

# Euler, the historical perspective

Eberhard Knobloch

## Jonathan Swift

- Elephants are drawn always smaller than life, but a flea always larger.

- Introduction
- 1. The fast-rising scientist
- 2. Euler's (1707-1783)  
publications/posthumous works
  - a. Subjects
  - b. Monographs, textbooks
- 3. Daily life
- 4. Euler's work in celestial mechanics
  - a. Research program
  - b. Three body problem
- Epilogue

## The fast-rising scientist

- 1720 13 years old: enrollment
- 1721 14 years old: Bachelor
- 1722 14 y.o.: Opponent (prof. of logic)
- 1722 15 y.o.: Opponent (prof. hist. of law)
- 1723 16 y.o.: A.L.M. (Master)
- 1725 18 y.o.: First paper (isochr. curves)
- 1726 19 y.o.: Paper on ship's masts (2. Pr.)
- 1727 19 y.o.: Habilitation thesis
- 1727 20 y.o.: Beginning of work in St. P.

*Quod felix fructuque sit*

Q. F. F. Q. S.  
DISSERTATIO PHYSICA  
**DE SONO,**

QUAM  
*ANNUENTE NUMINE DIVINO*  
JUSSU MAGNIFICI ET SAPIENTISSIMI PHI-  
LOSOPHORUM ORDINIS

PRO  
*VACANTE PROFESSIONE PHYSICA*

Ad d. 18. Febr. A. MDCCXXVII.

In Auditorio Juridico hora 9.

*Publico Eruditorum Examine subiectis*

**LEONHARDUS EULERUS**

A. L. M.

*Respondens*

*Praestantissimo Adolescente*

**ERNESTO LUDOVICO BURCARDO**

Phil. Cand.



BASILEÆ,

---

Typis E. & J. R. THURNISIORUM, Fratrum.



272. Hoc quidem veritati minus videtur consentaneum; vix enim apparet ratio, cur corpus celeritate sua infinite magna, quam in  $C$  acquisivit, in aliam potius plagam quam in  $CB$  sit progressurum, praesertim cum huius celeritatis infinitae directio sit secundum hanc plagam. Quicquid autem sit, hic calculo potius quam nostro iudicio est fidendum atque statuendum, nos saltum, si fit ex infinito in finitum, penitus non comprehendere. Eo autem magis in hac sententia confirmamur simili exemplo, quod infra plene explanatum occurret (§ 655), si est  $n = -2$ ; hoc enim casu corporis in  $C$  pervenientis celeritas quoque est infinita et secundum  $CB$  directa; nihilo vero minus corpus non ultra  $C$  progreditur, sed subito ex  $C$  versus  $A$  revertitur pariter ac accesserat. Ex quo perspicitur, quoties celeritas in  $C$  existat infinita, iudicium de ulteriori corporis motu esse suspendendum. Tam diu autem hoc tantum fiat, quoad ad motus curvilineos perveniamus; ex iisque enim, qui sint rectilinei, evidentius colligetur (§ 762). Neque enim calculus, qui tum instituetur, obnoxius est huic incommodo, ut a hypothesis dissentiat; sed quaqua versus vis centripeta aequalis ponetur non refragante calculo.



## Euler's publications /posthumous works

- About 800 published works (ca. 80 % in Latin, 20 % in French, some in German or Russian)
- Posth. Works in St. Petersburg (microfilms in Basel, some in Berlin): 2 vols. Moscow /Leningrad 1962/1965
- 12 math. Notebooks (1725-1783):2300 sheets of paper (nearly excl. in Latin):Russian survey by E.K. in 1988, German version in 1989, English version in 2007; few pages have been publ., digitization planned



# Subjects

*Ex.*

- Differential and integral calculus
- Log., expon., trig. Functions ( $e, \pi$ )
- Differential equ. (o., p.)
- Ell. funct. and integrals
- Hypergeometric int.
- Classical geometry *Polyhedra*
- Number theory
- Algebra
- Continued fractions
- Zeta and other (E.) prod.
- Infinite series, products  
*Basel problem*
- Divergent series
- Mechanics of particles
- Mech. of solid bodies
- Calculus of variations
- Optics (theory a. practice)
- Hydrostatics
- Hydrodynamics *EE 250*
- Astronomy
- Lunar and planetary mot.
- Topology
- Graph theory *Königsberg problem*
- Philosophy, theology
- Shipbuilding, engineering
- *Music theory*



St. Petersburg 1727-1741

26.

