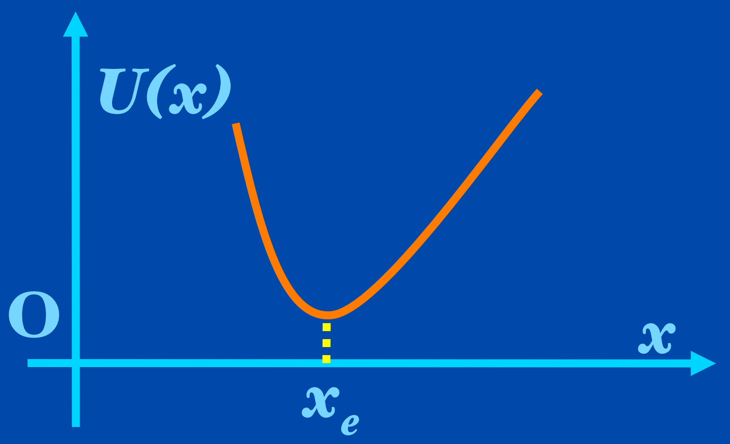
- Oscillateurs Mécaniques -

I. Préliminaires & définitions

Préliminaires :

- on va se limiter à des oscillateurs à un seul degré de liberté
- … qui oscillent autour d'une position d'équilibre ***stable***



Définitions :

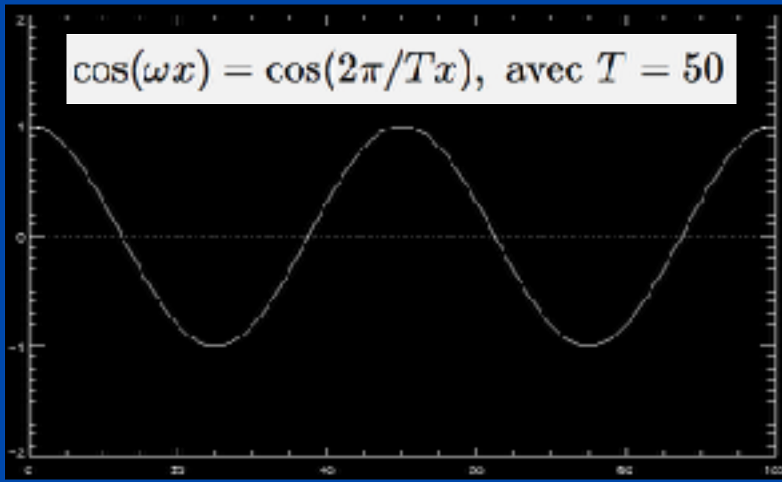
- oscillateur ***libre*** : les oscillations se déroulent en absence de frottements et/ou d'excitation extérieure

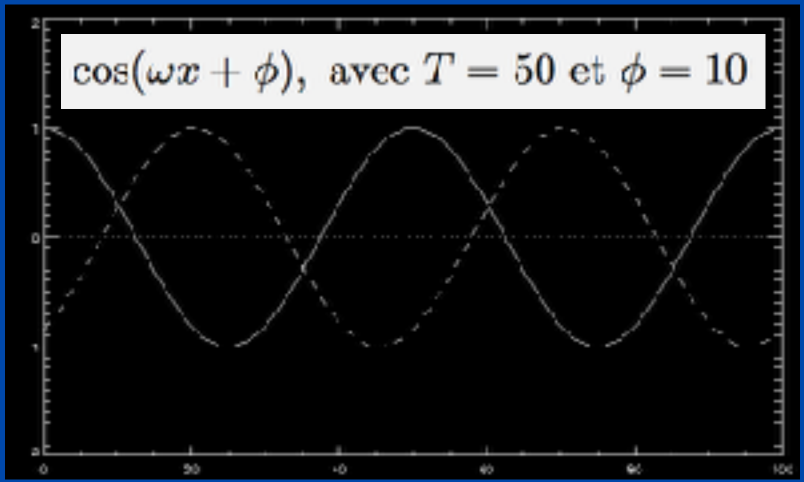
≠ oscillateur ***amorti*** : les oscillations sont amorties par des frottements

