0 c_n \cdot x^{n+r}\left[2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1\right] + \sum_1 c_{n-1} x^{n+r} =$

↳ on sort le terme $n=0$

$c_0 x^r \left[2r(r-1) - r + 1\right] + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+r}\left[(2n+2r-1)(n+r-1) c_n + c_{n-1}\right] =$

éq. indicielle : $(2r-1)(r-1) c_0 x^r = 0 \Rightarrow r = 1 \; ; \; \frac{1}{2}$

* pour $r = \frac{1}{2}$:

$(2n+1-1)(n+\frac{1}{2}-1) c_n = -c_{n-1} \Rightarrow \boxed{c_n = -\frac{c_{n-1}}{n(2n-1)}}$

$\Rightarrow c_1 = -c_0 \; ; \; c_2 = \frac{c_0}{6} \; ; \; c_3 = -\frac{c_0}{90} \; ; \; c_4 =$

* pour $r = 1$

$(2n+1)(n) c_n = -c_{n-1} \Rightarrow \boxed{c_n = -\frac{c_{n-1}}{n(2n+1)}}$

$c_1 = -\frac{c_0}{3} \; ; \; c_2 = \frac{c_0}{30} \; ; \; c_3 = -\frac{c_0}{630} \; ; \; c_4 = \frac{c_0}{22680}$

$\Rightarrow \boxed{y = c_0 x\left(1 - \frac{1}{3}x + \frac{x^2}{60} - \frac{x^3}{630} \ldots\right) + b_0 x^{\frac{1}{2}}\left(1 - x + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{90} + \frac{x}{25\ldots}\right.}$

pt singulier régulier en 0

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$xy' = \sum_0 c_n (n+r) x^{n+r}$$

$$x^2y' = \sum_0 c_n (n+r) x^{n+r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} (n+r-1) x^{n+r}$$

$$x^2y'' = \sum_0 c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r}$$

$$\Rightarrow \sum_0 c_n x^{n+r} \Big[\underbrace{(n+r)(n+r-1) + (n+r) + 1}_{(n+r)^2+1} \Big] + \sum_1 c_{n-1} (n+r-1) x^{n+r} =$$

$$\downarrow$$

$$\sum_0 = [n=0] + \sum_1$$

$$\Rightarrow c_0 x^r (r^2+1) + \sum_1 x^{n+r} \left\{ [(n+r)^2+1] c_n + (n+r-1) c_{n-1} \right\} = 0.$$

éq. indicielle : $r^2+1=0 \Rightarrow r = \pm i$ complexes conjugués.

- Solution $r = i$

$$[(n+i)^2+1] c_n + (n+i-1) c_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow (n^2 + 2in) c_n + (n+i-1) c_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n = - \frac{(n+i-1)}{n(n+2i)} c_{n-1}}$$

c_0 indéterminé

$$c_1 = \frac{-i}{1+2i} c_0 \quad ; \quad c_2 = - \frac{1+i}{2(2+2i)} c_1 = \frac{i-1}{12i-4} c_0$$

$$c_3 = - \frac{-3+i}{4(21i-27)}$$

$$\Rightarrow y_1 = x^i \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

la relation de récurrence (en changeant $i \rightleftharpoons -i$) est

$$c'_n = -\frac{(n-i-1)}{n(n-2i)}\, c'_{n-1}$$

c_0 doit être ici le même que pour $r = i$: en effet, en

$$\begin{cases} y_1 = c_0\, x^{i} + \Sigma \ldots \\ y_2 = c_0'\, x^{-i} + \Sigma \ldots \end{cases} \Rightarrow y_1 + y_2 = \underbrace{c_0\, x^{i} + c_0\, x^{-i}} + \Sigma \ldots$$

réel si $c_0 = c_0'$ (on supp

ou $c_0 = \cancel{\pm}\, \overline{c_0'}$ (c_0 imag.

$$\Rightarrow c'_1 = \frac{i}{1-2i}\, c_0'$$

$$c'_2 = -\frac{1-i}{2(2-2i)}\, c'_1 = \frac{1+i}{12+4i}\, c_0'$$

$\Rightarrow$ les c'_n de y_2 sont complexes conjugués

On remarque que $c'_n = \pm\, \overline{c_n}$ suivant que $c_0' = \pm$

* forme de la solution complète:

2 possibilités pour c_0' $\Rightarrow$ 2 solutions

$\rightarrow$ si $c'_0 = c_0$: $\quad y = A(y_1 + y_2) = A \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^{n+i} + \overline{c_n}\, x^{n-i}$

$$\Rightarrow y = A \sum x^n \cdot 2\,\mathrm{Re}\left[c_n\, x^{i}\right]$$

$$x^{i} = e^{i \ln(x)} = \cos(\ln(x)) + i \sin$$

$$c_n = |c_n|\, e^{i\varphi_n}$$

$$\Rightarrow c_n\, x^{i} = |c_n|\, e^{i[\ln(x) + \varphi_n]}$$

$$= |c_n| \cos(\ln(x) + \varphi_n) + i \sin$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1 = 2A \sum x^n\, |c_n| \cos[\ln(x) + \varphi_n]} \qquad \varphi_n = \arg($$

A réel

* voir au dos pour le cas $\mathrm{Re} = 0$ seul :

$$y = B(y_1 + y_2) = B \sum \underbrace{c_n x^{n+i} + \bar{c}_n x^{n-i}}_{2i \, \mathrm{Im}[\quad]} \qquad \Rightarrow iB = B'$$

$$\boxed{y_2 = 2B' \sum_{n=0}^{\infty} x^n |c_n| \sin[\ln(x) + \varphi_n].}$$

* Premiers termes

si $c'_0 = c_0$:

$$y_1 = x^i \left(c_0 - \frac{i}{1+2i} c_0 x + \frac{i-1}{12i-4} c_0 x^2 + \dots \right)$$

$$+ x^{-i} \left(c_0 + \frac{i}{1-2i} c_0 x + \frac{-1-i}{-12i-4} c_0 x^2 + \dots \right)$$

$$= c_0 (x^i + x^{-i}) + c_0 x \left(\frac{-i}{1+2i} x^i + \frac{i}{1-2i} x^{-i} + \dots \right)$$

$$= 2c_0 \cos(\ln(x)) + 2c_0 x \Big[\underbrace{\left| \frac{-i}{1+2i} \right|}_{\frac{1}{5}} \cos\big(\ln(x) + \underbrace{\arg\big(}_{-\arctan}$$

si $c'_0 = -c_0$:

$$y_1 = 2b_0 \sin(\ln(x)) + \frac{2b_0}{5} x \sin\left[\ln(x) + \arctan \frac{1}{2}\right].$$

---

7) $xy'' + y' + 2y = 0$

$$y = \sum_0 c_n x^{n+r} \qquad \sum_1 c_{n-1} x^{n+r-1}$$

$$y' = \sum_0 c_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$xy'' = \sum_0 c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} =$$

$$\Rightarrow \sum_0 c_n x^{n+r-1} \big[(n+r-1)(n+r) + (n+r) \big] + 2\sum_1 c_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

on extrait $n=0$

$$\underbrace{c_0 x^{r-1} r^2}_{} + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+r-1} \left[(n+r)^2 c_n + 2c_{n-1} \right] = 0.$$

$$y_1 = x^0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$ vraie série Taylor

avec : $[\quad]=0 \;=\; n^2 c_n + 2 c_{n-1} \qquad (n \geq 1)$

$$\Rightarrow \boxed{c_n = -\frac{2}{n^2} c_{n-1}}$$ rel° de récurren[ce]

gives : $c_n = \dfrac{(-1)^n 2^n}{(n!)^2} c_0 \qquad n \geq 1.$ marche aussi p[our n = 0]

$$\Rightarrow \boxed{y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n 2^n}{(n!)^2} x^n}$$

* 2^e solution

$$y_2 = y_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$\Rightarrow y_2' = y_1' \ln(x) + \frac{y_1}{x} + \sum_0 n b_n x^{n-1}$$

$$y_2'' = y_1'' \ln(x) + \frac{y_1'}{x} + \frac{y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_0 n(n-1) b_n x^{n-2}$$

après arrangement des termes dans l'E.D. on a

$$x\left(\cancel{y_1'' \ln(x)} + \frac{2y_1'}{x} - \cancel{\frac{y_1}{x^2}}\right) + \left(\cancel{y_1' \ln(x)} + \cancel{\frac{y_1}{x}}\right) + \cancel{2y_1 \ln(x)} + \sum_1 (n^2 b_n + 2b_{n-1})$$

se simplifie car y1 est solution de l'ED.