- 1736 *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*
- 1738 *Einleitung zur Rechenkunst*
- 1739 *Tentamen novae theoriae musicae*
- (1749) *Scientia navalis*  
1738

## Berlin 1741-1766

- 1744 Methodus inveniendi
- 1744 Theoria motuum planetarum et cometarum
- 1745 Neue Grundsätze der Artillerie
- 1748 Introductio in analysin infinitorum
- 1753 Theoria motus lunae
- 1755 Institutiones calculi differentialis
- 1765 Theoria motus corporum
- (1760-1762) Lettres à une Princesse d'Allemagne
- (1763) Institutiones calculi integralis

## Berlin 1741-1766

- 1744 Methodus inveniendi
- 1744 Theoria motuum planetarum et cometarum
- 1745 Neue Grundsätze der Artillerie
- 1748 Introductio in analysin infinitorum
- 1753 Theoria motus lunae
- 1755 Institutiones calculi differentialis
- 1765 Theoria motus corporum
- (1760-1762) Lettres à une Princesse d'Allemagne
- (1763) Institutiones calculi integralis



## St. Petersburg 1766-1783

- (1768-1772) Lettres à une Princesse d'Allemagne
- (1768-1770, 1794) Institutiones calculi integralis
- 1768 Dioptrica
- 1770 Vollständige Anleitung zur Algebra
- 1772 Theoria motuum lunae
- 1773 Théorie Complète de la Construction et de la Manoeuvre des Vaissaux

## Rapport 9.

I-M 101

Ayant lu l'écrit de M. Heibault, où il prétend avoir  
trouvé la quadrature du cercle, je doute fort qu'il  
on ait jamais vu une pièce aussi absurde sur ce sujet, que  
celle-ci. D'abord il prétend que la circonférence d'un cer-  
cle étant exprimée par 60, son diamètre sera 19, dont  
la fausseté est évidente de soi-même. Mais ce qui  
montre la plus profonde ignorance dans la Géométrie  
est que quand même la proportion de 60 à 19 seroit  
juste, toutes les conclusions qu'il en tire, ne feroient  
pas d'être grossièrement fausses. Car pour trouver  
l'aire du cercle il ne multiplie pas la circonférence  
par le quart du diamètre, mais par la sixième par-  
tie de la circonférence même; Soit il l'aie tiré  
d'un cercle, dont la circonférence est 60, exprimée  
par 226, or on fait que dans ce cas l'aire est plus  
grande que 286.

L'auteur commet encore une faute nouvelle, également  
grossière, quand il veut trouver la surface d'un globe  
laquelle est, à ce qui est démontré dans tous les éléments,  
quatre fois plus grande que l'aire d'un grand cercle.  
Mais l'auteur se fait un plaisir de se tromper.

Cela suffit pour faire voir, que l'auteur n'a pour  
seulement aucune idée de la question, dont il s'agit,  
mais qu'il est même entièrement ignorant dans les prin-  
cipes élémentaires de Géométrie.

Berol. le 15 Mars

1750



L. Euler



Uranus 1781  
4.



1736 Mechanics

VIR ILLUSTRIS



Euler 1741: It consists generally of a thorough understanding of the so-called Newtonian philosophy which does not only explain all already known celestial motions but also enables the astronomers to make discoveries and to recognize more precisely the true motions of all celestial bodies. (aim, profit)

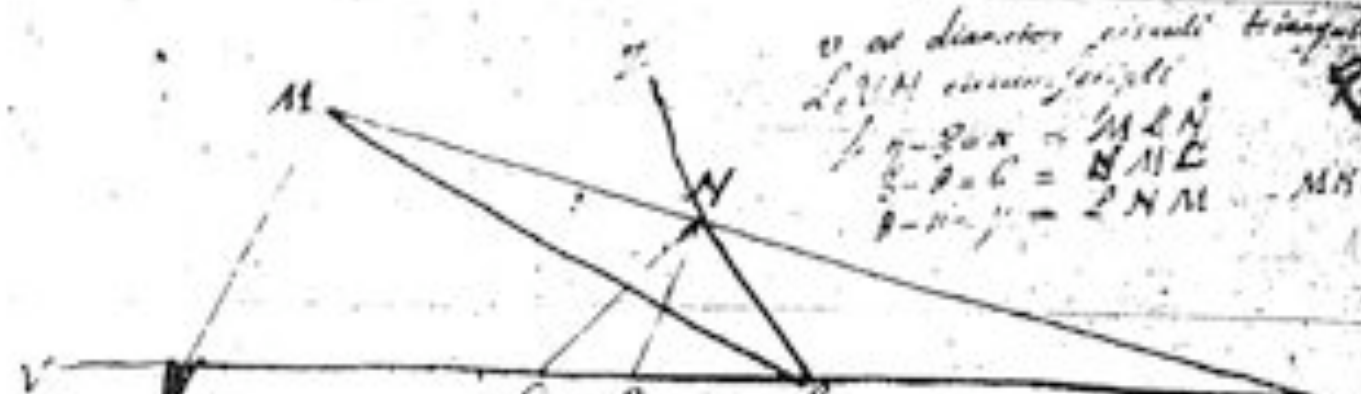
12  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50

