Gravitation

I - Préliminaire : les moments

- Produit vectoriel :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \otimes \vec{V}_2$$

direction : **w** perpendiculaire au plan (**v1,v2**).

sens : **v1,v2,w** forment un trièdre direct.

module : w = v1 v2 sin α.

- Moment d'une force :

$$\vec{\Gamma_O} = \vec{OA} \otimes \vec{F}$$

mesure la capacité d'une force à faire tourner un système.

Γ_0=**OA_0 F_0** sin(0)=**0** => **F_0** ne fait pas tourner l'écrou.

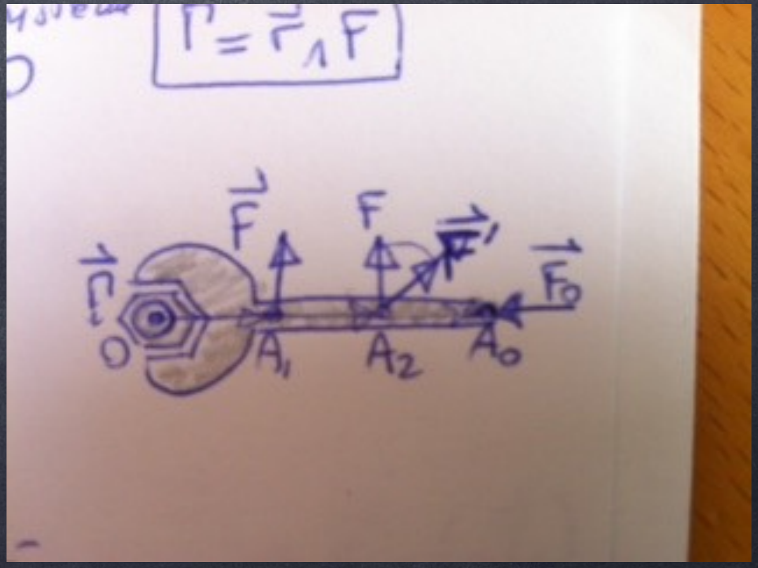
Γ_1=**OA_1 F_1** sin(π/2)=**OA_1 F**

Γ_2=**OA_2 F >** Γ_1 (car OA_2>OA_1)

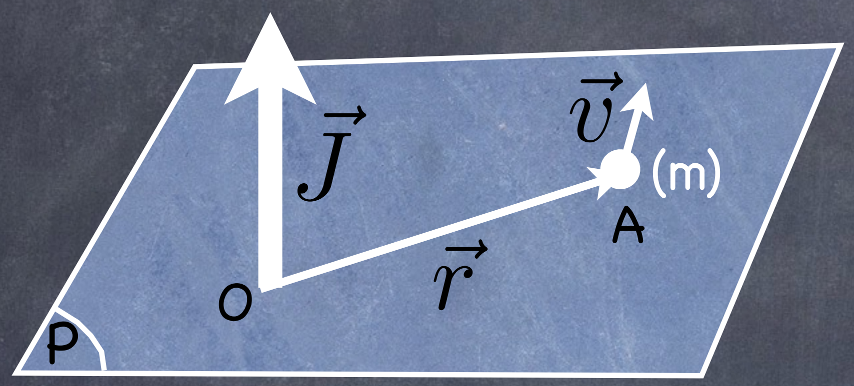
=> A_2 plus efficace que A_1 à faire tourner l'écrou.

Γ'_2=**OA_2 F'** sin(α), avec 0<α<π/2 et F'=F => ||Γ'_2||<||Γ_2||

=> **F'** moins efficace que **F** à faire tourner l'écrou.



