Cinématique
- Le Mouvement -

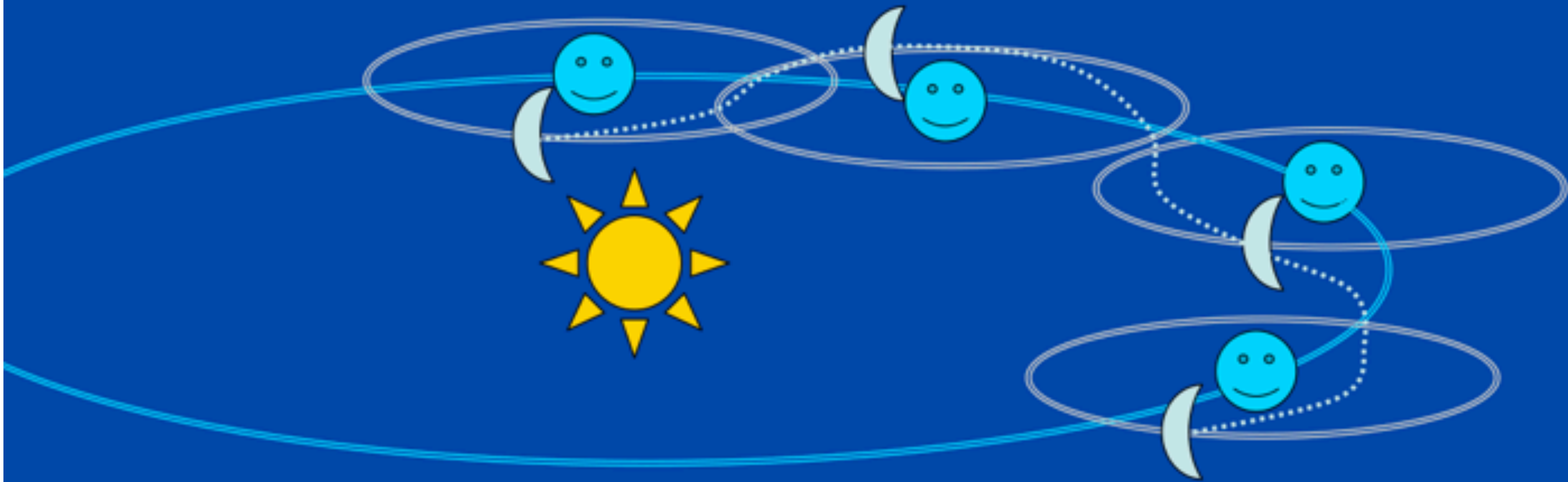
Un objet est en mouvement *par rapport à* un autre lorsque sa position $\vec{r}$ vue ou mesurée par rapport au second objet, évolue en fonction du temps **t**.

- Si $\vec{r}(t) = \vec{\text{constante}}$ l'objet n.1 est au *repos relatif* par rapport à l'objet n.2.

- Repos et mouvement sont donc des notions *relatives*.

➡ Nécessité de définir un *système de référence* pour pouvoir analyser le mouvement.

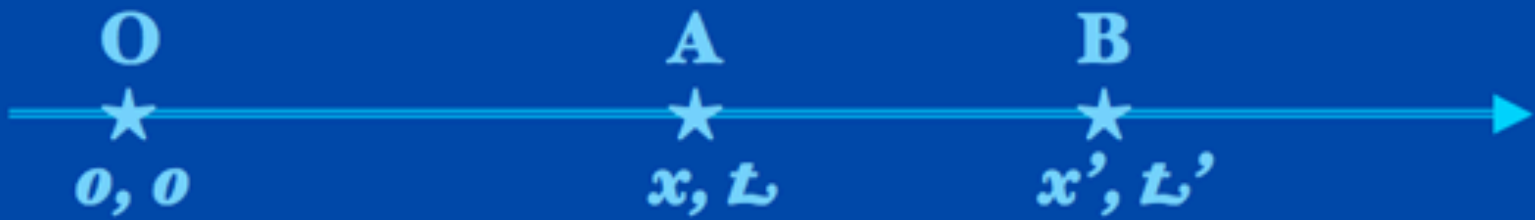
... Exemple du mouvement de la Lune par rapport à la Terre et par rapport au Soleil...