Ex quo corporum coelestium leges motus a NEWTONO <sup>invenit</sup> detectae sunt, Astronomiae ad summum fastigium evehendae spes omnis in celebratissimi de motu trium corporum se secundum istas leges attrahentium problematis perfecta resolutione ponenda est. Quamquam enim numerus corporum <sup>et orbium</sup> in planetari nostro systemate sese mutuo attrahentium maximus imo infinitus sit; tamen, cum evolutio motus plurium corporum, nisi motu trium expedito, sperari non possit, hic casus tanquam fons et fundamentum perficiendae siderum scientiae spectari debet. Verum hoc ipsum de tribus corporibus secundum leges NEWTONI sese attrahentibus problema cum sensu generali acceptum vires ingenii humani fere transcendere videatur; eius solutionem ita tentarunt Geometrae, ut illud sub variis ad minimum restrictionibus expedire viamque hoc modo ad solutionem generalem munire anniterentur. In binis igitur praesentibus dissertationibus Ill. Auctor eiusmodi duo resolvit problemata, quae illi tam sunt affinia, ut, his non expeditis, de illo resolvendo ne cogitari quidem possit. In priori scilicet eum problematis istius celebratissimi casum examini Ill. Auctor subiecit, quo tria corpora sese mutuo attrahentia rectilineo motu feruntur, qui, quanquam primus est et omnium facillimus, tamen hucusque perfecte resolvi non potuit, hic vero iam ad aequationes differentiales primi gradus inter ternas variables singularibus quibusdam artificiiis est reductus. In posteriori autem dissertatione Ill. Auctor motum corporis ad duo centra virium fixa in ratione reciproca duplicata distantiarum attracti investigavit; atque huius quidem argumenti primam partem, cum scilicet motus in eodem cum binis virium centris plano fieri supponitur, in superiori Comment. Tomo ita evolvit, ut non solum orbitae descriptae constructionem ope quadraturae curvae cuiusdam admodum sim-



Mathematical description  
↓  
Formulation of the fundamental  
Newtonian law by a system of  
simultaneous ordinary differential  
equations (of second order)  
↓  
Solution of differential equations  
↓  
Solvability depends on insufficient  
development of mathematical  
analysis





v est diameter circuli trianguli  
 L'AM circumscripti  
 $\angle \eta - \beta = \alpha = \angle M \angle N$   
 $\beta - \rho = \epsilon = \angle M \angle P$   
 $\rho - \eta = \zeta = \angle N \angle M$

Invenisse tria expressiones L'AI, N permuta a l'obstantibus inveniendi  
 sol. Sit recta linea OQ V ducta ad perpendicularitatem a. l'is. L'AI, N  
 puncta tria inveniuntur, anguli  $\sqrt{L'AI} = \beta$ ,  $\sqrt{L'N} = \eta$ ,  $\sqrt{OM} = \rho$   
 L'AI = x, L'N = y, et AN = z, sunt anguli  
 $M \angle N = \eta - \beta$ ,  $L'MN = \beta - \rho$ ,  $L'NM = \rho - \eta$  s.  $L'NO = \eta - \rho$   
 idcirco  $x = v \sqrt{\eta - \beta}$ ;  $y = v \sqrt{\beta - \rho}$ ;  $z = v \sqrt{\rho - \eta}$