≠ oscillateur ***forcé*** : l'oscillateur est soumis à une excitation périodique

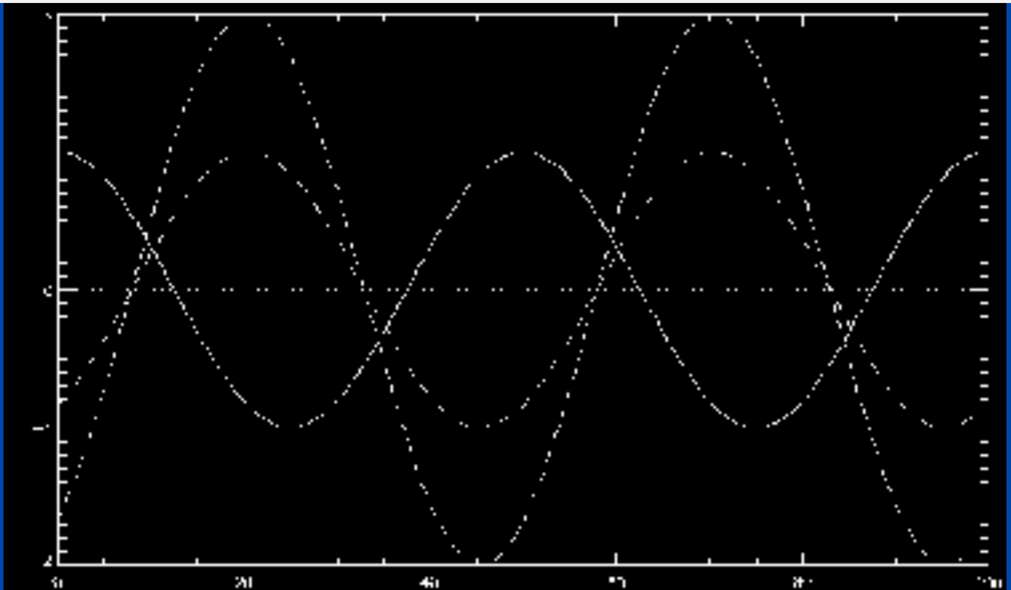
- cas particulier de l'oscillateur ***harmonique*** : oscillateur libre pour lequel le mouvement du mobile est de type sinusoïdal... $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$

Rappels sur le cosinus :