I. Mouvement rectiligne

- mouvement rectiligne => trajectoire = une droite

- notion de vitesse moyenne :



$$\text{vitesse moyenne} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- notion de vitesse instantanée :

$$v_{\text{inst.}} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{moy}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow dx = v\ dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\ dt$$

- d'où :

$$x = \underbrace{\boxed{x_0}}_{\text{position de départ}} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\boxed{v\ dt}}_{\text{déplacement pendant } dt}$$

Exemple d'application #1
[Ex.1, feuille de TD #1]

Une particule se déplace le long de l'axe des x de telle sorte que $x(t) = 5t^2 + 1$. Calculer sa vitesse moyenne dans l'intervalle compris entre :

(a) $2\ s$ et $3\ s$ — $x(2s) = 21m$ & $x(3s) = 46m \Rightarrow \Delta x = 25m,\ \Delta t = 1s \Rightarrow v_{moy} = 25\ m/s$

(b) $2\ s$ et $2.1\ s$ — $v_{moy} = 20.5\ m/s$

(c) $2\ s$ et $2.001\ s$ — $v_{moy} = 20.005\ m/s$

(d) $2\ s$ et $2.00001\ s$ — $v_{moy} = 20.00005\ m/s$

Quelle est sa vitesse instantanée à $t = 2\ s$?

$v(t)$ = *limite de* $v(2s+dt)$ *quand* $dt \to 0 = 20\ m/s$

En effet : $v(t) = dx/dt = d/dt\,(5t^2 + 1) = 10t \Rightarrow v(2s) = 20\ m/s$

- notion d’accélération moyenne :

Comme la position, la vitesse est une fonction de *t*. Si la *vitesse est constante*, le mouvement est dit *uniforme*, ce qui correspond à une *accélération nulle*. En effet l’accélération moyenne *a* est définie telle que :

$$a = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- notion d'accélération instantanée :

De même que pour la vitesse, on a simplement :

$$a_{\text{inst.}} = \lim_{\Delta t \to 0} a_{\text{moy}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow dv = a\ dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\ dt$$

Et donc :

$$v = \underbrace{\boxed{v_0}}_{\text{vitesse de départ}} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\boxed{a\ dt}}_{\text{variation de } v \text{ pendant } dt}$$

- en voulant lier l'accélération à la position :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

- et de même :

$$v\ dv = a\ dt\ \frac{dx}{dt} = a\ dx$$

- ce qui donne :

$$\int_{v_0}^{v} v\ dv = \int_{x_0}^{x} a\ dx \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} a\ dx$$

- quelques cas simples de mouvements rectilignes :

  - les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de même sens : le mouvement est *accéléré*

  - les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de sens contraire : le mouvement est *décéléré* (ou *retardé* ou *freiné*)

  - $\vec{v}$ est constant (et donc $\vec{a}$ est nul) : le mouvement est dit *rectiligne uniforme*, et l'on a :

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v \, dt = x_0 + v(t - t_0)$$

- $\vec{a}$ est constant : le mouvement est dit *rectiligne uniformément accéléré*, et l'on a :

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Mais aussi :

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

- en prenant $t_0=0$ on a tout simplement :

$$v(t) = v_0 + a\ t$$

$$x(t) = x_0 + v_0\ t + \frac{1}{2}\ a\ t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

... qui sont finalement les équations du cas général <<*mouvement rectiligne*>>, en effet :

- $a = cste \neq 0$ => mvt rect. uniformément accéléré
- $a = 0$ => mvt rect. uniforme

On remarque que contrairement à l’intuition qui nous ferait classer les mouvements rectilignes en deux classes :

- <<au repos ($v=0$)>>,
- <<en mouvement ($v\neq 0$)>>.

