TD#0 — Analyse dimensionnelle, rappels, dérivées utiles.

(Année universitaire 2017–2018 ‖ L1 ST - Sem. 2 ‖ Outils de Physique)

1 Analyse dimensionnelle

1.1 Dimensions usuelles

Trouver la dimension des grandeurs suivantes :

1. surface S, volume V, masse volumique ρ ;
2. accélération a, force F ;
3. vitesse angulaire $\dot{\theta}$, accélération angulaire $\ddot{\theta}$;
4. travail W, énergie cinétique E_c, énergie potentielle U ;
5. puissance P, pression $\mathcal{P}$.

1.2 Le ressort

Un ressort est caractérisé par sa constante de raideur k et sa longueur au repos l_0. Lorsqu'il subit une déformation, l_0 devient alors $l \neq l_0$, et il exerce une force de rappel de module $F = k\,\|l - l_0\|$.

1. Quelle est la dimension de k ?
2. Montrer que l'expression $\frac{1}{2}\,k\,(l - l_0)^2$ est homogène à une énergie.

1.3 Force de frottements visqueux

Une sphère de rayon r qui se déplace avec une vitesse de module v dans un liquide est soumise à une force de frottements de type visqueux de module $F = 6\,\pi\,\eta\,v\,r$, η étant le coefficient de viscosité du liquide.

1. Quelle est la dimension de η ?
2. On pose souvent $F = \lambda v$. Quelle est la dimension de λ ?

1.4 Oscillations

Une masse m oscille à l'extrémité d'un ressort linéaire horizontal de constante de raideur k avec une amplitude X_0.

1. En admettant que sa période τ ne dépende que de m, k et X_0, déterminer l'expression littérale de τ.
2. Même question pour un pendule (fil inextensible de longueur l, masse m) soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.

1.5 Chute libre

Déterminer l'expression littérale de la vitesse d'arrivée au sol d'une masse m abandonnée sans vitesse initiale à une hauteur h au dessus du sol et soumise à $\vec{g}$.

1.6 Trajectoire circulaire horizontale

Une masse ponctuelle m, attachée au bout d'un fil inextensible de longueur l, décrit une trajectoire circulaire sur un plan horizontal.

1. Soit v la vitesse linéaire associée à m. Trouver l'expression du module de la force de tension du fil F en fonction de m, l et v.
2. Soit $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire associée à m. Même question que précédemment mais en fonction de m, l et $\dot{\theta}$.

1.7 Ressort et frottements visqueux

Une masse m oscille à l'extrémité d'un ressort linéaire horizontal de constante de raideur k, en présence d'une force de frottement visqueuse : son module est proportionnelle à la vitesse v de m. L'équation du mouvement s'écrit $m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}$.

1. Identifier le sens physique de chacun des termes de la relation précédente.
2. Diviser cette relation par m, puis en déduire les dimensions respectives des termes m/k et m/λ. Quelle est leur signification physique ?

2 Rappels

2.1 Position, vitesse et accélération

Un mobile se déplace sur une parabole d'équation $y = x^2$ de sorte que $x = 2\,t$, t étant le temps. À $t = 0$ le mobile se trouve en $O(0, 0)$.

1. Déterminer la position $\vec{r}$ à l'instant t.
2. Déterminer la vitesse $\vec{v}$ à l'instant t.
3. Déterminer l'accélération $\vec{a}$ à l'instant t.

2.2 Trajectoire

Un mobile se déplace sur une courbe. À l'instant t ses coordonnées sont : $x(t) = t\cos(\omega t)$ et $y(t) = t\sin(\omega t)$. Quelle est la trajectoire décrite par le mobile ?

2.3 Norme et produit scalaire

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ définis dans le repère $(Oxyz)$ par : $\vec{A} = \hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z}$, $\vec{B} = 3\hat{x} - 2\hat{y} + 6\hat{z}$.

1. Calculer les normes (modules) de $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.
2. Déterminer l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
3. Déterminer les composantes du vecteur unitaire $\hat{c}$ porté par $\vec{C}$ (au signe près).

2.4 Coordonnées de vecteurs

Exprimer x et y en fonction de r et θ, puis déterminer les coordonnées cartésiennes des six vecteurs dont les coordonnées polaires sont respectivement : $\vec{V_1}(2,0)$, $\vec{V_2}(2,\pi/6)$, $\vec{V_3}(2,3\pi/4)$, $\vec{V_4}(2,\pi)$, $\vec{V_5}(2,4\pi/3)$, $\vec{V_6}(2,3\pi/2)$.

2.5 Construction de vecteurs

Soient les vecteurs $\vec{U_1}$, horizontal, vers la droite et de norme égale à 3, et $\vec{U_2}$, vers la droite également, de norme égale à 5 et dont la direction fait un angle de $\pi/3$ avec l'horizontale. Notons $\vec{U}$ leur somme.

1. Dessiner ces deux vecteurs et construire $\vec{U}$.
2. Calculer les coordonnées cartésiennes de $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$, en déduire celles de $\vec{U}$, puis en déduire ses coordonnées polaires.

2.6 Surface élémentaire

Un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y) et polaires (r,θ). Exprimer la surface élémentaire d^2S dans les deux systèmes de coordonnées.

3 Dérivées utiles

3.1 Dérivée par rapport à la position d'une énergie potentielle

Considérons le potentiel élastique $U = \frac{1}{2}kx^2$, où k représente la constante de raideur du ressort et x la position de son extrémité libre par rapport à la position au repos. Calculer la dérivée U' puis la dérivée seconde U'' par rapport à la position. En déduire leur valeur respective lorsque le ressort est au repos.

3.2 Dérivée par rapport au temps d'une énergie mécanique totale

Considérons en plus l'énergie cinétique liée à la masse accrochée au ressort précédent : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

1. Écrire E_c en fonction de la position x.
2. Dériver E_c en fonction du temps t.
3. Dériver U en fonction du temps t – pas de x !
4. En déduire $\dot{E}$ en fonction de x.
5. Quelle équation obtient-on si $\dot{E} = 0$ (l'énergie se conserve au cours du temps) pour $\ddot{x}$ et x ?

3.3 Dérivées faisant intervenir des fonctions circulaires

Continuons sur l'exemple du ressort...

1. Soit la position $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$; que vaut $\dot{x}$?
2. Et avec $x = x_m \sin(\omega t + \phi)$?
3. On a maintenant à faire à une position angulaire θ et à l'expression de l'énergie potentielle liée à un pendule : $U(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$... que valent $U'(\theta)$ et $U''(\theta)$?

On peut à ce moment-là avoir à faire dans le même problème à la dérivée par rapport *au temps* de l'énergie mécanique totale du pendule : $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\theta)$...

1. Écrire E_c en fonction de θ.
2. Dériver E_c en fonction du temps.
3. Dériver $U(\theta)$ en fonction du temps.
4. En déduire $\dot{E}$ en fonction de θ.

3.4 Développements limités

1. Trouver le développement limité (au sens de Taylor) au second ordre de $\sin\theta$ au voisinage de θ=0, puis simplifier l'expression de $\dot{E}$ obtenue à l'exercice précédent sachant ceci.
2. Quelle équation obtient-on si $\dot{E}$=0 pour $\ddot{\theta}$ et θ ?
3. Quid du développement de Taylor de $\cos\theta$ au même voisinage (θ=0) et au même ordre ?