- Moment angulaire d’une masse ponctuelle (**J**) :



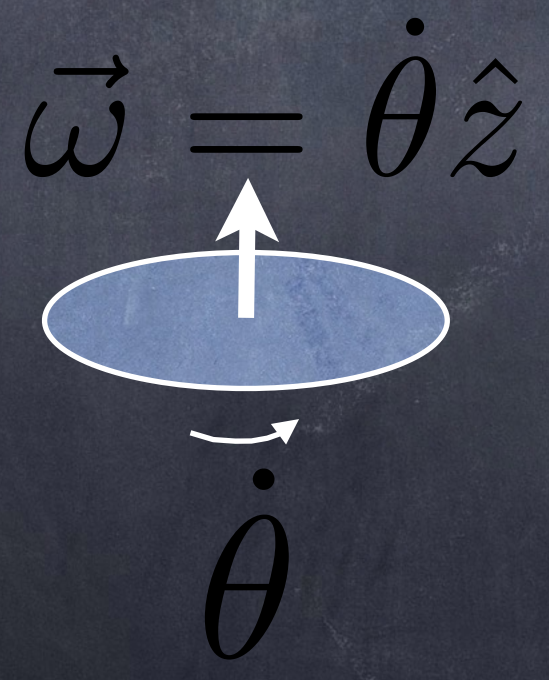
$$\vec{J} = m\vec{r} \otimes \vec{v} = \vec{r} \otimes \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \otimes \vec{v} + m\vec{r} \otimes \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{r} \otimes \vec{a} = \vec{\Gamma}$$

- Solide en rotation autour d'un axe de symmétrie :

$$E_c(\text{solide en rotation}) = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2, \ \text{avec} : I = \sum_i m_i r_i^2$$

Disque en rotation :



$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{z}$$
$$\vec{J} = I\dot{\theta}\hat{z} = I\vec{\omega}$$
$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{J}}{dt} \Rightarrow \Gamma_z = I\ddot{\theta}$$

- En résumé :

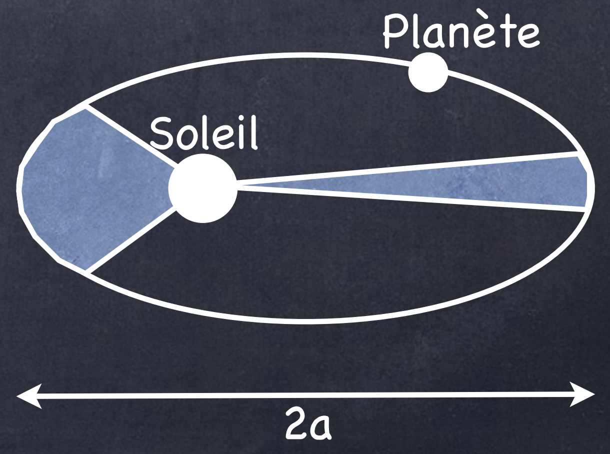
$$E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \qquad \vec{J} = I\vec{\omega} \qquad \vec{\Gamma} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

qui est à mettre en parallèle avec :

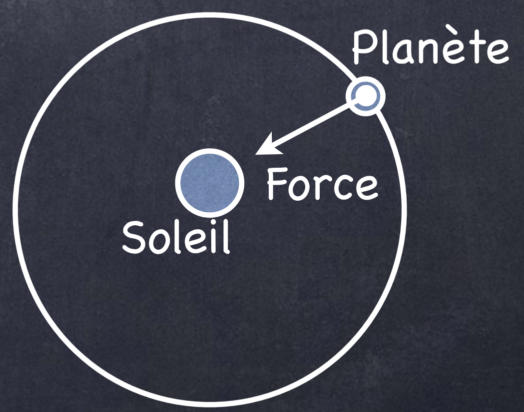
$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \vec{p} = m\vec{v} \qquad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