$$\Rightarrow 2y_1' + \sum_1 (n^2 b_n + 2 b_{n-1}) x^{n-1} = 0$$

utilisant la série de y_1 : $y_1' = \sum_{0 \to 1} \dfrac{(-2)^n}{(n!)^2} n\, x^{n-1}$ idem

d'où la récurrence en identifiant les puissances x^{n-1} :

$$\boxed{\frac{2(-2)^n n}{(n!)^2} + n^2 b_n + 2 b_{n-1} = 0}$$ relation de récurrence

$$\begin{cases} b_2 = -3 + b_0 \\ b_3 = \frac{22}{27} - \frac{2}{9} b_0 \end{cases} \quad \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{y_2(x) = y_1 \ln(x) + \sum_{0}^{\infty} c_n x^n = y_1 \ln(x) + b_0 + (4 - 2b_0)x + (-3 + b_0}$$

8) $xy'' = y$

Indicial Roots Differ by a Positive Integer
The ODE

$$xy'' - y = 0$$

has a regular singular point at zero. The indicial polynomial has roots $r_1 = 1$ and $r_2 = 0$. The equation has a Frobenius series solution of the form

$$y_1 = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}, \qquad a_0 \neq 0$$

Find the a_n's by the Method of Power Series with $a_0 = 1$: $a_n = 1/((n+1)!n!)$. So

$$y_1 = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!n!} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \cdots$$

From Theorem 1, a second solution has the form

$$y_2 = \alpha y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \qquad d_0 = 1, \qquad x > 0 \tag{4}$$

Insert the expression for y_2 into the ODE $xy_2'' - y_2 = 0$. Since $xy_1'' - y_1 = 0$:

$$\alpha(xy_1'' - y_1)\ln x + \alpha\left(2y_1' - \frac{y_1}{x}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}[n(n+1)d_{n+1} - d_n]x^n$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)!n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}[n(n+1)d_{n+1} - d_n]x^n$$

The recursion relation is

$$n(n+1)d_{n+1} - d_n = \frac{-\alpha(2n+1)}{(n+1)!n!}$$

For $n = 0, 1, 2$, the recursion relation reduces to

$$-d_0 = -\alpha, \qquad 2d_2 - d_1 = \frac{-3\alpha}{2}, \qquad 6d_3 - d_2 = \frac{-5\alpha}{12}$$

Since $d_0 = 1$ is already built into Step 5, $\alpha = 1$. Thus,

$$\alpha = d_0 = 1, \qquad d_2 = d_1/2 - 3/4, \qquad d_3 = d_1/12 - 7/36$$

Let $d_1 = 0$ (or any other convenient value) and use the recursion to determine d_n, $n = 2, 3, \ldots$. Use formula (4) for $y_2(x)$ with $\alpha = 1$, $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = -3/4$, $d_3 = -7/36$. Use recursion for d_n, $n \geq 4$. Then

$$y_2 = y_1 \ln x + 1 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{36}x^3 + \cdots$$

is a second solution independent of y_1.

Although α is not zero in formula (4) of Example 2, it can be zero. for another ODE. Then, the second solution is a power series, and there is no logarithmic term.

Partiel 1 : Equations différentielles

Durée 1h30

1

On considère l'équation différentielle suivante

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{1}$$

1. Cherchez une solution de la forme $y_1(x) = x^r$ avec r réel, valable pour tout x.
2. On va chercher la deuxième solution de base y_2 de cette équation du second ordre en utilisant la méthode du Wronskien. Calculez le Wronskien de l'équation (1)
3. En déduire l'équation différentielle du 1er ordre à laquelle satisfait y_2.
4. La résoudre pour trouver y_2. [1]

2 Equation de Hermite

L'équation différentielle de Hermite est

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{2}$$

avec $n \in \mathbb{N}$

1. On se place dans le cas où $n = 0$. Chercher la solution de l'équation (on pourra utiliser la fonction $\mathrm{erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int^x e^{t^2} dt$, la notation $\int^x$ désigne la primitive). A quelle condition la solution ne diverge pas à l'infini ?
2. n est maintenant un entier quelconque. Chercher une solution à l'équation (2) sous la forme d'un développement en série :
$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p x^p$$
et donner la relation de récurrence entre les coefficients.
3. Montrer qu'il y a deux solutions : $y_0(x)$ paire qui dépend du coefficient c_0 et $y_1(x)$ impaire qui dépend de c_1 (on ne demande pas de faire le calcul explicite des coefficients de ces séries). Est-ce que ces solutions vous semblent indépendantes (et pourquoi) ?
4. Dans le cas où n est pair, montrer que la solution paire y_0 est un polynôme de degré n (c'est à dire que tous les coefficients c_p avec $p > n$ sont nuls). C'est le polynôme d'Hermite $H_n(x)$.
5. Lorsque n est impair, a-t-on aussi une solution polynomiale de type $H_n(x)$?
6. Donner explicitement les expressions des premiers polynômes de Hermite : $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$ (prendre $c_0 = 1$ et $c_1 = 2$). *NB : dans la littérature on pourra trouver des polynômes proportionnels à ceux que vous obtenez ici, pour des raisons liées à la normalisation.*
7. On définit la fonction de Weber-Hermite d'ordre n par
$$u_n(x) = H_n(x) \exp(-\frac{x^2}{2})$$
Trouver l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait $u_n(x)$.
8. Application : l'équation de Schrodinger de l'oscillateur harmonique à une dimension s'écrit
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - \frac{1}{2}Cx^2)\psi = 0$$
avec E l'énergie, m la masse, C et $\hbar$ des constantes positives. Montrer qu'un changement de variable de type $x = aX$ permet de ramener cette équation à celle de u_n. Donner la forme des solutions $\psi_n(x)$ et l'énergie E_n correspondante.

[1] On rappelle qu'une fraction du type $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$ se met sous la forme $\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$ et que pour trouver A il suffit de multiplier par $(x - a)$ et de faire tendre x vers a. Idem pour B : c'est la méthode de décomposition en éléments simples.

Partiel Math 1

I - $(1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + 2y = 0$

1) Recherche solution $y_1 = x^r$

$$\Rightarrow (1-x^2)\,r(r-1)\,x^{r-2} - 2r\,x^r + 2x^r = 0$$

$$\Rightarrow r(r-1)\,x^{r-2} - x^r\,[r(r-1) + 2r - 2] = 0 \qquad \times x^{-r}$$

$$\Rightarrow r(r-1)\,x^{-2} = r(r-1) + 2r - 2$$

$$= (r-1)(r+2)$$

fonctionne $\forall x$ si $r = 1$

$$\Rightarrow \boxed{y_1(x) = x}$$

2) Wronskien

éq. de type $a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x) = 0$

Th. de Liouville : $W = \exp - \int \frac{b}{a}\,dx$

$$\Rightarrow \ln W = + \int \frac{+2x}{1-x^2}\,dx$$

forme $\frac{u'}{u}$ → primitive : $\ln u$

$$= \ln\left[-\frac{1}{1-x^2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{W_0}{x^2-1}} \qquad (W_0 = 1) \text{ arbitraire}$$

3) Equa dif de y_2

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \frac{1}{x^2-1} \qquad y_1 = x \;;\; y_1' = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x\,y_2' - y_2 = \frac{1}{x^2-1}}$$

4) Éq. sans 2

4) Éq. sans 2e membre : $x\,y_2' - y_2 = 0 \Rightarrow \frac{y_2'}{y_2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{y_2 = K \cdot x}$

* variation cste :

$$\tilde{y}_2 = K(x)\, x \Rightarrow y_2' = K' \cdot x + K$$

$$\Rightarrow \quad x\,(K'x + K) - Kx = \frac{1}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \quad K'\, x^2 = \frac{1}{x^2-1} \Rightarrow K' = \frac{1}{x^2(x^2-1)}$$

$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2-1}$$

décomp. de $\frac{1}{x^2-1}$ en élém. simples :

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\times (x-1) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\times (x+1) \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \cancel{\text{cte}}$$

← inutile pour 1 sol particul.

$$\Rightarrow \quad \tilde{y}_2 = 1 + \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

* sol complète :

$$\boxed{y_2 = Kx + 1 + \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

II - Equation de Hermite

$$y'' - 2x\, y' + 2n\, y = 0$$

1) Cas $n = 0$

$$y'' - 2x\, y' = 0 \qquad \text{On pose } v = y'$$

$$\Rightarrow \quad v' - 2x\, v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v'}{v} = 2x$$

$$\Rightarrow \quad \ln v = x^2 + cte \quad \Rightarrow \quad v = cte\; e^{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y = cte \int e^{x^2} dx + c_2$$

$$= \underbrace{cte \sqrt{\frac{\pi}{2}}}_{c_1}\, \mathrm{erfi}(x) + c_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = c_1\, \mathrm{erfi}(x) + c_2}$$

y diverge à l'∞ sauf si $c_1 = 0$

2) n entier quelconque > 0

l'équation n'a pas de pt. singulier $\Rightarrow$ série simple

$$y = \sum_{p=0}^{\infty} c_p\, x^p$$

$$\Rightarrow \quad x\, y' = \sum_{p=0}^{\infty} p\, c_p\, x^p$$

$$\Rightarrow \quad y'' = \sum_0 p(p-1)\, c_p\, x^{p-2} = \sum_2 p(p-1)\, c_p\, x^{p-2}$$

$$= \sum_0 (p+1)(p+2)\, c_{p+2}\, x^p$$

$$\Rightarrow \quad \sum_0 (p+1)(p+2)\, c_{p+2}\, x^p - 2p\, c_p\, x^p + 2n\, c_p\, x^p$$

$$\Rightarrow \quad (p+1)(p+2)\, c_{p+2} + 2(n-p)\, c_p = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_{p+2} = -\frac{2c_p(n-p)}{(p+1)(p+2)}}$$

