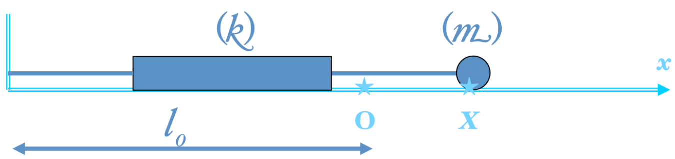
TD#4 — Oscillateurs mécaniques

(Année universitaire 2017–2018 ‖ L1-ST - Sem. 2 ‖ Outils de Physique)

1 Ressort à l'horizontale

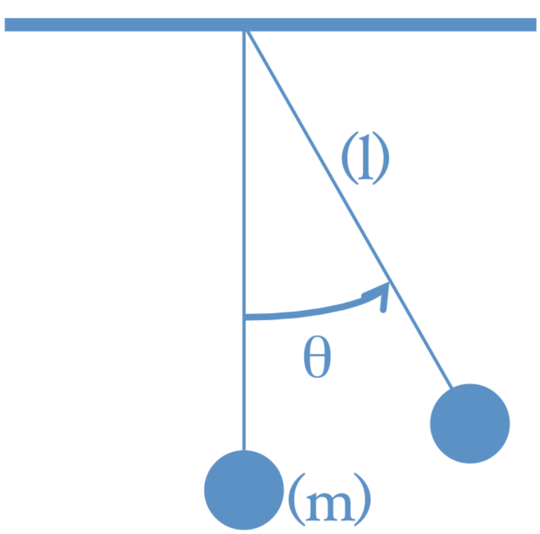
Un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos l_0 est placé sur un plan horizontal. À son extrémité libre est fixée une masse m qui peut glisser sans frottements sur ce plan, et dont on repère la position par son abscisse x sur un axe d'origine O. Lorsque la longueur du ressort vaut l_0 son extrémité libre coincide avec O.

1. Écrire l'expression de l'énergie mécanique E et en déduire l'expression de sa pulsation ω.
2. Déduire cette même expression en partant du bilan des forces exercées sur le système.



2 Pendule

Une masse m est fixée à l'extrémité d'une fil de masse négligeable et de longueur l, repérée par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale. Ce système forme un pendule oscillant autour de sa position d'équilibre stable.



1. Écrire l'énergie mécanique E en fonction de θ et $\dot{\theta}$.

2. En déduire que, pour le régime correspondant à de petits angles θ, on retombe sur l'équation harmonique :
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0,$$
où g est le module de l'accélération de la pesanteur terrestre.

3. Retrouver le même résultat en partant du bilan des forces appliquées au système.

4. En tirer la pulsation ω des oscillations, puis la période T.

5. Donner l'expression de $\theta(t)$ en fonction de l'amplitude θ_m, la pulsation ω et le déphasage ϕ.

6. Trouver θ_m et ϕ grâce aux conditions initiales $\theta(t=0)$=θ_0=$\pi/6$ et $\dot{\theta}(t=0)$=$\dot{\theta}_0$=0.

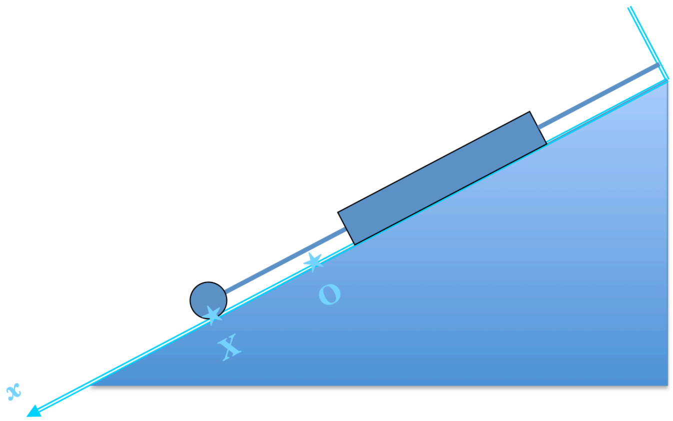
7. Écrire l'expression de $\theta^2 + \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)^2$ et en déduire la nature de la trajectoire décrite au cours d'une oscillation dans l'espace de phase $\left(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)$.