$$\begin{aligned}
 z^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos(\eta - \beta); \quad y^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos(\beta - \rho); \quad x^2 = y^2 + z^2 + 2yz \cos(\rho - \eta) \\
 \text{Substituendo } z &= \frac{v}{\sqrt{\rho - \eta}} \text{ in } z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(\eta - \beta) \text{ habetur} \\
 2xy \cos \beta + x^2 \cos \rho &= -\frac{1}{2} v^2 \left( \frac{x}{y} \sqrt{\eta - \beta} - \frac{y}{x} \sqrt{\beta - \rho} \right) \\
 2xy \cos \rho - x^2 \cos \beta &= -\frac{1}{2} v^2 \left( \frac{x}{y} \sqrt{\eta - \beta} + \frac{y}{x} \sqrt{\beta - \rho} \right) \\
 2xy \cos \eta + y^2 \cos \rho &= -\frac{1}{2} v^2 \left( \frac{x}{y} \sqrt{\eta - \beta} - \frac{x}{y} \sqrt{\beta - \rho} \right) \\
 2xy \cos \eta - y^2 \cos \rho &= -\frac{1}{2} v^2 \left( \frac{x}{y} \sqrt{\eta - \beta} + \frac{x}{y} \sqrt{\beta - \rho} \right) \\
 2z^2 \cos \rho + z^2 \cos \beta &= -\frac{1}{2} v^2 \left( -\frac{z}{y} \sqrt{\eta - \beta} + \frac{z}{x} \sqrt{\beta - \rho} \right) \\
 2z^2 \cos \rho - z^2 \cos \beta &= -\frac{1}{2} v^2 \left( -\frac{z}{y} \sqrt{\eta - \beta} - \frac{z}{x} \sqrt{\beta - \rho} \right)
 \end{aligned}$$

Ergo habentur 6 sequentes equationes:

$$\begin{aligned}
 2v^2 \cos \beta / (\eta - \beta) + 2v^2 \cos \rho / (\beta - \rho) + v^2 \cos \rho / (\rho - \eta) &= \frac{-2v^2}{v^2} \left( \frac{x \sqrt{\eta - \beta}}{y \sqrt{\beta - \rho}} - \frac{x \sqrt{\beta - \rho}}{y \sqrt{\eta - \beta}} \right) \\
 2v^2 \cos \rho / (\beta - \rho) + 2v^2 \cos \eta / (\rho - \eta) + v^2 \cos \eta / (\eta - \beta) &= \frac{-2v^2}{v^2} \left( \frac{x \sqrt{\eta - \beta}}{y \sqrt{\rho - \eta}} - \frac{x \sqrt{\rho - \eta}}{y \sqrt{\eta - \beta}} \right) \\
 2v^2 \cos \beta / (\eta - \beta) + 2v^2 \cos \rho / (\beta - \rho) + v^2 \cos \eta / (\rho - \eta) &= \frac{-2v^2}{v^2} \left( \frac{x \sqrt{\beta - \rho}}{y \sqrt{\rho - \eta}} - \frac{x \sqrt{\rho - \eta}}{y \sqrt{\beta - \rho}} \right)
 \end{aligned}$$

Hinc sequitur fore:

$$\frac{x^2 \cos \rho}{x} + \frac{y^2 \cos \eta}{y} + \frac{z^2 \cos \beta}{z} = 0$$

at  $2v^2 \cos \rho + 2v^2 \cos \eta = \frac{-2v^2}{v^2} \cos \rho$   
 $2v^2 \cos \rho + 2v^2 \cos \eta = -\frac{2v^2}{v^2} \cos \rho$   
 $\frac{2v^2}{v^2} = -\frac{2v^2}{v^2} \cos \rho$   
 $\frac{2v^2}{v^2} = -\frac{2v^2}{v^2} \cos \rho$

## Clairaut (1759)

Intègre maintenant qui pourra !  
J'ai trouvé les six équations que  
je viens de trouver dès les  
premiers temps que j'ai envisagé  
le problème des trois corps, mais  
je n'ai jamais fait que peu  
d'efforts pour les résoudre, parce  
qu'elles m'ont toujours paru peu  
traitables.