II - Force gravitationnelle

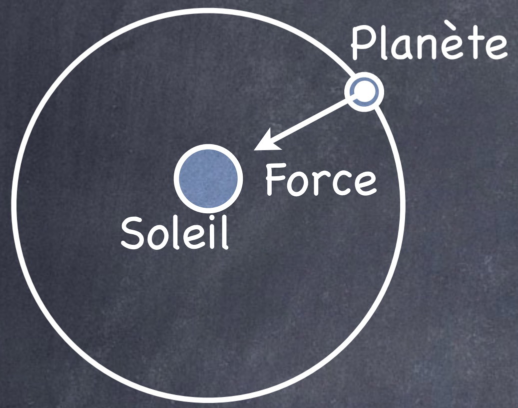
- 1ères observations des planètes jusqu'à -3000...
- Kepler (1571-1630) analyse les données de Tycho-Brahé (qui a passé sa vie à observer le mouvement des planètes) => énoncé de 3 lois expérimentales :
  - L'orbite est elliptique et le Soleil en est un foyer.
  - Loi des aires : la surface balayée pendant un temps Δt est toujours la même.
  - T^2/a^3 est une constante (k).



- Mais : pourquoi les planètes se déplacent ?
  - Hooke : le Soleil exerce une force attractive sur les planètes.
    - Pas intuitif : force à distance, sans contact.
(Descartes, p.ex., excluait toute notion d'interaction à distance.)
    - Cette force attractive est centrale, pour satisfaire la loi des aires.
(car si la force est centrale, la surface balayée est identique.)
  - Halley, observant la comète éponyme (1684), en déduit que si le mouvement est circulaire, la 3° loi de Kepler ($T^2/R^3=k$) implique que F est proportionnelle à $1/r^2$.



- Halley :
3° loi de Kepler => F prop. à $1/r^2$ (pour un mvt circ.)



$$F = m\,\frac{v^2}{R}$$

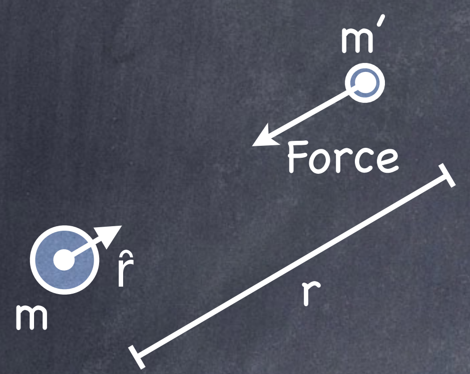
$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\Rightarrow F = \frac{m4\pi^2 R^2}{T^2 R} = \frac{m4\pi^2}{k}\frac{1}{R^2}$$

- Par contre : Halley n'arrive pas à montrer la même chose pour un mouvement elliptique...

- Il va voir Newton qui avait observé une comète en 1664 (20 ans avant, alors qu'il avait 21 ans, comme Halley quand il vient le voir) pour prendre conseil auprès de lui. Halley pousse ainsi Newton à publier ses fondamentaux «Principia» (2 ans plus tard, en 1686)...

- On sait maintenant que :



Force gravitationnelle $\vec{F}$:

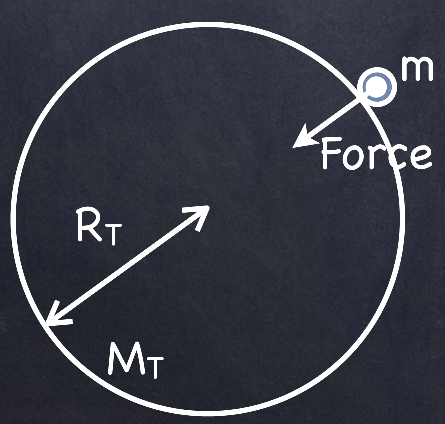
$\star$ Attractive et centrale : $\vec{F} = -Gmm'\dfrac{\hat{r}}{r^2}$.

$\star$ $\|\vec{F}\| = F = Gmm'\dfrac{1}{r^2}$, avec : $G = 6.67\ 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$.

$\star$ Conservative : $U = -Gmm'/r$, et E se conserve.