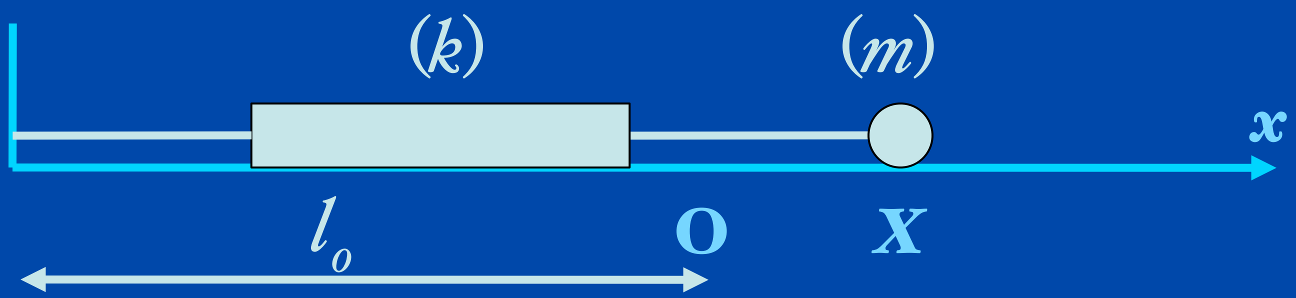




$x_m \cos(\omega x + \phi)$, avec $T = 50$, $\phi = 10$ et $x_m = 2$



II. Oscillateur libre typique : le cas du ressort



- Vérifions tout d'abord que l'on ait bien une position d'équilibre stable…

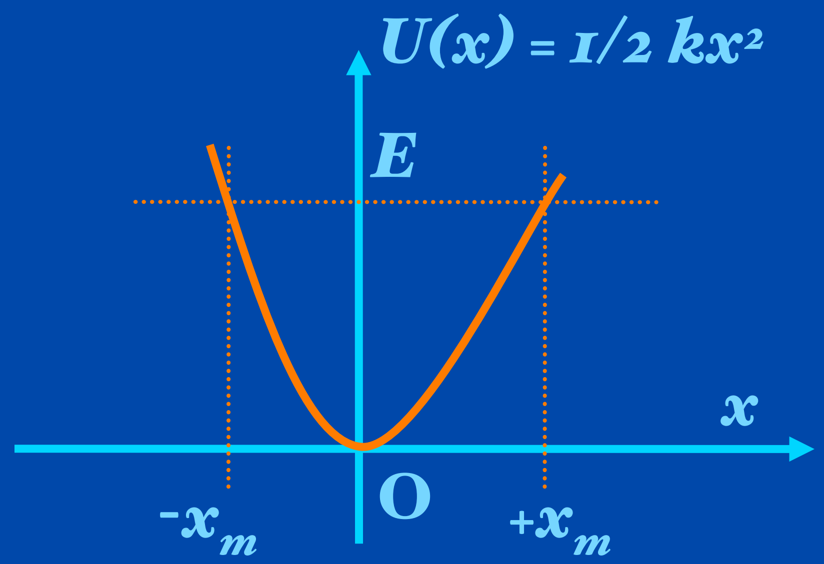
$$U = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow U' = kx \Rightarrow U'' = k$$

Or : $U' = 0 \Rightarrow x_e = 0$

et : $U''(x_e = 0) = k > 0$

donc : on a bien une position d'équilibre stable !

- On a donc :



C'est-à-dire un mouvement oscillant…
Que valent donc *x(t)* et *T* (période de l'oscillation) ?

Il y a conservation de l'énergie mécanique au cours du temps, c'est-à-dire :

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E} = 0$$

or :

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

autrement dit :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

(Remarque : voir Ex. 3.2 TD#0...)

Afin de calculer la dérivée de E par rapport au temps, il convient donc de calculer celles de x^2 et de $\dot{x}^2$

$$\frac{dx^2}{dt} = \frac{dx^2}{dx}\frac{dx}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} = 2x\dot{x}$$

$$\frac{d\dot{x}^2}{dt} = \frac{d\dot{x}^2}{d\dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} = 2\dot{x}\ddot{x}$$

Donc :

$$\dot{E} = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Il existe une autre façon de démontrer cette dernière relation, il suffit pour ce faire d'écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée au système ici présent, on obtient alors immédiatement :

$$-kx = m\ddot{x}$$

D'où, à nouveau :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

(Remarque : Ex. 1 TD#4...)

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On reconnaît là l'équation harmonique avec :

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = +\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Qui représente la pulsation. D'où l'expression de la période des oscillations :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(NB : période indépendante de l'amplitude des oscillations!)

Et l'on a (solution de l'équation harmonique) :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

avec :

$$x_m = \text{amplitude des oscillations}$$

$$\omega = \text{pulsation} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\phi = \text{phase a l'origine}$$

D'où également :

$$\dot{x}(t) = -\omega \ x_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

(Remarque : Ex. 3.3 TD#0…)

Quant à l'amplitude x_m et la phase à l'origine ϕ, elles sont déterminées par les conditions initiales sur la position x, i.e. par $x_0=x(t=0)$, et la vitesse $v=x\bullet$, i.e. par $v_0=v(t=0)$. On a donc :

$$x_0 = x_m \cos\phi$$

$$v_0 = -\omega x_m \sin\phi \Rightarrow \frac{v_0}{\omega} = -x_m \sin\phi$$

D’où :

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = x_m^2 \Rightarrow x_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

On remarque donc que l’amplitude x_m n’est pas forcément égale à la valeur initiale de la position x_o. Elle l’est seulement et uniquement si la vitesse initiale v_o est nulle.

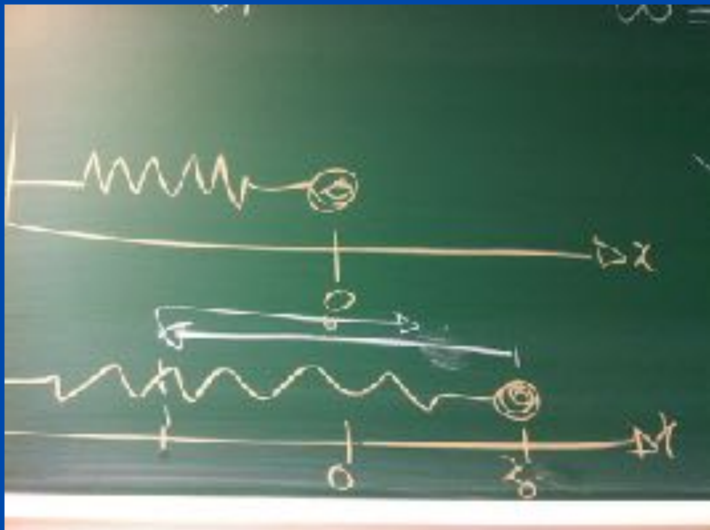
D’autre part, x_m est égale à v_o/w si $x_o=o$.