8. Retrouver la même chose en partant de l'expression de $\frac{2E}{mgl}$.

9. Déduire du résultat précédent le rayon de la trajectoire circulaire dans l'espace de phase et comparer avec le résultat de la question (7). Pourquoi cette différence ?

3 Ressort sur un plan incliné

Un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos l_0 est placé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Son extrémité libre correspond avec l'origine O de l'axe et est dirigée vers le bas. Une masse m, pouvant glisser sans frottements sur le plan incliné, est fixée à l'extrémité de ce ressort. On repère sa position par l'abscisse x.



1. Exprimer $U(x)$, l'énergie potentielle totale du système $\{$masse $\oplus$ ressort$\}$. On prendra $U(0) = 0$.

2. En déduire la position d'équilibre x_e de m. Montrer qu'elle est stable.

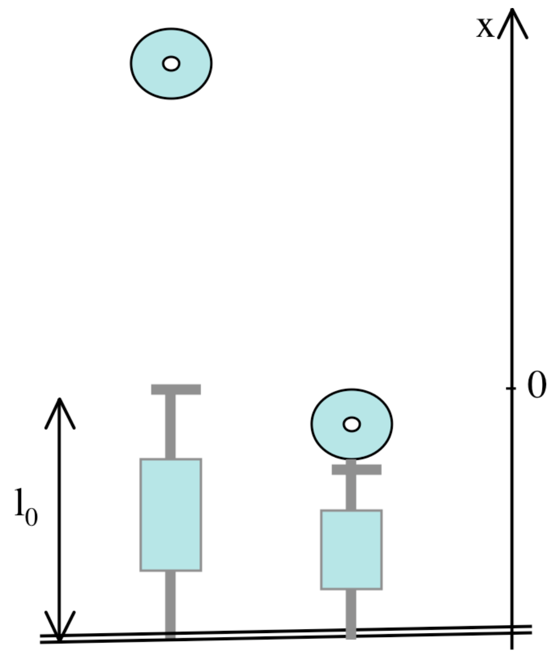
3. Déterminer la période des oscillations de m autour de x_e.

4. Sachant qu'à $t = 0$ (instant initial) m est lancée du point d'abscisse $x_0 = x_e$ avec une vitesse $v_0 = 1\,\mathrm{m/s}$, exprimer $x(t)$ en fonction de m, k, g et α.

5. Écrire l'expression de $(x - x_e)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2$ et en déduire la nature de la trajectoire décrite au cours d'une oscillation dans l'espace de phase $\left(x, \frac{\dot{x}}{\omega}\right)$.

4 Ressort debout

Un dispositif fait tomber une boule métallique (ponctuelle) de masse m sur un ressort posé au sol verticalement, de constante de raideur k et de longueur au repos l_0. Le ressort disposant d'un aimant à son extrémité libre (l'autre extrémité reposant sur le sol), le système masse$\oplus$ressort se met alors à osciller.



1. Exprimer $U(x)$. (On prendra $U(0) = 0$ en considérant qu'à l'instant où m se pose sur le ressort on a $x = 0$ et que l'axe des x est dirigé vers le haut.)

2. Démontrer qu'il existe une position d'équilibre stable $x_e{=}-\frac{mg}{k}$, où g représente le module de l'accélération de la pesanteur.

3. Démontrer que :

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right) - \frac{mg}{k}\ ,$$

   où A et ϕ restent à être déterminés et t représente le temps qui s'écoule.

4. Sachant que m a été lâchée d'une hauteur $2h$ sur le ressort alors (à $t{=}0$ donc) positionné en $x{=}0$, montrer que la vitesse initiale des oscillations vaut $-2\sqrt{gh}$.

5. Sachant d'une part qu'ici $g{=}10\,m/s^2$, $h{=}0.025\,m$, $k{=}1\,N/m$, $m{=}0.01\,kg$, et que d'autre part $\arctan(1){=}\pi/4\,\mathrm{rad}$, en déduire $x(t)$ en fonction seulement de t.

6. Écrire

$$(x - x_e)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{k/m}}\right)^2$$

   puis en déduire la représentation de la trajectoire de m dans l'espace des phases $\left(x, \frac{\dot{x}}{\sqrt{k/m}}\right)$.