3) 2 séries solutions

$$c_2 = -\frac{2c_0 n}{2} = -n\,c_0$$

c_0 indéterminé

c_1 indéterminé

$$c_3 = -\frac{2c_1(n-1)}{3\times 2} = -\frac{(n-1)}{3}c_1$$

$$c_4 = -\frac{2c_2(n-2)}{3\times 4} = \frac{2n(n-2)}{3\times 4}c_0$$

$$c_5 = -\frac{2c_3(n-3)}{4\times 5} = \frac{2(n-1)(n-3)}{3\times 4\times 5}c_1$$

etc ... $\Rightarrow$ les c_{2k} dependent de c_0

c_{2k+1} —— de c_1

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\,x^{2k} \\ y_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}\,x^{2k+1} \end{aligned}}$$

y_1 et y_0 indep si l'une n'est pas proportionnelle à l'autre. comme elles sont de parité $\neq$, elles sont indep (car une fn paire $\times$ cste reste paire et une fn impaire $\times$ cste reste impaire).

4) Cas n pair

Solution paire $y_0(x) = \sum_{p \text{ pair}} c_p x^p$

$$c_{p+2} \propto c_p$$

Si $p = n$: $c_{p+2} = - \dfrac{2 c_p \overbrace{(n-n)}^{=0}}{(n+1)(n+2)}$

$\Rightarrow c_{n+2} = 0 \Rightarrow c_{n+4} \propto c_{n+2} = 0$

$\Rightarrow \forall\ p$ pair $> n$: $c_p = 0$

le dernier coef non nul est c_n

$\Rightarrow y_0$ est un polynôme de degré n.

5) Cas n impair

même raisonnement $\Rightarrow y_1$ est un polynôme de d° n.

6) Premiers polynômes de Hermite

$H_0(x) = c_0 = 1$ (polynome de d° 0). $c_2 = 0$ dans ce cas.

$H_1(x) = c_1 x = 2x$

$H_2(x) = -2x^2 + 1$

$H_3(x) = -\frac{4}{3} x^3 + 2x$.

7) Fonctions de Weber-Hermite

$$u_n(x) = H_n(x)\, e^{-x^2/2}$$

$\Rightarrow u_n'(x) = H_n' e^{-\frac{x^2}{2}} - x H_n e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} [H_n' - x H_n]$

$\Rightarrow u_n'' = e^{-\frac{x^2}{2}} [H_n'' - H_n - x H_n'] - x e^{-\frac{x^2}{2}} [H_n' - x H_n]$

$= e^{-\frac{x^2}{2}} [H_n'' - H_n - 2x H_n' + x^2 H_n]$

or : $H_n'' - 2x H_n' + \underbrace{2n}_{} H_n = 0$ (éq de Hermite)

terme qui manque : on l'ajoute et on le retranche

$$\Rightarrow u_n'' = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\underbrace{H_n'' - 2x H_n + 2n H_n}_{0} - 2n H_n - H_n + x^2 H_n\right]$$ (6

$$= H_n e^{-\frac{x^2}{2}}\left[-2n-1+x^2\right] = u_n\left(x^2-2n-1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n'' + u_n\left(2n+1-x^2\right) = 0}$$

9) Equation de Schrodinger.

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}Cx^2\right) = 0$$

$x = aX$; $\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dX}\cdot\frac{dX}{dx} = \frac{1}{a}\frac{d\psi}{dX}$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \frac{1}{a}\frac{d}{dX}\left(\frac{1}{a}\frac{d\psi}{dX}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{d^2\psi}{dX^2}$$

d'où : $\frac{1}{a^2}\frac{d^2\psi}{dX^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{mC}{\hbar^2}x^2\right)\psi = 0$

$$\Rightarrow \psi'' + \left(\frac{2a^2E}{\hbar^2} - \frac{mCa^4}{\hbar^2}X^2\right)\psi = 0$$

$$u_n'' + \left(2n+1 - X^2\right)u_n = 0$$

s'identifie à l'éq. de U_n si $\frac{mCa^4}{\hbar^2} = 1$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{mC}}$$

et si $\frac{2a^2E}{\hbar^2} = 2n+1$

$$\Rightarrow \boxed{E = (2n+1)\frac{\hbar^2}{2a^2} = \frac{(2n+1)\hbar\sqrt{mC}}{2m}}$$

quantification de l'énergie.

Il vient : $\psi(X) = U_n(X) = U_n\left(\frac{x}{a}\right)$ fonction d'onde associée au nbre n

$$\Rightarrow \psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}} H_n\left(\frac{x}{a}\right) = \exp-\left(\frac{x^2\sqrt{mC}}{2\hbar}\right) H_n\left(\frac{x\sqrt{mC}}{\hbar}\right)$$

Math Exercices

Legendre polynomials and spherical harmonics

1 Variations about Legendre polynomials

1. Show that
$$\int_{-1}^{1} P_n(t)\,(1+h^2-2ht)^{-1/2}\,dt = \frac{2h^n}{2n+1}$$
where $h<1$.
2. Using Rodrigues Formula, establish the recurrence relation
$$P'_{n+1}(x) = P'_{n-1}(x) + (2n+1)P_n(x)$$
3. Expand the function $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ as a series in Legendre polynomials for $-1<x<1$. Hint : use the identity
$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx = (-)^n \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

2 Multipole expansion

1. A point charge q is located at the position $(0,0,z_0)$. Write down the electric potential $V(r,\theta)$ at a point of polar coordinates (r,θ) using Coulomb's law. Expand V as a series of Legendre polynomials for $r>|z_0|$, and give the three first terms of the developpement.
2. Same question if we add a second charge $-q$ at the position $-z_0$. Show that the asymptotic potential is $\propto 1/r^2$ (dipolar potential).
3. How would be modified the multipole expansion of $r<|z_0|$? Express the potential of the two charges of question 2 near the origin and give the leading term of the series.
4. Write down the multipole expansion as a series in spherical harmonics in the case of 4 charges q_i located at positions $\vec{r}_i$ with : $q_1 = q_3 = q$, $q_2 = q_4 = -q$, $\vec{r}_1 = (a,0,0) = -\vec{r}_2$, $\vec{r}_3 = (0,a,0) = -\vec{r}_4$ $(a>0)$. Give the first term of the series.

3 Conducting sphere with hemispheres at different potentials

We consider a conducting sphere of radius a made up of two hemispheres separated by a small insulating ring. The northern hemisphere is kept at fixed potential $+V_0$ ($-V_0$ for the southern hemisphere).

1. Determine the electric potential in the region $r>a$ as a series in Legendre polynomials P_l. Write down the terms up to $l=4$.
2. Same question inside the sphere ($r<a$). Verify that the two series give the same result at $r=a$.

Feuille 6 - Polynomes de Legendre

I - Variations about P_ℓ.