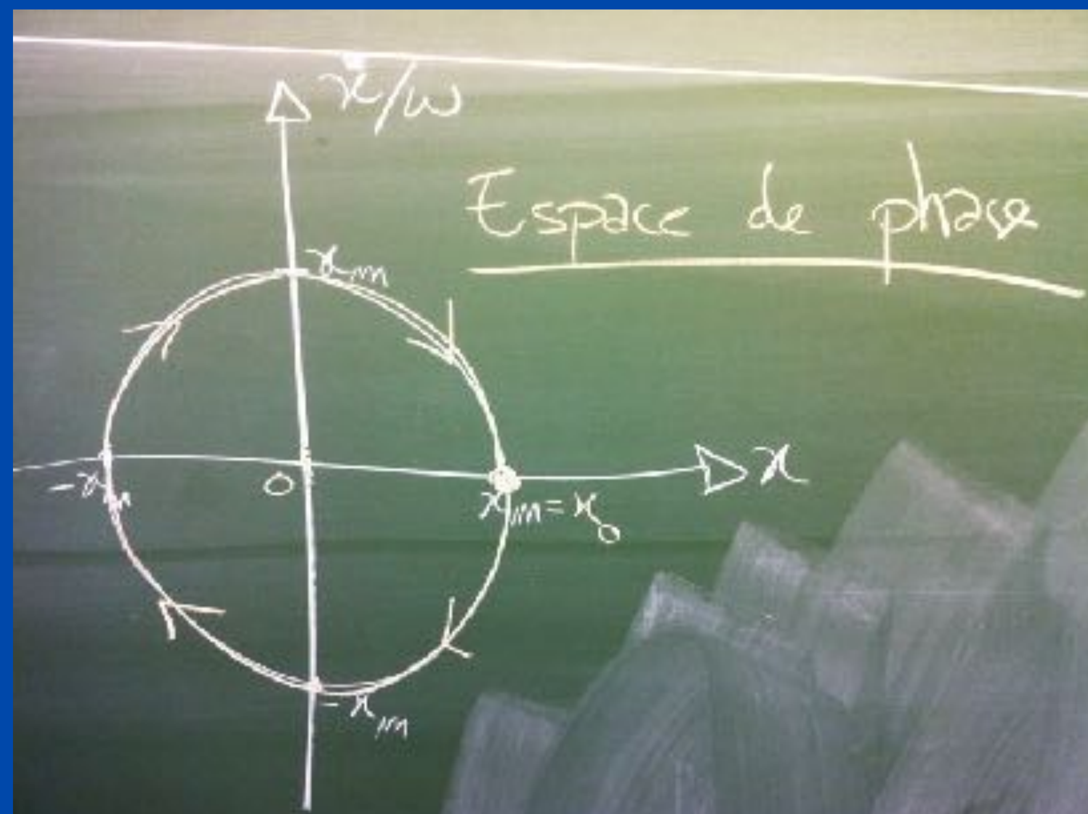
On peut aussi diviser par la position initiale (si x_o est non-nulle!) l'expression de la vitesse initiale sur la pulsation, d'où :

$$\frac{v_0}{x_0\omega} = -\tan\phi \Rightarrow \phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{x_0\omega}\right)$$

On a donc bien retrouvé l'amplitude x_m et la phase à l'origine ϕ en fonction des conditions initiales.

