

Mécanique et Analyse Dimensionnelle

En Mécanique, on définit trois grandeurs fondamentales :

- la longueur L $\{ \text{longueur} \} = L$
- le temps T $\{ \text{temps} \} = T$
- la masse M $\{ \text{masse} \} = M$

Analyse Dimensionnelle - Principes

- La dimension d'une grandeur mécanique s'exprime en fonction des dimensions fondamentales L, T et M.

- La dimension d'une vitesse v , notée $[v]$, s'exprime ainsi L/T , ou LT^{-1} .

ii Ne pas confondre ces grandeurs avec les unités correspondantes (mètre, seconde, kilogramme) !!

Analyse Dimensionnelle - Buts

- Permettre de vérifier qu'une expression est correcte vis-à-vis des grandeurs mises en jeu
 - Établir *ex novo* l'expression littérale liée à un phénomène physique
- ii Toujours à une constante numérique près !!

Analyse Dimensionnelle – Exemple d'application #1 [Ex.1.1, feuille de TD #0]

1.1 Dimensions usuelles

Trouver la dimension des grandeurs suivantes :

1. surface S , volume V , masse volumique ρ ;
2. accélération a , force F ;
3. vitesse angulaire $\dot{\theta}$, accélération angulaire $\ddot{\theta}$;
4. travail W , énergie cinétique E_c , énergie potentielle U ;
5. puissance P , pression \mathcal{P} .

Analyse Dimensionnelle –

Exemple d'application #1

{Ex.1.1, feuille de TD #0}

1– $[S]=L^2$, $[V]=L^3$, $[\rho]=ML^{-3}$

2– $[a]=LT^{-2}$, $[F]=MLT^{-2}$

3– $[d\theta/dt]=T^{-1}$, $[d^2\theta/dt^2]=T^{-2}$

4– $[W]=[E_c]=[U]=ML^2T^{-2}$

5– $[Puissance]=ML^2T^{-3}$

$[Pression]=ML^{-1}T^{-2}$

Analyse Dimensionnelle –

Exemple d'application #2

{Ex.1.2, feuille de TD #0}

1.2 Le ressort

Un ressort est caractérisé par sa constante de raideur k et sa longueur au repos l_0 . Lorsqu'il subit une déformation, l_0 devient alors $l \neq l_0$, et il exerce une force de rappel de module $F = k \|l - l_0\|$.

1. Quelle est la dimension de k ?
2. Montrer que l'expression $\frac{1}{2} k (l - l_0)^2$ est homogène à une énergie.

Analyse Dimensionnelle –

Exemple d'application #2

{Ex.1.2, feuille de TD #0}

1. $k = F / ||l - l_0|| \Rightarrow [k] = MT^{-2}$

2. $\Rightarrow [1/2 k (l - l_0)^2] = ML^2T^{-2}$

Analyse Dimensionnelle –

Exemple d'application #3

[Ex.I.4, feuille de TD #0]

1.4 Oscillations

Une masse m oscille à l'extrémité d'un ressort linéaire horizontal de constante de raideur k avec une amplitude X_0 .

1. En admettant que sa période τ ne dépende que de m , k et X_0 , déterminer l'expression littérale de τ .
2. Même question pour un pendule (fil inextensible de longueur l , masse m) soumis à l'accélération de la pesanteur \vec{g} .

Analyse Dimensionnelle –

Exemple d'application #3

[Ex.I.4, feuille de TD #0]

$$\tau = f(m, k, X_0)$$

$$\text{avec } [m] = M, [k] = MT^{-2}, [X_0] = L, [\tau] = T$$

$$\Rightarrow [\tau] = [m]^a [k]^b [X_0]^c$$

$$\Rightarrow T = M^a (MT^{-2})^b L^c = M^{a+b} L^c T^{-2b}$$

$$\Rightarrow a + b = 0 \qquad \Rightarrow a = 1/2$$

$$c = 0$$

$$-2b = 1 \Rightarrow b = -1/2$$

$$\Rightarrow [\tau] = [m]^{1/2} [k]^{-1/2} \Rightarrow \tau \propto (m/k)^{1/2}$$

Donc : on voit ici que la période des oscillations τ est PROPORTIONNELLE À $(m/k)^{1/2}$, et NE DÉPEND donc PAS de l'amplitude des oscillations ! (En effet : $\tau = 2 \pi (m/k)^{1/2}$!)

Analyse Dimensionnelle –

Une dernière remarque

{Ex.1.5, feuille de TD #0}

1.5 Chute libre

Déterminer l'expression littérale de la vitesse d'arrivée au sol d'une masse m abandonnée sans vitesse initiale à une hauteur h au dessus du sol et soumise à \vec{g} .

Ici, vous allez trouver que la vitesse d'arrivée au sol NE DÉPEND PAS de m !... Voir aussi (vers 1:20 puis 2:50) :

http://www.dailymotion.com/video/x29d6ik_une-boule-de-bowling-et-une-plume-tombent-en-meme-temps_news