On a plutôt la classification suivante :

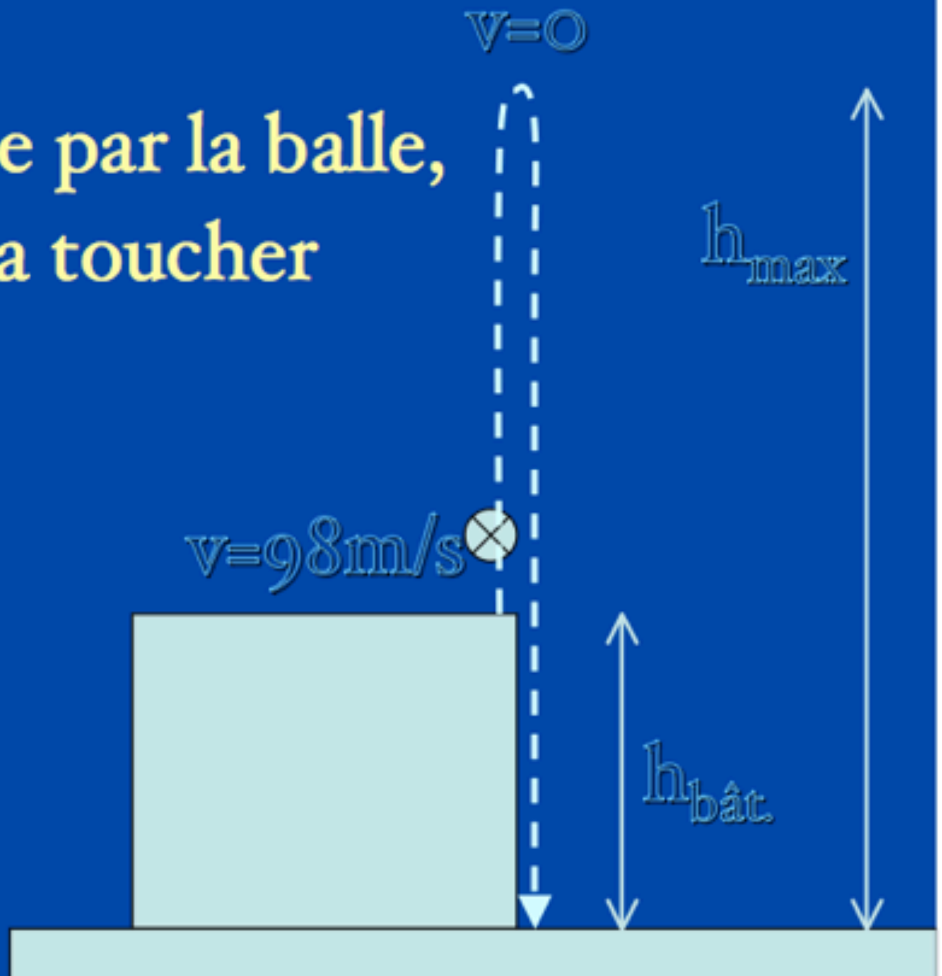
- <<vitesse constante ($a=0$)>>
- <<vitesse variable ($a\neq 0$)>>

Exemple d'application #2
[Ex.2, feuille de TD #1]

On tire une balle verticalement vers le haut avec v_0=*98 m/s* depuis le toit d'un bâtiment de *100m* de haut. Trouver :

(a) la hauteur maximum atteinte par la balle,
(b) la vitesse avec laquelle elle va toucher terre de nouveau,
(a) le temps total écoulé.

On donne g=*9.8 m/s²*.



Exemple d'application #2
[Ex.2, feuille de TD #1]

Comment aborder ce problème ?

Il s'agit, à l'aller comme au retour, d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) avec :
accélération = celle de la pesanteur (vecteur g), donc :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Et l'on a (en choisissant un sens positif vers le haut) :

$$a = -g, \text{ avec : } g = ||\vec{g}|| \text{ et } a \text{ la valeur algébrique de } \vec{a}$$

Exemple d'application #2
[Ex.2, feuille de TD #1]

On a donc, à l'aller comme au retour :

$$
\begin{aligned}
a &= -g \\
\Rightarrow v = at + v_0 &= -gt + v_0 \\
\Rightarrow x &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0
\end{aligned}
$$

Mais aussi :

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) = -2g(x - x_0)$$

Où v_0 et x_0 sont des valeurs algébriques qui vont dépendre de l'état initial considéré et de l'axe choisi (sens et origine).