# Solution methods for differential equations

- Separation of variables
- Integrating factor (Euler's multiplier)
- Power series expansion



## Special cases - particular solutions - special methods

- 1. The problem of two gravitational centres: Euler E 301, 337, 328
- Lagrange: The two papers read in 1768
- Mécanique analytique 1788
- 2. The iteration method
- Euler E 398

Je suis extrêmement ravi, Monsieur, que mes recherches sur le mouvement d'un corps attiré à deux centres de forces fixes ai[en]t mérité votre attention; mais vous n'avez vu que ce qui a été inséré dans les Mem[oires] de Berlin et qui regarde principalement les courbes algébriques que ma solution renferme [7]. Or j'en ai composé encore deux autres mémoires, dont l'un se trouve dans le X<sup>e</sup> Vol[ume] de nos Commentaires et l'autre dans le XI<sup>e</sup> [8]. Dans le dernier, j'ai réussi aussi à déterminer le mouvement du dit corps, lorsqu'il ne se meut pas dans le même plan et je suis extrêmement curieux d'apprendre, à quel égard vous avez donné à ce problème une plus grande étendue. Si vous avez réussi de donner à l'un des deux centres de force un mouvement autour de l'autre, quoiqu'il ne fût que circulaire et uniforme, je le regarderai comme la plus importante découverte dans l'Astronomie [9].

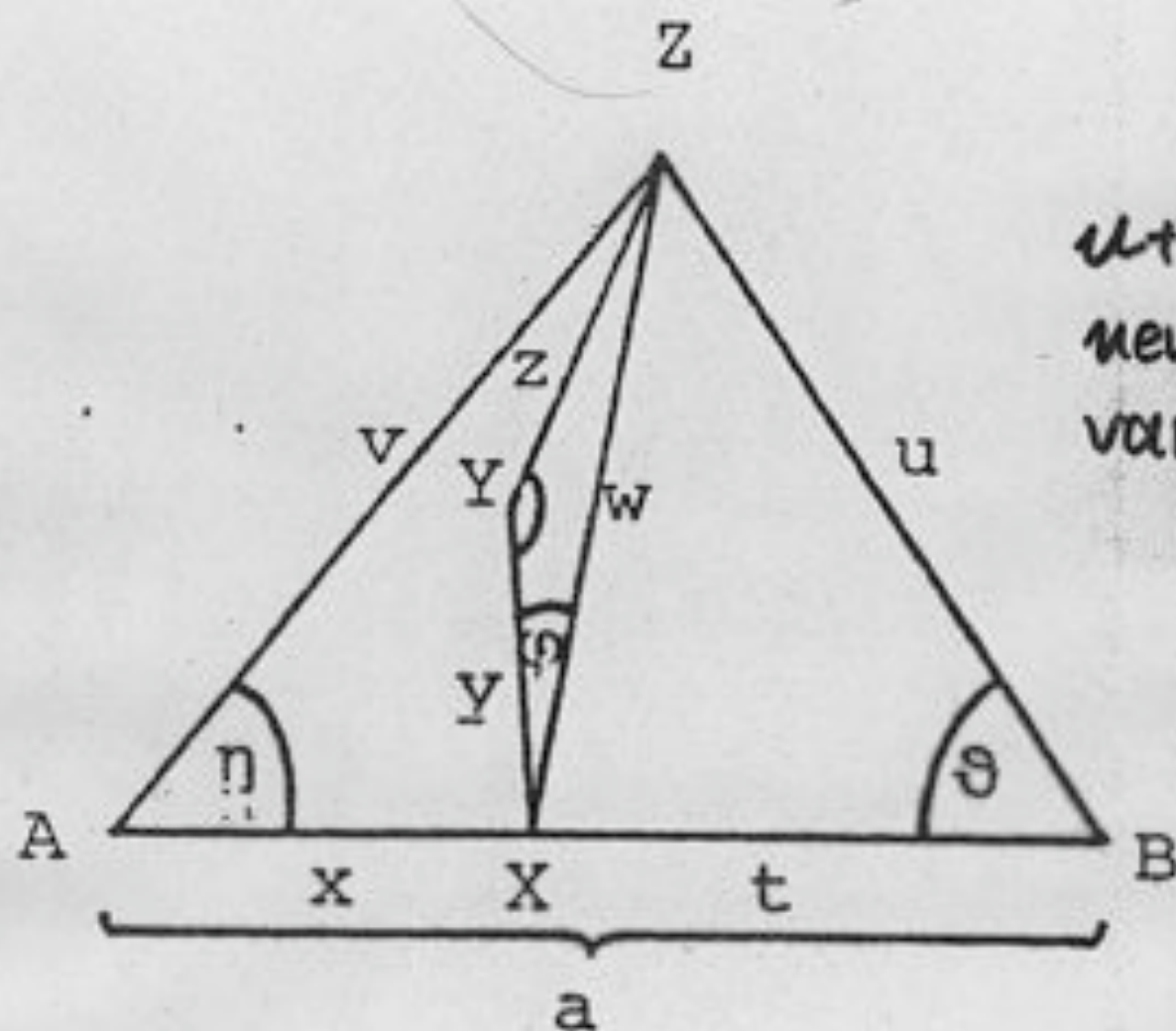
L'impression de mon Calcul intégral avance assez passablement et le premier tome est déjà achevé, que je tâcherai de vous envoyer au plutôt et peut-être accompagné du second; il y en aura 3 Volumes en tout.