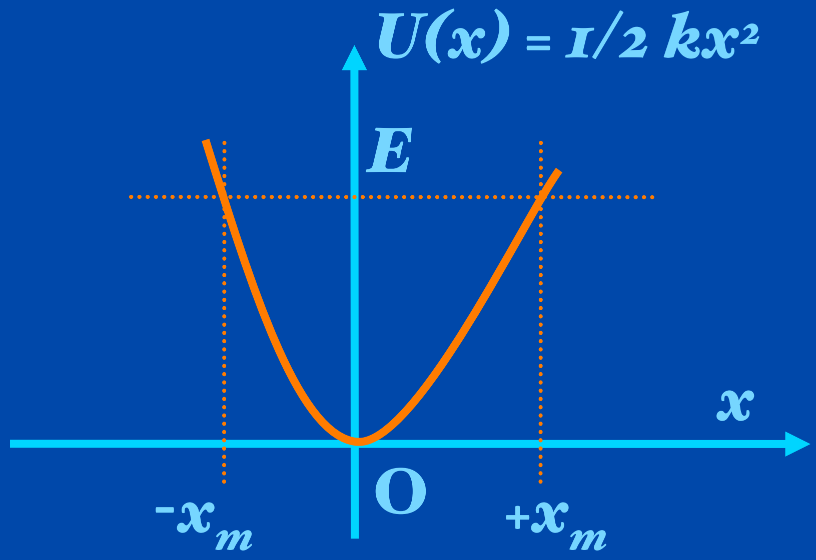
Remarque 1 : Espace de phase !!





Remarque 2 : On a enfin, pour les valeurs de x où v s'annule (i.e. en $-x_m$ et $+x_m$), E_c qui s'y annule également.

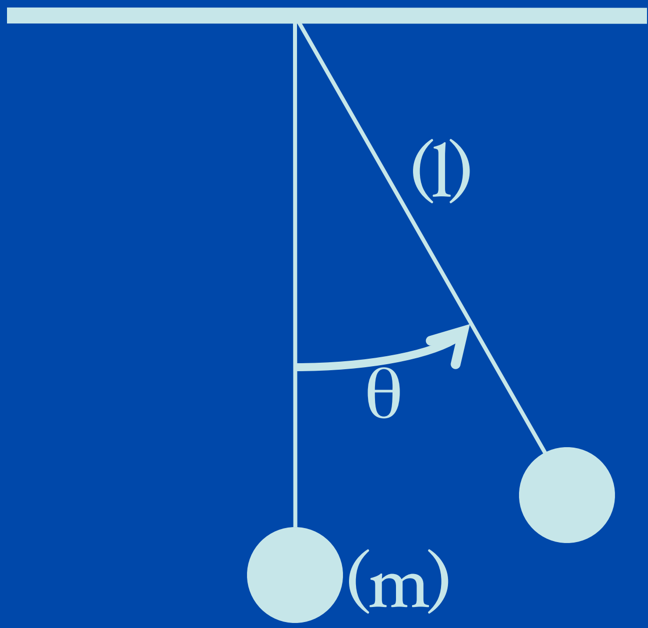
D'où, en ces points : $E_c=0$, i.e. : $E=U$, et donc :



$$E = \frac{1}{2}kx_m^2$$

Ce qui signifie que l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique dépend directement de l'amplitude.