(a) hauteur maximum h_{max} atteinte par la balle :

On a :

$$v(t) = v_0 - g\ t$$

$$x(t) = x_0 + v_0\ t - \frac{1}{2}\ g\ t^2$$

$$v^2(t) = v_0^2 - 2\ g\ (x(t) - x_0)$$

En posant :

- état initial : $t_o = 0$ $x_o = 100$ m $v_o = 98$ m/s
- état final : $t_f = ?$ $x_f = ?$ $v_f = 0$ m/s

On trouve :

$$x_f = x_0 + \frac{v_0^2}{2g} = h_{\max} = 590\, m$$

(b) vitesse de la balle quand elle touche le sol :

On a toujours :

$$v(t) = v_0 - g\ t$$

$$x(t) = x_0 + v_0\ t - \frac{1}{2}\ g\ t^2$$

$$v^2(t) = v_0^2 - 2\ g\ (x(t) - x_0)$$

Mais en posant :

- état initial : $t_o = 0$ $x_o = 590$ m $v_o = 0$ m/s
- état final : $t_f = ?$ $x_f = 0$ m $v_f = ?$

On trouve alors :

$$v_f^2 = v_0^2 - 2\ g\ (x_f - x_0) = 2\ g\ h_{\max}$$

C'est à dire :

$$\|v_f\| = \sqrt{2\ g\ h_{\max}}$$

(c) temps total écoulé :

montée :

$$t_{(\mathrm{a})} = \frac{v_0}{g} = 10\,s$$

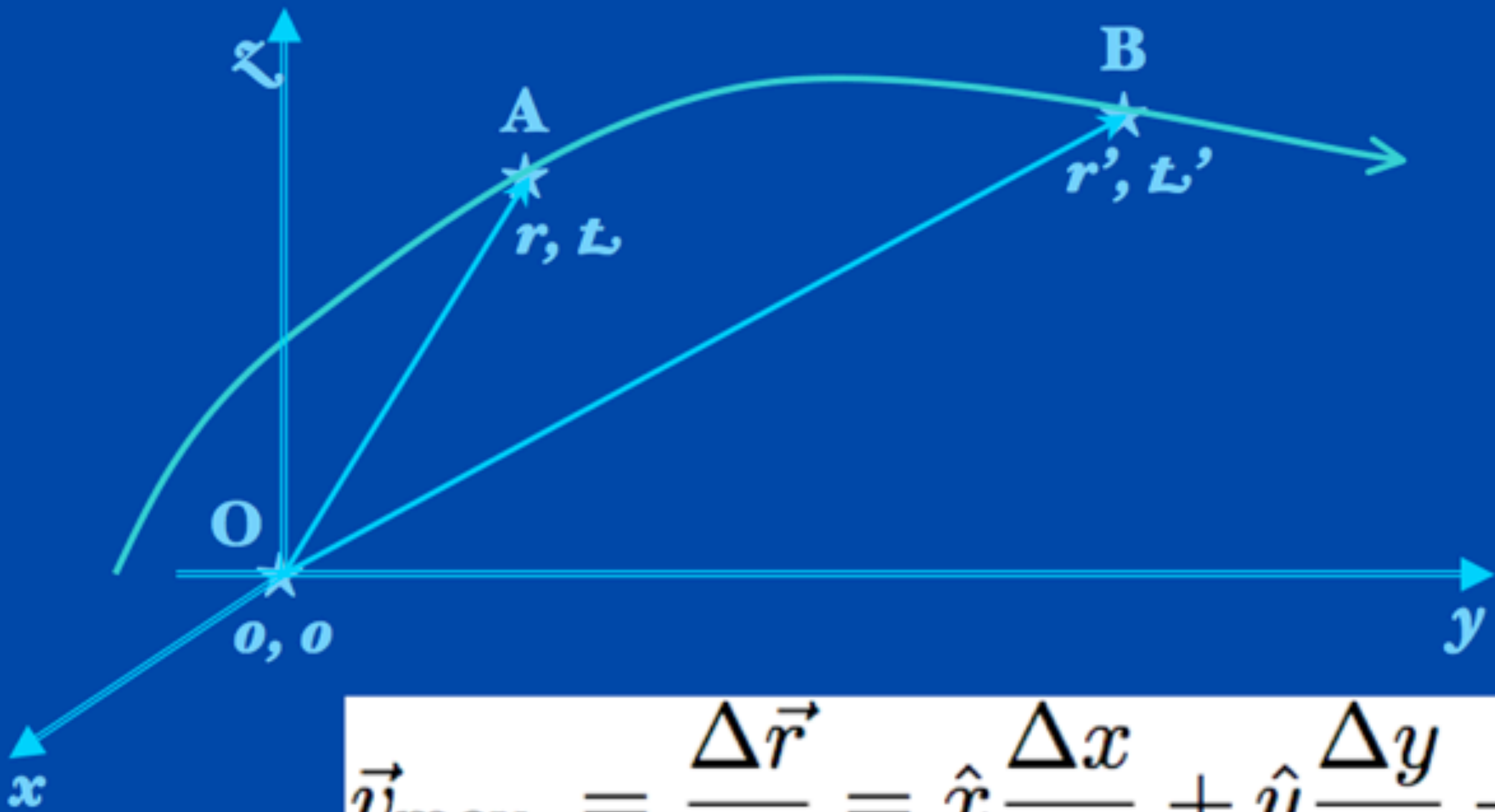
descente :