Je n'ai reçu qu'un exemplaire du III<sup>e</sup> Volume des Mémoires de Turin et je vous en ai déjà, si je ne me trompe, présenté mes très humbles remerciements [10]. Comme je suis hors d'état de lire et d'écrire moi-même, je suis d'autant plus curieux de profiter des écrits des autres, mais principalement de vos recherches, qui sont toujours marquées d'un très éminent degré de profondeur. Je vous prie donc de me conserver toujours votre amitié et bien-

1 Dans cette lettre, le mot fonction est écrit «function».

Euler → Lagrange 1767

E 328 3rd paper  
 1763 (1767)

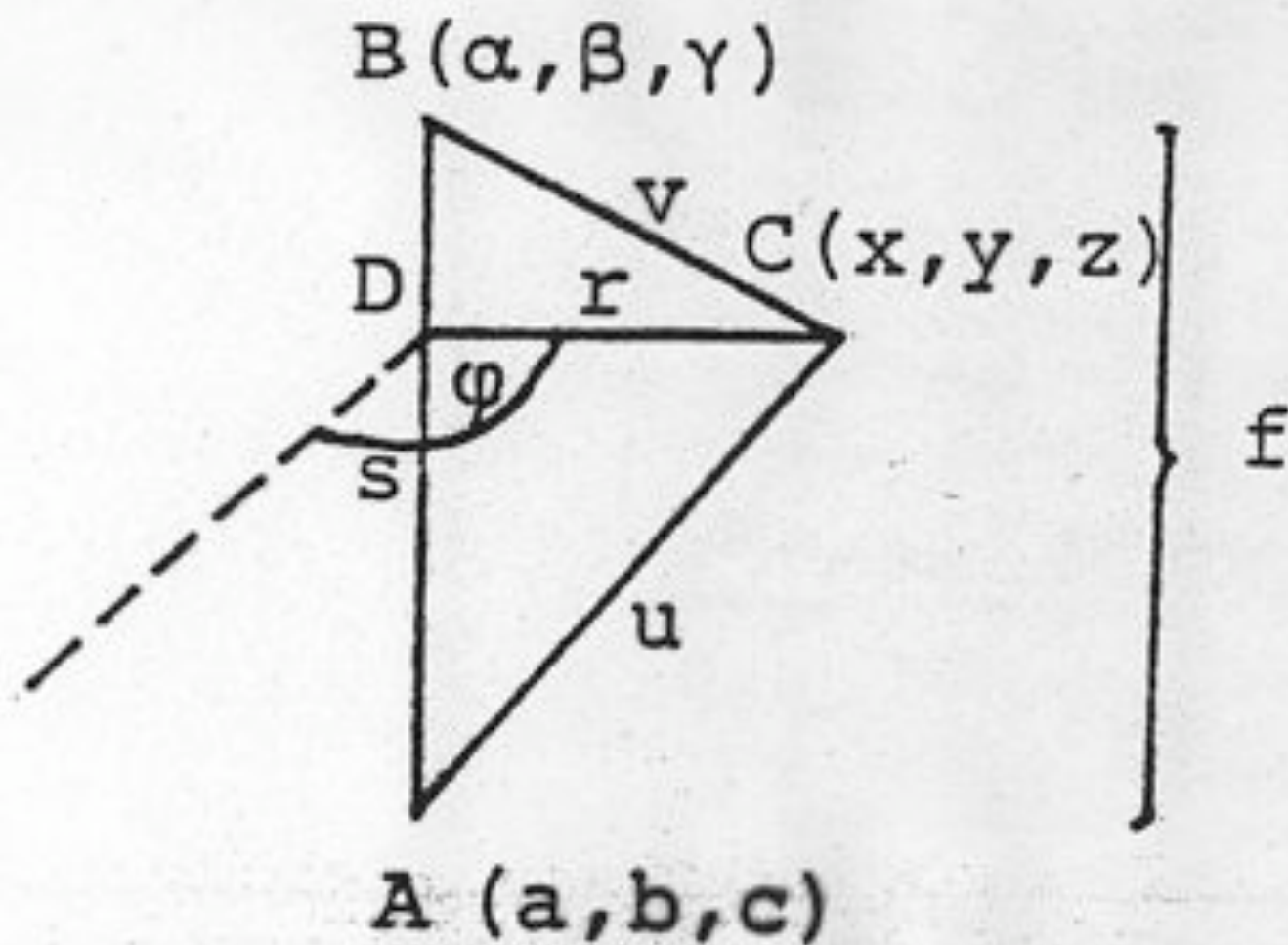


$u+v, u-v$   
 new  
 variables

- 1)  $\varphi$  constant  $\rightarrow$  ellipse / hyperbola  
 2)  $\varphi + \theta$  cases: hyperb. conoid  
 ellipt. spheroid



Lagrange



$$u + v = p$$

$$u - v = q$$