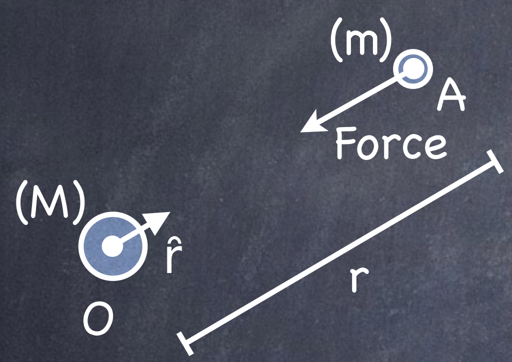
- (Détermination de G : Cavendish)

- Sur Terre :



$$F = G\,\frac{M_T m}{R_T^2} = m\ g = \text{le poids !}$$

III - Mouvement sous l'action d'une force gravitationnelle



- On va souvent prendre : M le Soleil et m la Terre, ou M la Terre et m un satellite, avec M>>m.
- M>>m : on considère M immobile, ce qui n'est pas strictement exact (il faudrait considérer le mouvement par rapport au centre de gravité).
- Relation fondamentale de la dynamique (i.e. 3° loi de Newton) =>

$$m\ddot{\vec{r}} = -G\ M\ m\ \frac{\hat{r}}{r^2} = -G\ M\ m\ \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -GMm\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

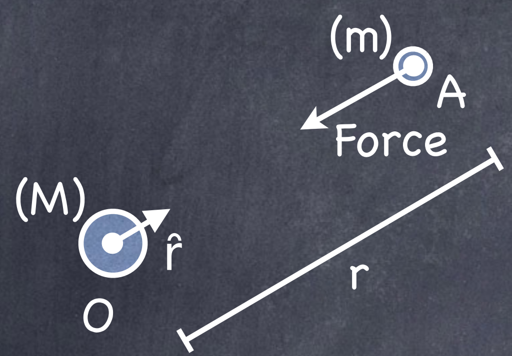
$$\text{et } m\ddot{y} = -GMm\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\text{et } m\ddot{z} = -GMm\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

=> 3 équations différentielles au second ordre, couplées...

=> problème compliqué, que l'on va simplifier grâce aux lois de conservation.

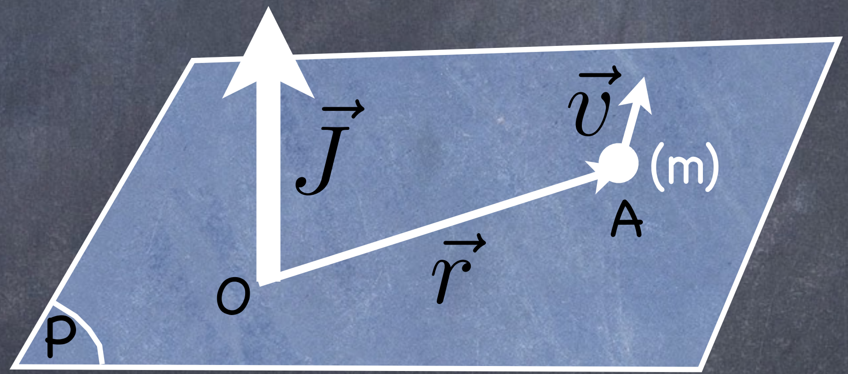
- F est une force centrale => F est dirigée vers O



$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_O = \vec{OA} \otimes \vec{F} = \vec{0} \text{ car } \vec{OA} \text{ et } \vec{F} \text{ paralleles}$$
$$\Rightarrow \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{J} = \vec{\text{cste}}$$

=> **J**, le moment cinétique (voir plus bas), est donc constant en direction, en sens et en module.