$$t_{(\mathrm{b})} = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} \simeq 10.97\,s$$

=> total :

$$t_{\mathrm{total}} = t_{(\mathrm{a})} + t_{(\mathrm{b})} \simeq 20.97\,s$$

II. Mouvement curviligne



$$\vec{v}_{\text{moy.}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \hat{x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \hat{z}\frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_{\text{inst.}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{x}\frac{dx}{dt} + \hat{y}\frac{dy}{dt} + \hat{z}\frac{dz}{dt} = \hat{u}_t v_{\text{inst.}}$$

- de même :

$$\vec{a}_{\text{moy.}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \hat{x}\frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \hat{y}\frac{\Delta v_y}{\Delta t} + \hat{z}\frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

- et :

$$\vec{a}_{\text{inst.}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{x}\frac{dv_x}{dt} + \hat{y}\frac{dv_y}{dt} + \hat{z}\frac{dv_z}{dt}$$

$$\vec{a}_{\text{inst.}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \hat{x}\frac{d^2x}{dt^2} + \hat{y}\frac{d^2y}{dt^2} + \hat{z}\frac{d^2z}{dt^2}$$

- Le ***mouvement curviligne uniformément accéléré*** :

$$\vec{a} = \vec{cst} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\,(t - t_0)$$

$\vec{v_0}$ et $\vec{a}$ ont *a priori* des directions différentes
$\Rightarrow$ $\vec{v}$ n'est donc pas // à $\vec{a}$ mais se trouve toujours dans le même plan défini par $\vec{v_0}$ et $\vec{a}$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}\,(t - t_0)^2$$

de plus l'extrémité de $\vec{r}$ se trouve toujours dans le même plan // à $\vec{v_0}$ et $\vec{a}$ passant par le point défini par $\vec{r_0}$
$\Rightarrow$ le mouvement curviligne uniformément accéléré est toujours plan ! (et c'est une parabole)

- en prenant ici aussi t_0=0 on obtient simplement :

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{a}\ t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}\ t + \frac{1}{2}\ \vec{a}\ t^2$$

$$v^2(t) - v_0^2 = 2\ \vec{a}\ (\vec{r}(t) - \vec{r_0})$$

(démontrer cette dernière équation...)

[Ex.3, feuille de TD #1]

- Exemple du mouvement d'un projectile :

$$\vec{a} = \vec{g} = \text{accélération de la pesanteur}$$

$$\vec{g} = -\|\vec{g}\| \ \hat{y}$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{x} + v_{0y}\hat{y}$$

$$\text{avec } v_{0x} = v_0 \cos\alpha \text{ et } v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$$

$$\text{avec } v_x = v_{0x} \text{ et } v_y = v_{0y} - gt$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\text{avec } x = v_{0x}\ t \text{ et } y = v_{0y}\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