→ Euler

- 1. Let the forces be given which push a celestial body. Find the differential equations which include all the changes of its motion caused by the forces
- 2. Let the position and motion of a body be known for a given moment together with the forces which are acting on the body. Determine its position and motion after a very short space of time has elapsed

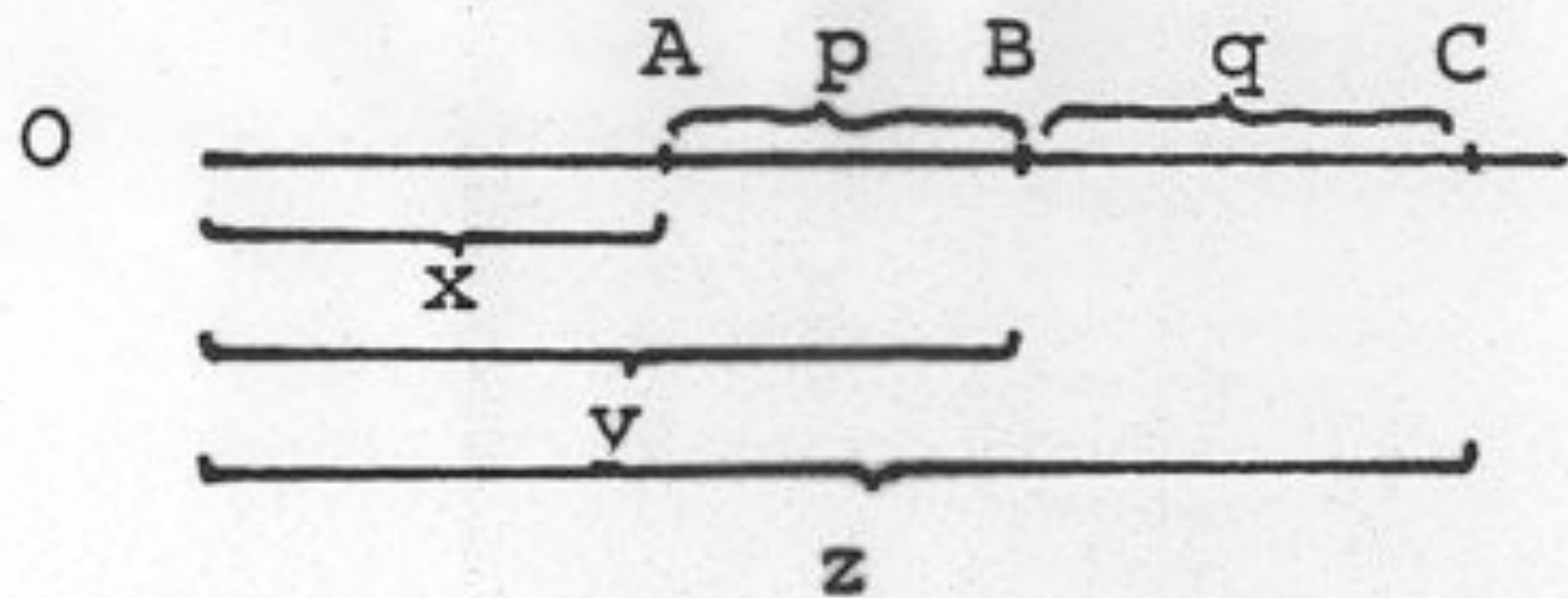
## The first particular solution

- Euler: Collinear configuration
- E 304, 327, 400, 626 *4 papers*
- Special case: The ratios of the distances between the 3 bodies remain constant
- Lagrange: 1. The distances remain constant
- Special cases: 1.1 Triangular configuration
- 1.2 Collinear configuration
- 2. The ratios of the distances remain const.
- 2.1 Triang. Conf., 2.2 Coll. Config.
- Lagrange 1772 (1777)