1) $I = \int_{-1}^{1} P_n(t) . [1 - 2ht + h^2]^{-1/2} \, dt = ?$

$\varphi(t)$ = generating function of P_ℓ^m

on a par définition $\varphi(t) = \sum_\ell r^\ell P_\ell(t)$

d'où $I = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^\ell \underbrace{\int_{-1}^{1} P_n(t) . P_\ell(t) \, dt}_{\frac{2}{2n+1} \delta_{\ell n}} = \frac{2r^n}{2n+1}$

2) $P_{n+1}' = (2n+1) P_n + P_{n-1}'$

$$P_{n+1}'(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} \left[(x^2-1)^{n+1} \right]$$

$$= \frac{2(n+1)}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[x (x^2-1)^n \right]$$

va donner P_{n-1}

$$= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^n + 2 \underset{\substack{\uparrow \\ (-1+1)}}{x^2} n (x^2-1)^{n-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^n + 2n \underbrace{(x^2-1)(x^2-1)^{n-1}}_{(x^2-1)^n} + 2n (x^2-1)^{n-1} \right]$$

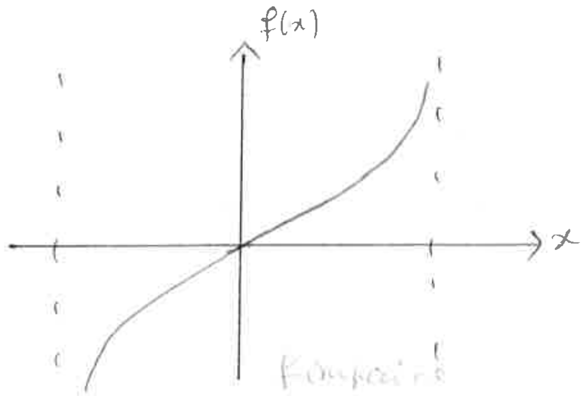
$$= (2n+1) P_n(x) + \frac{2n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^{n-1} \right]$$

$$= (2n+1) P_n(x) + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{d}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^{n-1}$$

$$= \boxed{(2n+1) P_n(x) + P_{n-1}'(x)}$$

3) Développement de $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

fn impaire, singularités en ± 1



f impaire ⇒ seuls n impairs $\neq 0$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$C_n = \langle f, P_n \rangle = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx$$

$$= \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f(x) \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \, dx$$

identité : $\int_{-1}^{1} f(x) \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \, dx$

$$= (-)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^n f}{dx^n}\, dx$$

(vient d'une IPP n fois avec un terme tout intégré nul).

-1 si n impair

$$\Rightarrow C_n = \boxed{(-)^n} \cdot \frac{2n+1}{2^{n+1} n!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx.$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right] = \frac{(-)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

et $(x^2-1)^n = (x+1)^n (x-1)^n = -(1+x)^n (1-x)^n$ si n impair

$$\Rightarrow C_n = \frac{(2n+1)(n-1)!}{2^{n+1} n!} \int_{-1}^{1} (-)^{n-1}(1-x)^n + (1+x)^n \, dx$$

$$= \frac{(2n+1)}{2^{n+1} n} \left\{ \left[(-)^n \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^{1} + \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^{1} \right\}$$

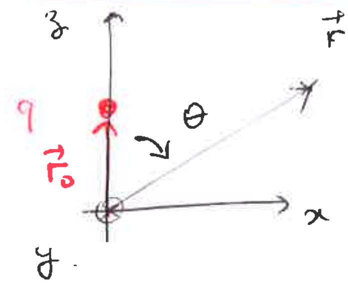
$-$ car n impair

$$= \frac{(2n+1)}{2^{n+1} n} \left(\frac{2^{n+1}}{n+1} + \frac{2^{n+1}}{n+1} \right) = \boxed{\frac{2(2n+1)}{n(n+1)}}$$ n impair

$$\Rightarrow C_1 = 3, \quad C_3 = \frac{5}{3}$$

II- Multipole expansion

1) charge à $\vec{r_0} = (0, 0, z_0)$.

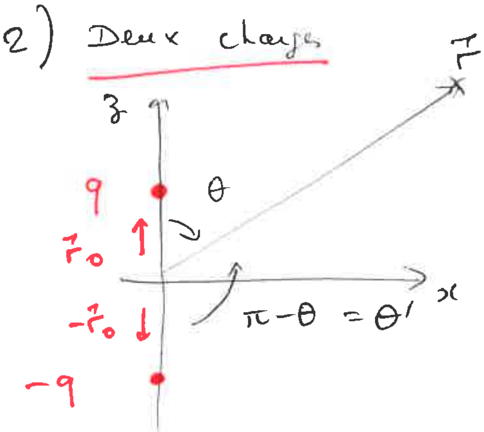


$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r_0}|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta).$$

1^{er} terme : $n = 0$: $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

ensuite $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{z_0}{r} \cdot \cos\theta + \frac{z_0^2}{2r^2}(3\cos^2\theta - 1) + \dots\right)$.

2) Deux charges



$V_T(\vec{r}) = V_1 + V_2$.

V_1 déjà calculé.

→ pour V_2.

- angle entre $-\vec{r_0}$ et $\vec{r} = \pi - \theta$.

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$.

- $q \rightleftarrows -q$.

$$\Rightarrow \quad V_2(\vec{r}) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum_0 \left(\frac{z_0}{r}\right)^n P_n(-\cos\theta)$$

$$= -\frac{(-)^n}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum_0 \left(\frac{z_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

$$V_1 + V_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum_{n \text{ impair}} \left(\frac{z_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{z_0}{r}\cos\theta + o\left(\frac{1}{r^3}\right)\right)$$

$$= \frac{2qz_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \dots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} + \dots \quad \text{avec } \vec{p} = q(2\vec{r_0})$$

potentiel dipolaire.

3) Potentiel à $|\vec r| < z_0$

→ développement multipolaire si $r < z_0$:

$$\frac{1}{|\vec r - \vec r_0|} = r_0 \left[1 - 2\frac{\vec r \cdot \vec r_0}{r_0^2} + \frac{r^2}{r_0^2}\right]^{-1/2} = r_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad V(\vec r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^n} P_n(\cos\theta).$$

ce qui change : r est à la $\wedge n$ au lieu de $-n$

dans ce cas : développement proche de l'origine $r=0$
dans le 1er : développement lointain (asymptotique).

$$\Rightarrow \quad V_1 + V_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 z_0} \sum_{n \text{ impair}} \left(\frac{r}{z_0}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad \text{pour } r < z_0$$

$$= \underbrace{\frac{q\, r}{2\pi\varepsilon_0 z_0^2}}_{\text{terme dipolaire}} + \underbrace{\frac{q\, r^3}{2\pi\varepsilon_0 z_0^4}}_{\text{terme octupolaire}} \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) + \dots$$

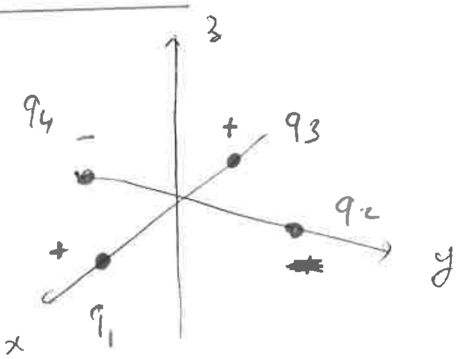
• what at $r = z_0$?

$$V_{ext} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 z_0} \sum_{n \text{ impair}} P_n(\cos\theta)$$

$$V_{int} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 z_0} \sum_{\text{impair}} P_n(\cos\theta)$$

} ok

4) 4 charges.



$q_1 = q_3 = q$; $q_2 = q_4 = -q$.

$\vec r_1 = \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\vec r_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{vmatrix}$ $\vec r_3 = \begin{vmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\vec r_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{vmatrix}$

pas à sym. de révolution.

$$\Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell} \sum_{m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}} Y_\ell^m(\theta,\varphi)\, \overline{Y_\ell^m}(\theta',\varphi')$$

$r_< = a$; $r_> = r$

4 V : V_1, V_2, V_3, V_4.

$q_1 \to V_1$: $\theta' = \frac{\pi}{2}$, $\varphi' = 0$

$$\Rightarrow \quad Y_\ell^m\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\; P_\ell^m(0). \qquad \text{réel.}$$

↳ nul si $\ell+m$ impair

$q_3 \to V_3$: $\theta' = \frac{\pi}{2}$; $\varphi' = \pi$

$$\Rightarrow \quad Y_\ell^m\left(\tfrac{\pi}{2}, \pi\right) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\; (-)^m P_\ell^m(0)$$

$$\Rightarrow \quad V_1 + V_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_\ell \sum_m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \frac{a^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell^m(0)\, P_\ell^m(\cos\theta) \,[1 + (-)^m]$$

↑ nul si m impair

$\Rightarrow$ ℓ et m pairs

$$\Rightarrow \quad V_1 + V_3 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell\,\text{pair}} \sum_{m\,\text{pair}} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \frac{a^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell^m(0)\, P_\ell^m(\cos\theta)$$

$q_2 \to V_2$: $\theta' = \frac{\pi}{2}$; $\varphi' = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad Y_\ell^m\left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\; P_\ell^m(0)\, i^m$$

$q_4 \to V_4$ $\quad \theta' = \frac{\pi}{2}$, $\varphi' = -\frac{\pi}{2}$

$$\to \quad Y_\ell^m\left(\tfrac{\pi}{2}, -\tfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\; P_\ell^m(0)\, (-)^m i^m.$$

$$\Rightarrow \quad V_2 + V_4 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_\ell \sum_m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \frac{a^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell^m(0) \left[i^m + (-)^m i^m \right]$$

↑ nul si m impair

$\Rightarrow$ ℓ et m pairs

$$= -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \sum_\ell \sum_m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \frac{a^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell^m(0)\, (-)^{m/2}\, P_\ell^m(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \sum_\ell \sum_m \frac{a^\ell}{r^{\ell+1}} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(0) \left[1 - (-)^{m/2}\right] P_\ell^m(\cos\theta)$$