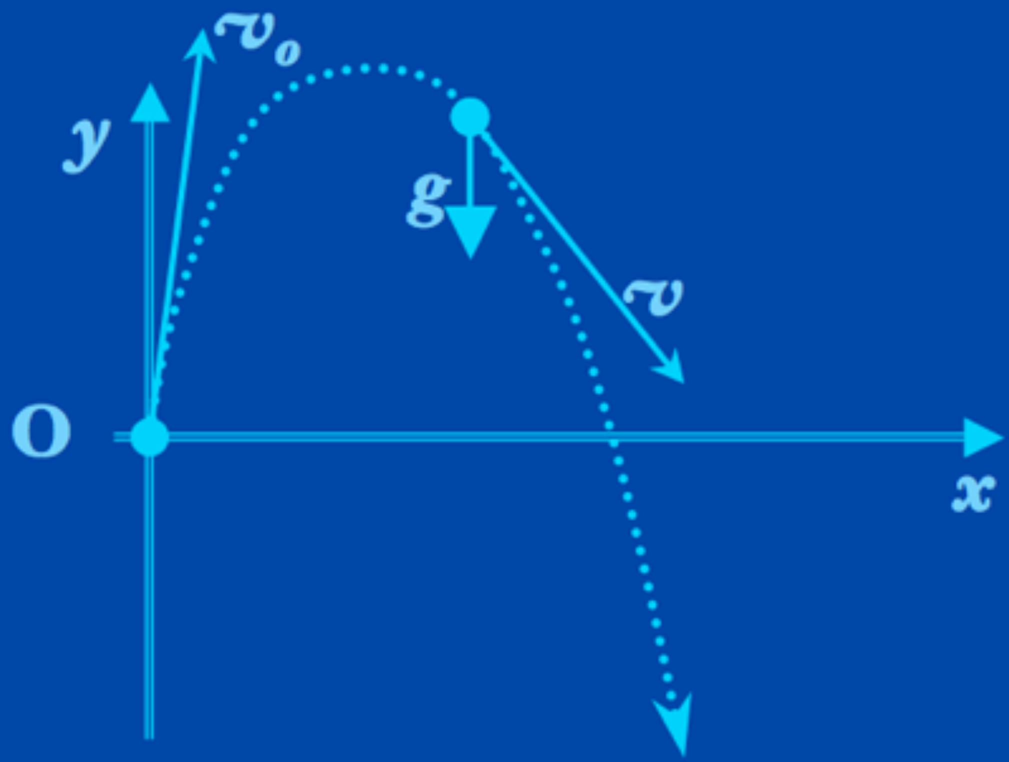
Exemple d'application #3
[Ex.4, feuille de TD #1]

Trouver :

(a) la hauteur atteinte h

(b) le temps de vol t_{vol}

(c) la distance horizontale parcourue (portée) d



À noter que l'on néglige ici :

- la courbure de la Terre
- la variation de la pesanteur avec la hauteur
- la résistance de l'air

(a) hauteur ***h*** atteinte :

Hauteur maximum atteinte (y=h) quand v_y=0, d'où :

$$v_{0\mathrm{y}} = g\ t_{\mathrm{y=h}} \Rightarrow t_{\mathrm{y=h}} = \frac{v_{0\mathrm{y}}}{g}$$

Ce qui entraîne :

$$y = v_{0\mathrm{y}}\ t - \frac{1}{2}\ g\ t^2 \Rightarrow h = \frac{v_{0\mathrm{y}}^2}{g} - \frac{1}{2}\ \frac{v_{0\mathrm{y}}^2}{g}$$

Et donc :

$$h = \frac{v_{0\mathrm{y}}^2}{2g} = \frac{v_0^2\ \sin^2\alpha}{2g}$$

(b) temps de vol t_{vol} :

On a : $t_{vol} = t_{montée} + t_{descente}$

On a aussi déjà vu que : $t_{montée} = v_{oy} / g = v_o \sin \alpha / g$

Quant à $t_{descente}$, il est par symétrie du problème bien évidemment égale à $t_{montée}$, d'où :

$$t_{\text{vol}} = 2 \; \frac{v_0 \; \sin\alpha}{g}$$

(c) portée ***d*** :

En injectant l'expression de t_{vol} dans l'équation :

$$x = v_{0\mathrm{x}}\, t \Rightarrow d = v_{0\mathrm{x}}\, t_{\mathrm{vol}}$$

On obtient :

$$d = 2\ \frac{v_0^2\ \sin\alpha\ \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\ \sin(2\alpha)}{g}$$

... au fait : comment optimiser cette portée d ?

$$\alpha = \pi/4 \Rightarrow \sin(2\alpha) = 1 \Rightarrow d = \frac{v_0^2}{g}$$

composantes tangentielle et normale de l'accélération

Composante ***tangentielle*** de l'accélération : dénote une variation du ***module*** de $\vec{v}$

(et de son sens !) (et donc de sa valeur algébrique !)