III. Le cas du pendule simple



$$U(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$$

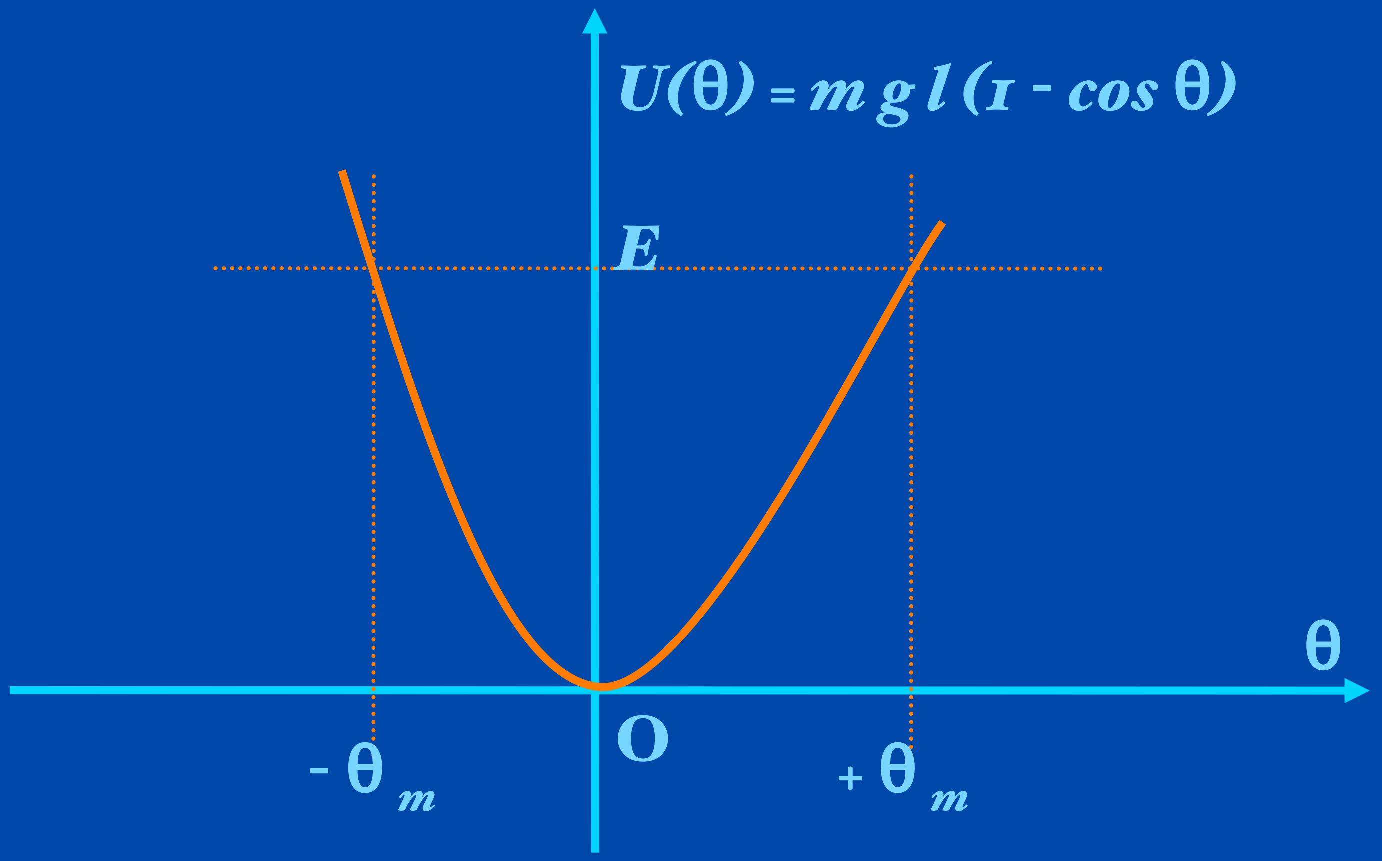
$$\Rightarrow U'(\theta) = mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow U''(\theta) = mgl\cos\theta$$

(Remarque : Ex.3.3 TD#0 et Ex.7 TD#4...)

Donc : $\theta_e = 0$, car :

$$U'(0) = 0 \quad \text{et} \quad U''(0) = mgl > 0$$



Et l'on a :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta), \ \text{car} \ v = l\dot{\theta}$$

Invoquer la conservation de l'énergie par rapport au temps revient à écrire alors :

$$\dot{E} = 0 \Rightarrow ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\sin\theta\,\dot{\theta} = 0$$

D'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

... qui n'est pas une équation harmonique à cause de la présence du sinus...

Le pendule simple n'est donc pas, dans le cas général, un oscillateur harmonique !

Mais regardons de près le cas particulier des petites oscillations du pendule (oscillations de faible amplitude) (voir aussi Ex. 3.4 TD#0...) :

$$\theta \text{ petit} \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$$

$$[NB: \ \sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \ \frac{\pi}{6} = 0.52]$$

D'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

... qui est bien une équation harmonique, avec :

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Rappel : développements limités de Taylor (autour d'une valeur donnée) :

$$f(x)|_{x\simeq x_0} \simeq f(x)|_{x=x_0} + \frac{df}{dx}|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}|_{x=x_0}(x-x_0)^n$$

=> développement de Taylor de sin(x) autour de x=0, au 2d ordre :

$$\sin(x)|_{x\simeq 0} \simeq sin(0) + \cos(0)\ x + \frac{1}{2}(-sin(0))\ x^2 \Rightarrow sin(x)|_{x\simeq 0} \simeq x$$

(c'est-à-dire un peu plus que 0 !)

=> développement de Taylor de cos(x) autour de x=0, au 2d ordre :

$$\cos(x)|_{x\simeq 0} \simeq cos(0) + (-\sin(0))\ x + \frac{1}{2}(-\cos(0))\ x^2 \Rightarrow \cos(x)|_{x\simeq 0} \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$$

(c'est-à-dire un peu moins que 1 !)