↑ nul si $\frac{m}{2}$ pair

$\Rightarrow$ $\frac{m}{2}$ impair

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{q}{\pi \varepsilon_0} \sum_{l \text{ pair}} \sum_{\substack{\frac{m}{2} \text{ impair} \\ m \text{ pair}}} \frac{a^l}{r^{l+1}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(0) \, P_l^m(\cos\theta)}$$

1er terme non nul :

$l = 0 \rightarrow$ non car $\frac{m}{2}$ pair

$l = 2 \rightarrow$ non plus

$l = 4 \rightarrow$ Ok pour $m = \pm 2$

$$P_4^2 = \frac{15}{2}(7x^2 - 1)(1 - x^2) \quad ; \quad P_4^2(0) = -\frac{15}{2}$$

$$P_l^{-m} = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m \Rightarrow P_4^{-2} = \frac{2!}{6!} P_4^2$$

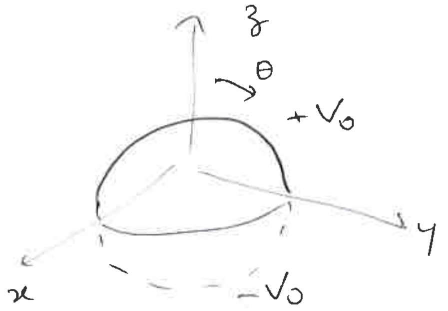
$$\Rightarrow V \simeq \frac{q}{\pi \varepsilon_0} \frac{a^4}{r^5} \left[\frac{2!}{6!} P_4^2(0) \, P_4^2(\cos\theta) + \underbrace{\frac{6!}{2!} P_4^{-2}(0) \, P_4^{-2}(\cos\theta)}_{\frac{6!}{2!} \left(\frac{2!}{6!}\right)^2 P_4^2(0) \, P_4^2(\cos\theta)} \right]$$

$$\boxed{V \simeq -\frac{2 q a^4}{\pi \varepsilon_0 r^5} \cdot \frac{1}{360} \left[\frac{15}{2} P_4^2(\cos\theta) \right] = \underbrace{-\frac{q a^4}{24 \pi \varepsilon_0 r^5}}_{\text{décroissance en } \frac{1}{r^5}} P_4^2(\cos\theta)}$$

(1)

III - Sphère à 2 hémisphères.

1) $r > a$



$$\begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} & : +V_0 \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi & : -V_0 \end{cases} \quad \text{pour } r = a.$$

ailleurs : V solution de $\Delta V = 0$
donc de la forme :

$$V(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_l^m(\theta,\varphi)$$

avec les $A_{lm} = 0$ pour éviter de diverger au loin.

et $m = 0$ car la boule est indep. φ

$$\Rightarrow Y_l^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\theta).$$

$$\Rightarrow V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta).$$

on prédit aussi que P_l doit être impair vu la symétrie

avec $$\frac{B_{l\cancel{m}}}{r^{l+1}} = \iint_{\text{sphère}} V(r,\theta,\varphi)\, Y_l^0(\theta,\varphi) \,.\, \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

On connaît V en $r = a$ (condition aux bords de Dirichlet).

$$\Rightarrow B_l = a^{l+1} \,.\, 2\pi \,.\, \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_{\theta=0}^{2\pi} V(a) \,.\, P_l(\cos\theta) \,.\, \sin\theta \, d\theta$$

$$\begin{array}{llll} 0 \leq & & < \frac{\pi}{2} & V = V_0 \\ \frac{\pi}{2} < & \theta & < \pi & V = -V_0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $1 \geq \cos\theta > 0$: $V = +V_0$; $\cos\theta < 0$ $V = -V_0$

$$= a^{l+1}\, 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_1^{-1} V(a) \,.\, P_l(u)\, du$$

$$= a^{l+1}\, 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \,.\, \Big[\underbrace{\int_1^0 V_0 P_l(u)\, du + \int_0^{-1} - V_0 P_l(u)\, du}_{\text{nul si } l \text{ pair}} \Big]$$

$$\Rightarrow \quad B_\ell = -a^{\ell+1}\, 2\pi \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \cdot 2V_0 \left[\int_0^1 P_\ell(u)\, du \right].$$

récurrence : $P_\ell = \frac{1}{2\ell+1}\left[P_{\ell+1}' - P_{\ell-1}' \right]$

$$\Rightarrow \quad \int P_\ell\, du = \frac{1}{2\ell+1}\left(P_{\ell+1} - P_{\ell-1} \right) + \text{cte}.$$

$$\Rightarrow \quad B_\ell = -4\pi a^{\ell+1} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, V_0 \left[P_{\ell+1} - P_{\ell-1} \right]_0^1$$

nul pour $u=1$ $(P_n(1)=1)$

$$\Rightarrow \quad B_\ell = \frac{4\pi a^{\ell+1}}{2\ell+1} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, V_0 \left(P_{\ell+1}(0) - P_{\ell-1}(0) \right)$$

$$\Rightarrow V(r,\theta) = \sum_{\ell \text{ impair}} \frac{4\pi}{2\ell+1} a^{\ell+1} V_0 \cdot \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{P_{\ell+1}(0) - P_{\ell-1}(0)}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta).$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V(r,\theta) = V_0 \sum_{\ell = \text{impair}} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} \left(P_{\ell+1}(0) - P_{\ell-1}(0) \right) P_\ell(\cos\theta)}$$

1^{ers} termes : $\ell = 1$ et $\ell = 3$.

$P_0(0) = 1$; $P_2(0) = -\frac{1}{2}$; $P_4(0) = \frac{3}{8}$.

$\ell = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\theta$

$\ell = 3 \rightarrow \left(\frac{a}{r}\right)^4 \cdot \frac{7}{8}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V(r,\theta) \simeq \frac{V_0}{2} \left(\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos\theta + \frac{7}{4} \left(\frac{a}{r}\right)^4 P_3(\cos\theta) \right)}$$

2) $r < a$

même raisonnement mais en changeant $\frac{B}{a^{\ell+1}}$ en $A \cdot a^\ell$

avec ici $B_{\ell m} = 0$.

on obtient : $A_\ell = \frac{1}{a^\ell} V_0 \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \left(P_{\ell+1}(0) - P_{\ell-1}(0) \right)$

et le potentiel : $\boxed{V = V_0 \sum_{\ell \text{ impair}} \left(\frac{r}{a}\right)^\ell \left(P_{\ell+1}(0) - P_{\ell-1}(0) \right) P_\ell(\cos\theta)}$

Math Exercices

Bessel functions

1 Miscellaneous exercices

1. Take the Fourier transform of Bessel differential equation for $\nu = 0$ and calculate the Fourier transform of $J_0(x)$. We recall that TF $[y'(x)] = 2i\pi\nu\hat{f}(\nu)$ and TF $[x.y(x)] = -\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{d\nu}\hat{f}(\nu)$

   answer : $\hat{J}_0(\nu) = \dfrac{2}{\sqrt{1-4\pi^2\nu^2}}\Pi(\pi\nu)$

2. Calculate the integral
$$\int_0^\infty J_n(x)\,dx$$
for $n \in \mathbb{N}$. Hint : proceed for $n = 0$ (use the result of the previous exercice) and $n = 1$ then generalise for any n.
3. Calculate the Hankel transform of $\delta(r) + \delta(r-a)$ with $a > 0$ (in optics this is the amplitude diffracted by a point-source and a circular ring of radius a).

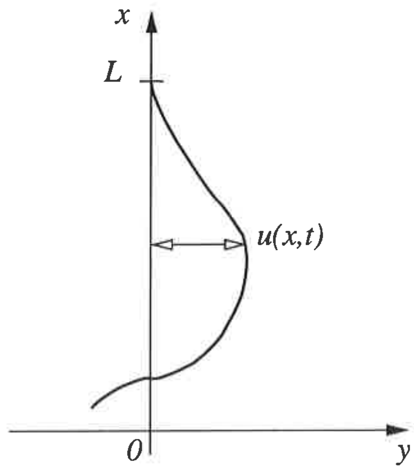
2 Orthogonality of J_ν

We consider the following scalar product defined for 2 functions u and v over the interval $[0, 1]$ with $u(1) = v(1) = 0$:
$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 x\,u(x)\,v(x)\,dx$$
We set $u(x) = J_\nu(\alpha_n x)$ and $v(x) = J_\nu(\alpha_p x)$ with α_n and α_p the n-th and p-th zero of J_ν. We will prove that the scalar product $\langle u, v\rangle = 0$, hence that the functions are orthogonal.