- Or : $$\vec{J} = m\,\vec{r} \otimes \vec{v}$$



- Et : J est perpendiculaire au plan

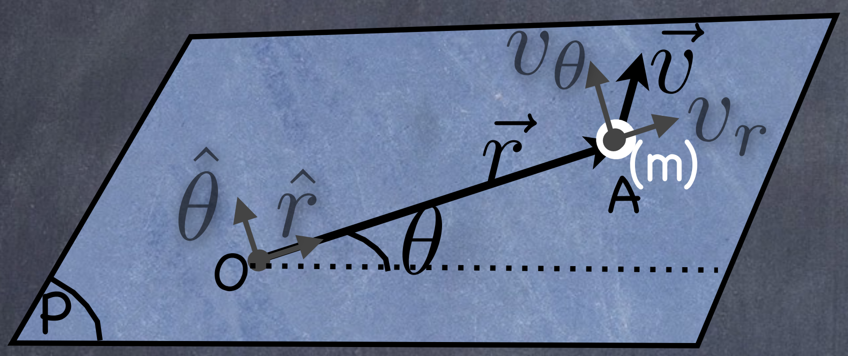
=> mouvement reste dans le plan défini par **r** et **v**
=> on n'a plus besoin de x,y,z...
deux coordonnées suffisent (et on va prendre r et θ).

- À θ fixé, r varie de dr :

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \Rightarrow \vec{v_r} = \dot{r}\hat{r}$$

- À r fixé, θ varie de dθ :

$$v_\theta = r\ \frac{d\theta}{dt} = r\ \dot{\theta} \Rightarrow \vec{v_\theta} = r\dot{\theta}\hat{\theta}$$



- On a donc :

$$\vec{v} = \dot{r}\ \hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = \left(\dot{r}, r\dot{\theta}\right)$$

- Et comme J est constant :

$$J = m\ r\ v\ \ \sin\alpha,\ \text{avec}\ \alpha\ \text{l'angle entre}\ \vec{r}\ \text{et}\ \vec{v}$$

$$\text{et}\ \ \sin\alpha = \frac{r\dot{\theta}}{v} \Rightarrow J = m\ r^2\ \dot{\theta} = \text{cste}$$

- F conservative => E se conserve =>

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \text{cste} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{C}{r}, \text{avec } C = GMm$$

- Et donc :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{J}{mr^2}\right)^2 - \frac{C}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{C}{r} = \text{cste}$$