Composante ***normale*** de l'accélération : dénote une variation de la ***direction*** de $\vec{v}$

Et on a :

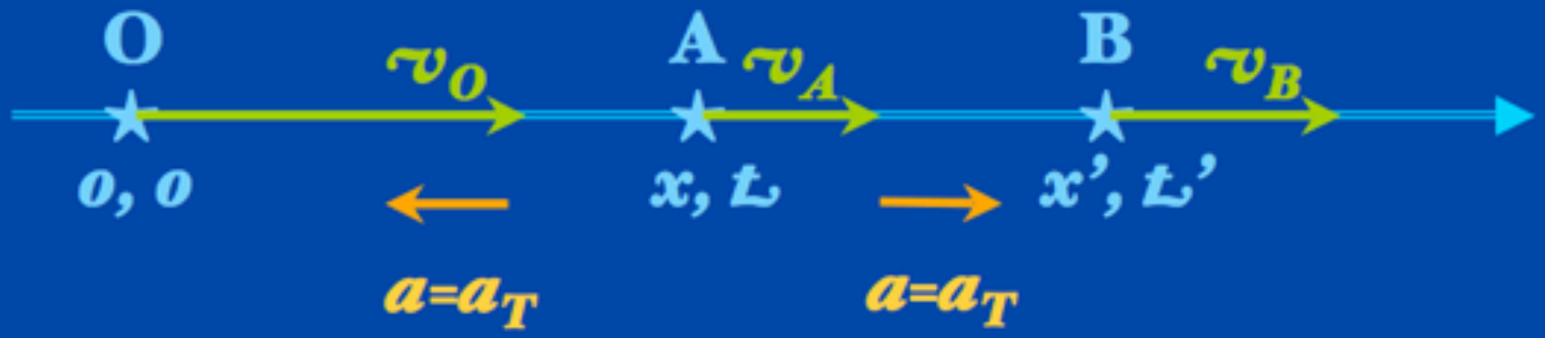
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u_T} + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{u_N}$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

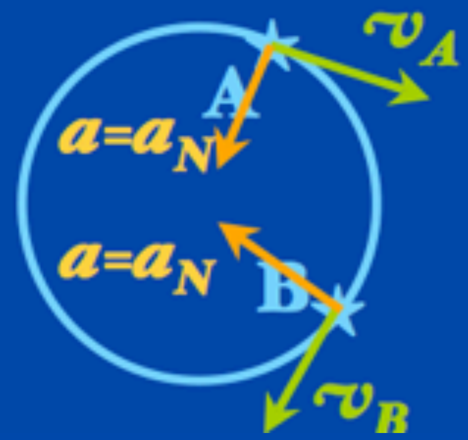
Où ρ est le rayon de courbure (***R*** pour un cercle, ∞ pour une droite)

Cas particulier du mouvement ***rectiligne*** :
- composante ***normale*** toujours nulle,
- composante ***tangentielle*** = accélération.

(<= dir. du vecteur **v** ne varie pas!)



Cas particulier du mouvement ***uniforme*** :
- composante ***normale*** = accélération,
- composante ***tangentielle*** toujours nulle. (<= v ne varie pas!)



mouvement circulaire : vitesse et accélération angulaires

- notion de ***vitesse angulaire*** ω :

$$v = \frac{ds}{dt} = r\ \frac{d\theta}{dt} = r\ \omega$$

$$v = r\dot{\theta}$$

- si ω est constant (mvt circulaire uniforme), on a :

$$\theta = \theta_0 + \omega\ (t - t_0)$$

$$\theta = \theta_0 + \dot{\theta}(t - t_0)$$

... en prenant $t_0=0$ et $\theta_0=0$ on a (ν = fréquence) :

$$\theta = \omega t \text{ ou } \omega = \frac{\theta}{t} \text{ et } \omega = 2\pi\nu$$

- notion d'***accélération angulaire*** ***dω/dt*** :

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- si ***dω/dt*** est constant (mvt circulaire uniformément accéléré), on a :

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}\ (t - t_0)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0\ (t - t_0) + \frac{1}{2}\ \dot{\omega}\ (t - t_0)^2$$

- De plus, dans le cas du mouvement circulaire :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r\ \frac{dw}{dt} = r\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = r\ \dot{\omega}$$

$$a_N = \frac{v^2}{r} = \omega^2\ r$$

$$a_T = r\ddot{\theta}$$

$$a_N = r\dot{\theta}^2$$