1. Using the variable change $x = \alpha_n X$, write down the differential equation for $u(X)$. Same for $v(X)$.
2. Combine the results above to obtain a differential equation in which appears the product $u(X)v(X)X$.
3. Integrate this equation and show that $\langle J_\nu(\alpha_n x), J_\nu(\alpha_p x)\rangle = 0$

3 The hanging chain

We consider a chain of mass m suspended at its upper end. We denote as L the length of the chain and assume that its mass density is uniform. At equilibrium, the chain is vertical. When disturbed it oscillate from side to side : these oscillations are described by a function $u(x,t)$. x is the vertical coordinate measured upwards. For small oscillations, the equation for $u(x,t)$ expresses as
$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}$$



1. Search for solutions of the form $u(x,t) = T(x).F(x)$
2. Show that F is solution of a Bessel equation
3. Show that the general form of the solution is
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\,J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\,\sin(\omega_k t + \phi_k)$$
where α_k is the k-th zero of J_0 and $\omega_k = \frac{\alpha_k}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}$
4. Explain how to calculate A_k and ϕ_k providing initial conditions $u(x,0) = f(x)$ and $\dot{u}(x,0) = 0$ (do not perform the calculation)

This problem was solved in 1732 by Bernouilli, about 1 century before the introduction of Bessel functions (1824).

Feuille 7 - Bessel Functions

I. Miscellaneous

1) Fourier transform of J_0

eq. de J_0 : $x^2y'' + xy' + x^2 y = 0$

$\Rightarrow \quad xy'' + y' + xy = 0.$

$TF[y] = Y$ (notation plus commode ici)

$TF[y'] = 2i\pi\nu Y$

$TF[xy] = -\frac{1}{2i\pi} Y'$

$\Rightarrow \quad TF[y''] = -4\pi^2\nu^2 Y$

$TF[xy''] = -\frac{1}{2i\pi}(-4\pi^2)\frac{d}{d\nu}(\nu^2 Y)$

$= -2i\pi(2\nu Y + \nu^2 Y')$

d'où : $-2i\pi(2\nu Y + \nu^2 Y') + 2i\pi\nu Y - \frac{1}{2i\pi} Y' = 0$

$\Rightarrow \quad -\nu^2 Y' - \frac{1}{(2i\pi)^2} Y' + \nu Y = 0$

$\Rightarrow \quad \nu Y = -Y'\left(\nu^2 - \frac{1}{4\pi^2}\right)$

* voir au dos

$\Rightarrow \quad \frac{Y'}{Y} = \frac{\nu}{\frac{1}{4\pi^2} - \nu^2} = -\frac{1}{2}\frac{-2\nu}{\frac{1}{4\pi^2} - \nu^2}$ } forme $\frac{U'}{U}$

$\Rightarrow \ln Y = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4\pi^2} - \nu^2\right) + cte$ ⚠ $\nu < \frac{1}{2\pi}$

$\Rightarrow \quad Y = \frac{A}{\sqrt{\frac{1}{4\pi^2} - \nu^2}} = \frac{A'}{\sqrt{1 - 4\pi^2\nu^2}}$

voir méthode alternative

la constante est déterminée par $Y(0) = A' = \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(x)\,dx = 2$

↑ cf exo suivant

$$\Rightarrow \boxed{\hat{y}(\nu) = \frac{2}{\sqrt{1 - 4\pi^2\nu^2}}\,\Pi\left(\frac{\nu}{\pi}\right)}$$

2e méthode pour trouver A : intégrer Y.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\nu)\, d\nu = J_0(0) = 1$$

$$\parallel$$

$$\int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} \frac{A'}{\sqrt{1-4\pi^2\nu^2}}\, d\nu \qquad u = 2\pi\nu \ ; \ d\nu = \frac{du}{2\pi}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{A'}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{2\pi} = \frac{A'}{2\pi} \left[\arcsin u\right]_{-1}^{1} = \frac{A'}{2}$$

$$\Rightarrow \quad A' = 2$$

---

2) Intégrales

- $\displaystyle\int_0^\infty J_0(x)\, dx = \frac{1}{2}\hat{J}(0) = 1$

- $\displaystyle\int_0^\infty J_1(x)\, dx = \left[-J_0\right]_0^\infty = J_0(0) = 1.$

- Dans le cas général : on part de $J_\nu' = \frac{1}{2}\left[J_{\nu-1} - J_{\nu+1}\right]$

$$\Rightarrow \int_0^\infty J_\nu'(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty J_{\nu-1} - J_{\nu+1}$$

$$\parallel$$

$$\left[J_\nu\right]_0^\infty = 0 \text{ si } \nu \neq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty J_{n-1}(x)\, dx = \int_0^\infty J_{n+1}(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty J_{n+2}(x)\, dx = \int_0^\infty J_n(x)\, dx.$$

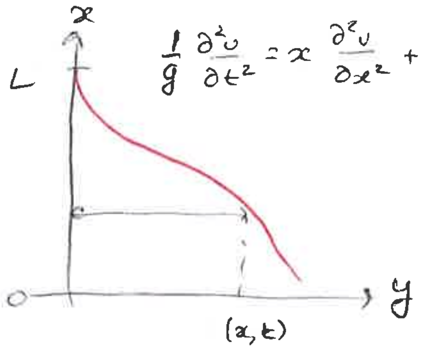
partant des intégrales de J_0 et J_1 on en déduit

$$\int_0^\infty J_n(x)\, dx = 1 \qquad \forall n.$$

(3

II - Hanging chain.

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}$$



essai : $u(x,t) = F(x).T(t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{g} F T'' = x T F'' + T F'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g}\frac{T''}{T} = x\frac{F''}{F} + \frac{F'}{F}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{g}\frac{T''}{T} = -\lambda^2 \\ x\frac{F''}{F} + \frac{F'}{F} = -\lambda^2 \end{cases}$$

(− car on veut des sol sinusoïdals en t)

- pour T : $T'' + \underbrace{\lambda^2 g}_{\omega^2} T = 0 \Rightarrow T(t) = e^{\pm i\omega t}$ (fn de base)

ou $(\cos\omega t, \sin\omega t)$

ou $a\cos(\omega t + \varphi)$

- pour F : $x\frac{F''}{F} + \frac{F'}{F} = -\lambda^2 \Rightarrow x F'' + F' + \lambda^2 F = 0$

$$\Rightarrow \left[x^2 F'' + x F' + \lambda^2 x F = 0 \right] \quad \text{éq diff. de } F.$$

il faudrait x^2 pour bessel ou $(x^2 - \lambda^2)$

posons : $v^2 = \beta x \Rightarrow x = \frac{v^2}{\beta}$; $2v\,dv = \beta\,dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{\beta}{2v}$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{\beta}{2v}\frac{dF}{dv}$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\beta}{2v}\frac{dF}{dv}\right) = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{d}{dv}\left(\frac{\beta}{2v}\frac{dF}{dv}\right)$$

$$= \frac{\beta^2}{4v}\left(\frac{F''}{v} - \frac{F'}{v^2}\right)$$

plug dans D.E
$\Rightarrow$

$$\frac{v^4}{\beta^2}\cdot\frac{\beta^2}{4v}\left(\frac{F''}{v} - \frac{F'}{v^2}\right) + \frac{v^2}{\beta}\cdot\frac{\beta}{2v}F' + \frac{\lambda^2 v^2}{\beta}F = 0$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{4}F'' + \frac{v}{4}F' + \frac{\lambda^2}{\beta}v^2 F = 0$$

$\longrightarrow$ ok si $\frac{\lambda^2}{\beta} = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta = 4\lambda^2 \Rightarrow \boxed{v = 2\lambda\sqrt{x}}$

d'où $F(v)$ solution de $v^2 F'' + v F' + v^2 F = 0$

éq de Bessel pour $\nu = 0$ $\Rightarrow$ 2 sol. de base : $\rightarrow J_0(v)$

$\rightarrow Y_0(v) \rightarrow$ non car singulière à $v=0$

$$\Rightarrow F(v) = \text{cte } J_0(v)$$

en fn de x : $F(x) = \text{cte } J_0(2\lambda\sqrt{x})$

mais $F(L) = 0 \Rightarrow 2\lambda\sqrt{L} = \alpha_k \Rightarrow$ $2\lambda = \dfrac{\alpha_k}{\sqrt{L}}$

α_k = k ème 0 de J_0

$$\Rightarrow F_k(x) = \text{cte}_k \; J_0\left(\alpha_k \sqrt{\frac{x}{L}}\right)$$

$$\omega_k = \lambda\sqrt{g} = \frac{\alpha_k}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

D'où la solution complète, combinaisons linéaire des modes k :

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, J_0\left(\alpha_k \sqrt{\frac{x}{L}}\right) \sin(\omega_k t + \varphi_k)}$$