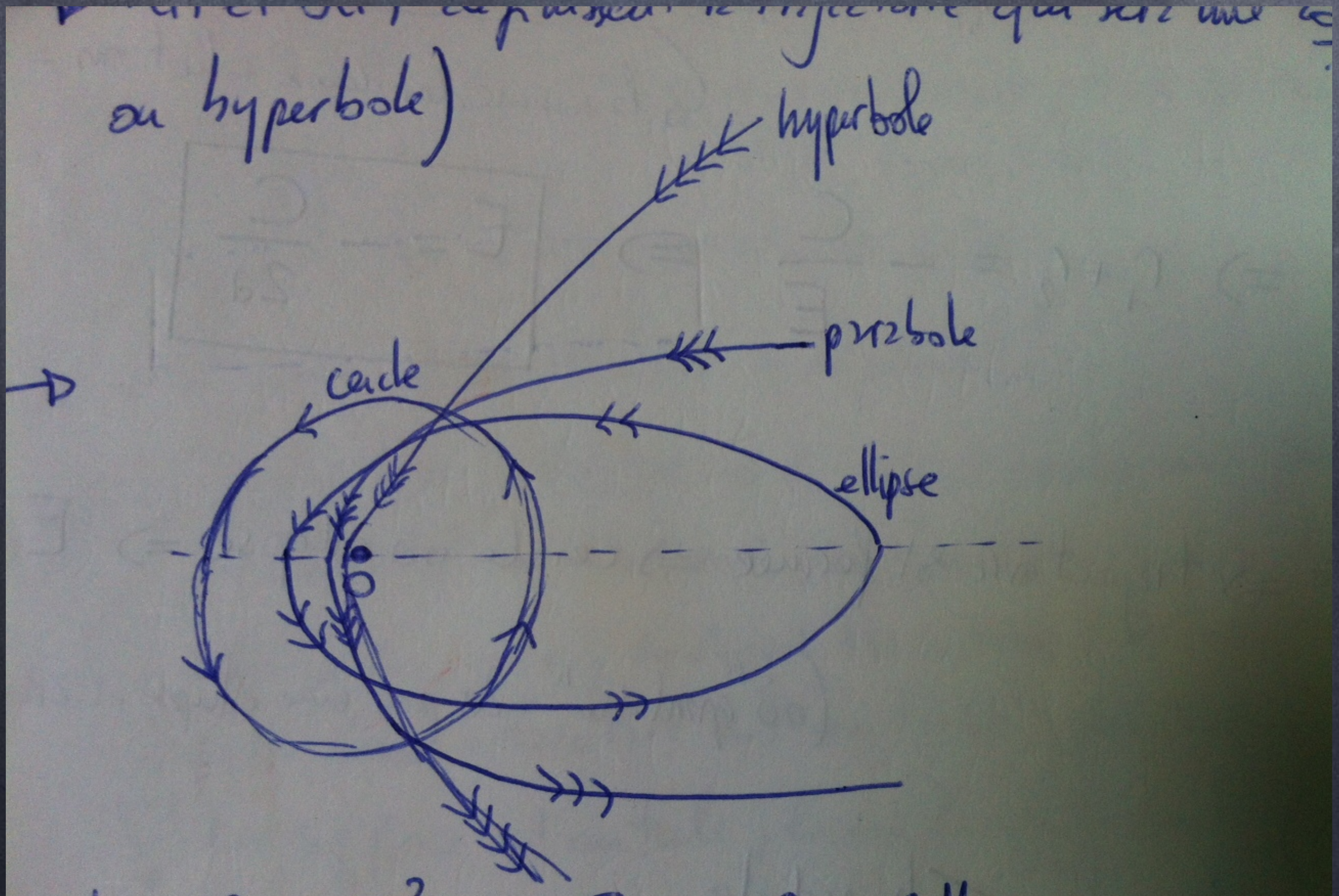
qui est une équa. diff. du 1er ordre à partir de laquelle on va pouvoir trouver r(t) plus facilement qu'avec les 3 équa. diff. du second ordre en x,y,z...

- On a aussi une 2de équa. diff. : $$\dot{\theta} = \frac{J}{mr^2}$$

à partir de laquelle trouver θ(t).

(Et les 2 équations différentielles sont découplées.)

- $r(t)$ et $\theta(t)$ définissent la trajectoire qui sera une conique (une courbe qui coupe un cône de révolution) :
  - Un cercle : $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow (x/r)^2+(y/r)^2=1$.
  - Ou une ellipse : $(x/a)^2+(y/b)^2=1$.
  - Ou une parabole : $y=ax^2+bx+c$.
  - Ou une hyperbole : $(x/a)^2-(y/b)^2=1$.



- On a :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{C}{r}, \text{ avec } C = GMm$$

Le mouvement est dans le plan, pas le long d'un seul axe, mais formellement c'est identique au mouvement à un seul degré de liberté :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

=> on peut dire ici aussi que le mouvement existe là où E est supérieure ou égale à U… Tout se passe comme si :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r), \text{ avec : } U_{\text{eff}}(r) = \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{C}{r}$$

Or : min(U)=U_{eff}(r0)=-C/(2r0) , avec r0=J^2/(mC)

Donc : mouvement que si E>=U_{eff}(r0) …/…

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - U_{\text{eff}}(r_0) \geq 0$$

Donc : mouvement possible que si $E>=U_{eff}(r0)$...
Plusieurs cas sont alors possibles :

$$\star\, E < -\frac{C}{2r_0} : \text{ mouvement impossible.}$$

$$\star -\frac{C}{2r_0} \leq E < 0 : \text{ trajectoire fermee} \Rightarrow \text{cercle ou ellipse.}$$

$$\star\, E \geq 0 : \text{ trajectoire ouverte} \Rightarrow \text{parabole ou hyperbole.}$$