$0 \leq x \leq L$

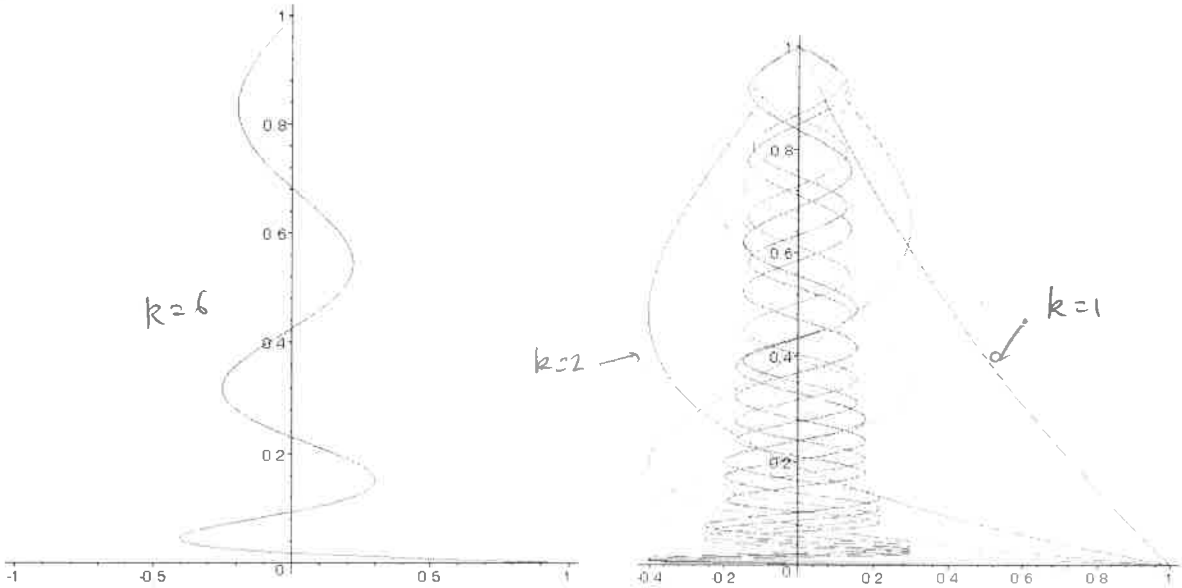


fig. 4 : solutions de l'équation du fil pesant
(animation : http://promenadesmaths.free.fr/Bessel/Bessel_fil.htm)

fonctions-de-Bessel-Chainette.pdf
p. 13

4) Détermination A_k / φ_k :

- condition sur $\dot{U}(x,0)=0$

$$\dot{U}(x,t) = \sum_1 A_k \omega_k J_0(\ ).\cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

$$\dot{U}(x,0)=0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi_k)=0 \quad \forall k \quad \Rightarrow \varphi_k = \frac{\pi}{2} \quad (\text{ou } -\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \boxed{U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(\ ) \cos(\omega_k t)}$$

ok pour φ_k.

- condition sur $U(x,0) = f(x)$.

$$U(x,0) = \sum_1 A_k \, J_0\left(\alpha_k \sqrt{\frac{x}{L}}\right)$$

Soit $X = \frac{x}{L}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{U = \sum_1 A_k \, J_0(\alpha_k X)}_{\text{série de Fourier-Bessel d'une fn } f(X) \text{ avec } f(1)=0} = f(X) \quad 0 \leq X \leq 1$

$$\Rightarrow \boxed{A_k = \frac{\langle f, J_0(\alpha_k X)\rangle}{\frac{1}{2} J_0'(\alpha_k X)^2} = 2\,\frac{\int_0^1 X\, f(X).\, J_0(\alpha_k X)}{J_1(\alpha_k X)^2}}$$

Partiel 2 : Fonctions spéciales

Durée 1h30

1 Diffusion

Des particules diffusent à l'intérieur d'un récipient cylindrique de rayon R. L'axe du cylindre coïncide avec l'axe z des coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z). La concentration $c(\rho, t)$ des particules est supposée indépendante de z et ϕ. Elle obéit à l'équation de diffusion

$$D\,\Delta c = \frac{\partial c}{\partial t} \tag{1}$$

avec D une constante positive (coefficient de diffusion) et Δ le Laplacien[1] On impose en outre une condition de bord sur c : $\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = 0$ (courant de particules nul sur les bords pour tout t, c'est à dire pas de fuite).

1. Chercher une solution à variables séparées de la forme $c(\rho, t) = T(t).F(\rho)$ et montrer que l'équation 1 donne naissance à deux équations différentielles ordinaires, l'une pour T et l'autre pour F.
2. Résoudre l'équation de $T(t)$. On veillera à ce que la solution ne tende pas vers l'infini pour t grand.
3. Montrer que l'équation de $F(\rho)$ fait apparaitre une équation différentielle de Bessel et donner la forme de la solution de base $F(\rho)$ (on rejettera également les solutions tendant vers l'infini).
4. Réécrire $F(\rho)$ en appliquant la condition de bord (cf plus haut). On notera α_n le n-ième zéro de la fonction de Bessel concernée (on précisera de quelle fonction il s'agit).
5. Ecrire la concentration $c(\rho, t)$ sous forme d'un développement en série (série de Fourier-Bessel). On notera A_n les coefficients. On pourra aussi poser $\tau = R^2/D$.

2 Potentiel gravitationnel d'une étoile double

On modélise une étoile double par deux masses ponctuelles m_1 et m_2 situées aux coordonnées $(0, 0, d)$ pour l'étoile 1, et $(0, 0, -d)$ pour l'étoile 2. On prendra $m_1 = m_2$ dans tout le problème. On considère un satellite qui orbite à grande distance ($r \gg d$) autour de cette étoile double. La position de ce satellite est repérée par les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), avec $\phi = 0$ (le satellite orbite dans un plan qui contient les 2 étoiles). On rappelle l'expression du potentiel gravitationnel $V(\vec{r})$ créé en un point $\vec{r}$ par une masse ponctuelle M située en $\vec{r}_0$:

$$V(\vec{r}) = \frac{-GM}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

1. Ecrire le potentiel $V_1(r, \theta)$ créé par l'étoile 1 au niveau du satellite, sous forme d'un développement en série de polynômes de Legendre (développement multipolaire)
2. Faire de même pour l'étoile 2
3. Ecrire le potentiel gravitationnel $V(r, \theta)$ de l'ensemble en s'arrètant au 2e terme non nul (terme quadrupolaire).
4. Montrer que $V(r, \theta)$ peut s'écrire comme le potentiel newtonien V_0 créé par une masse ponctuelle à l'origine (dont on précisera la masse) plus un terme de perturbation anisotrope δV.
5. Pour quelles valeurs de θ a-t-on δV maximal, nul et minimal (on notera δV_M la valeur maximale)? Représenter schématiquement le potentiel $V(r, \theta)$ en fonction de θ pour r fixé (on fera un graphe polaire comme on l'a fait en cours pour les Y_l^m).
6. A partir de quelle distance r le rapport $\delta V_M / V_0$ est il inférieur à 1% ?
7. On appelle $\vec{g}$ le champ gravitationnel créé par l'étoile double et défini par $\vec{g} = -\vec{\nabla} V$. Calculer les trois composantes (g_r, g_θ, g_ϕ) de ce champ gravitationnel[2].
8. Le théorème de Gauss prévoit que le flux Φ de $\vec{g}$ sur une sphère de rayon r est égal à $-4\pi GM$ où M est la masse renfermée par la sphère de rayon r. On rappelle que le flux est défini par l'intégrale

$$\Phi = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} g_r\, r^2 \sin(\theta)\, d\theta\, d\phi$$

   Montrer que le théorème de Gauss est vérifié dans notre cas et que la perturbation δV ne contribue pas au flux Φ (on rappelle que les polynômes de Legendre sont orthogonaux).
9. Expliquer pourquoi les termes suivants du développement multipolaire de V ne contribuent pas non plus au flux Φ.

---

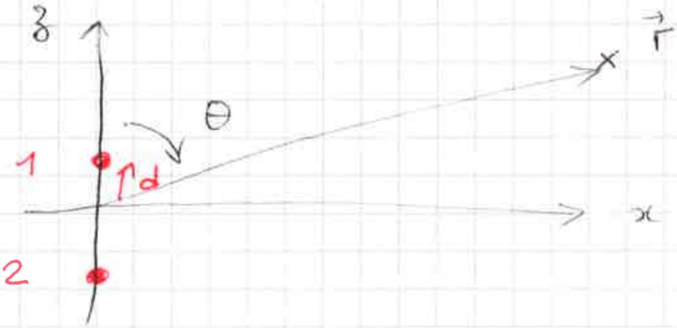
[1] Le laplacien en coordonnées cylindriques s'écrit $\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

[2] Le gradient en coordonnées sphériques est $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$

Partiel math 2 - Fonctions spéciales

(1

II



1) Etoile 1

$$\left[V_1 = -\frac{G m_1}{|\vec r - \vec d|} = -\frac{G m_1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{r^2}}} \right.$$

$$\left. = -\frac{G m_1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta) \right]$$

2) Etoile 2

l'angle θ' qui intervient est $\pi - \theta \Rightarrow \cos\theta' = -\cos\theta$

$$\Rightarrow \left[V_2 = -\frac{G m_1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{d}{r}\right)^{\ell} P_\ell(-\cos\theta) \right.$$

$$\left. = \frac{G m_1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-)^{\ell} \left(\frac{d}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta) \right]$$

3) Ensemble des 2 étoiles

$$V = V_1 + V_2 = -2\frac{G m_1}{r} \sum_{\ell \text{ pair}} \left(\frac{d}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta)$$

à l'ordre $\ell = 2$ (2^e terme $\neq 0$) :

$$\left[V = -2\frac{G m_1}{r} - 2\frac{G m_1 d^2}{r^3} P_2(\cos\theta) \right]$$

4) le potentiel newtonien V_0 s'écrit :

$$V_0 = -\frac{G(m_1+m_2)}{r} \qquad \text{ici } m_1 = m_2$$

$$\Rightarrow \quad V = V_0 + \delta V \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta V = -\frac{2Gm_1 d^2}{r^3} P_2(\cos\theta)}$$

terme anisotrope

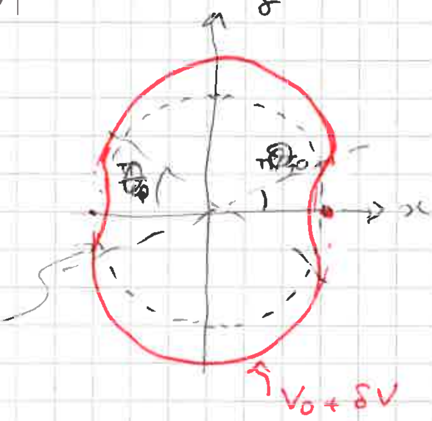
5) $V(r,\theta)$ max pour $P_2(\cos\theta)$ max

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

max quand $\cos^2\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$ ou π

nul pour $\cos^2\theta = 1/3 \rightarrow \theta = \theta_0 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$V(r,\theta) = \underbrace{V_0}_{\text{isotrope}} + \underbrace{\delta V}_{\text{max aux pôles}}$$



6) $\dfrac{\delta V_{max}}{V}$

$$\delta V_{max} = \frac{2Gm_1 d^2}{r^3} \cdot \frac{1}{2}(3-1)$$

$$V_0 = \frac{2Gm_1}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\delta V_{max}}{V_0} = \frac{d^2 r^{-3}}{r^{-1}} = \frac{d^2}{r^2}} \quad < 10^{-2} \text{ si } \boxed{r > 10d}$$

7) $\vec{g} = -\vec{\nabla} V$

$$g_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2Gm_1}{r^2} - \frac{6Gm_1 d^2}{r^4} P_2(\cos\theta)$$

$$g_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{2Gm_1 d^2}{r^3}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{3}{2}\cos^2\theta\right]$$

$$= -\frac{6Gm_1 d^2}{r^4}\cos\theta\sin\theta \qquad g_\varphi = 0$$

8) Flux de $\vec{g}$.

$$\Phi = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} g_r \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= -2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \left[\frac{2\,Gm_1}{r^2} + \frac{6\,Gm_1\,d^2}{r^4} P_2(\cos\theta) \right] r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \underbrace{-\,4\pi G(2m_1)}_{\Phi_0} - \frac{12\pi\ Gm_1\,d^2}{r^2} \int_0^{\pi} P_2(\cos\theta)\ \sin\theta\, d\theta$$

créé par masse $2m$ au centre (V_0)

$\downarrow$
$u = \cos\theta$
$\sin\theta\, d\theta = -\,du$
$\int_0^{\pi} \to \int_1^{-1}$

$$= \Phi_0 - \frac{12\pi G m_1 d^2}{r^2} \underbrace{\int_{-1}^{1} P_2(u)\,.\,du}$$

pdt scalaire $\langle P_2, P_0 \rangle = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Phi = \Phi_0}$ la perturbation δV ne contribue pas.

9) termes suivants du développement de V

$$V = -\frac{2\,Gm_1}{r} - 2\,\frac{Gm_1}{r} \sum_{\ell \geq 2} \frac{d^\ell}{r^\ell} P_\ell(\cos\theta)$$

$$g_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2\,Gm_1}{r^2} - 2\,Gm_1 \sum_{\ell\geq 2} \frac{-d^\ell(\ell+1)}{r^{\ell+2}} P_\ell(\cos\theta)$$

le calcul de Φ fait intervenir pour chaque ℓ des intégrales de type $\int_0^{\pi} P_\ell(\cos\theta)\,.\,\sin\theta\, d\theta = \int_{-1}^{1} P_\ell(u)\,du = \langle P_\ell, P_0 \rangle$ avec $\ell \geq 2$
$= 0$

$\Rightarrow$ aucun terme $\ell > 0$ ne contribue au flux

le th. de Gauss est bien respecté

II - Diffusion

$$D\,\Delta C = \frac{\partial c}{\partial t} \qquad \text{avec} \qquad \left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = 0$$

1) $c(\rho,t) = F(\rho)\,T(t)$

$$\Rightarrow \quad D.\ \frac{T}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dF}{d\rho}\right) = F.\ \frac{dT}{dt}$$

divise par $F.T$

$$\Rightarrow \quad \frac{D}{F\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho F') = \frac{1}{T}T'$$

ok si chaque membre est constant $(-\lambda)$. $\lambda > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{D}{F\rho}\cdot\dfrac{d}{d\rho}(\rho F') = -\lambda \\[2ex] \dfrac{T'}{T} = -\lambda \end{cases}$$

2) Solution $T(t)$

$$\frac{T'}{T} = -\lambda \Rightarrow \ln T = -\lambda t + cte \Rightarrow \boxed{T(t) = cte\ e^{-\lambda t}}$$

ne diverge pas si $\lambda > 0$

3) Solution $F(\rho)$

$$\frac{D}{F\rho}\left[\rho F'' + F'\right] = -\lambda \quad \Rightarrow \quad F'' + \frac{F'}{\rho} + \frac{\lambda}{D}F = 0$$

éq. de Bessel : $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$.

$\rightarrow$ s'identifierait à l'équation de F si $\nu = 0$.

$$\rho^2F'' + \rho F' + \frac{\lambda}{D}\rho^2 F = 0$$

chgt de variable $X^2 = \frac{\lambda}{D}\rho^2 \Rightarrow X = \sqrt{\frac{\lambda}{D}}\,\rho$

$$\frac{dF}{d\rho} = \frac{dF}{dX}\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{D}} \ ; \quad \frac{d^2F}{d\rho^2} = \frac{d^2F}{dX^2}\,\frac{\lambda}{D}$$

on obtient : $\frac{D}{\lambda} x^2 \cdot \frac{\lambda}{D} \frac{d^2F}{dx^2} + \sqrt{\frac{D}{\lambda}}\, x \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{D}} \frac{dF}{dx} + x^2 F = 0$

d'où $x^2 \frac{d^2F}{dx^2} + x \frac{dF}{dx} + x^2 F = 0$

éq. de Bessel d'ordre 0 $\Rightarrow F(x) = \text{cte } J_0(x)$

$$\Rightarrow \boxed{F(\rho) = \text{cte } J_0\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D}}\, \rho\right)}$$

4) Condition au bord

$$\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{\rho = R} = 0$$

$$\frac{\partial c}{\partial \rho} = T(t) \cdot \frac{dF}{d\rho} \cdot \qquad \frac{\partial c}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow \frac{dF}{d\rho} = 0$$

$$\frac{dF}{d\rho} = \text{cte} \sqrt{\frac{\lambda}{D}}\, J_0'\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D}}\, \rho\right) \qquad \text{et } J_0' = -J_1$$

$$\Rightarrow J_1\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D}}\, R\right) = 0 \quad \Rightarrow \sqrt{\frac{\lambda}{D}}\, R = \alpha_n$$

α_n = n-ième zéro de J_1

$$\Rightarrow \lambda = \alpha_n^2 \frac{D}{R^2} = \frac{\alpha_n^2}{\tau}$$

$$\Rightarrow F(\rho) = \text{cte } J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}\, \rho\right)$$

5) Solution $c(\rho, t)$

combinaison linéaire de tous les $F(\rho)$ pour $n = 1, 2, \dots$

$$\Rightarrow \boxed{c(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, J_0\left(\alpha_n \frac{\rho}{R}\right) \cdot \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\tau}\right)}$$