E 327

1763



equ. of 5th degree  
for  $\alpha$

angular velocity  $\Rightarrow$  mutual distances  
(periodical functions of time)

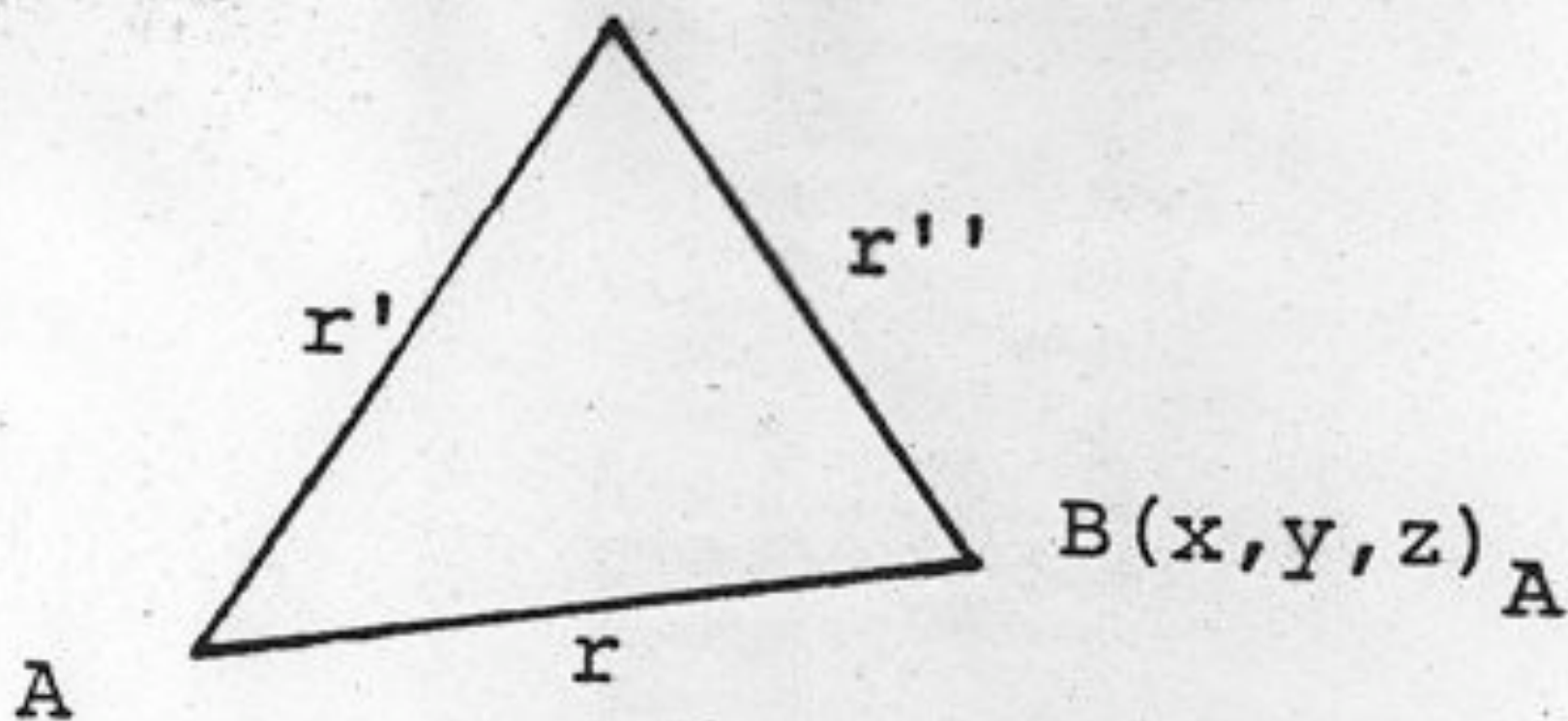
Lagrange

First particular solution

Essai sur le problème des trois corps 1772  
(1777)

after the publication  
of the first 3 public.  
of Euler

$C(x', y', z')$   $A$   $(x'', y'', z'')$



if  $r' + r'' = r \rightarrow$  Euler's coll. conf.  
" equ. of 5th d.



# motion

constant  
distances

constant  
ratios of d.

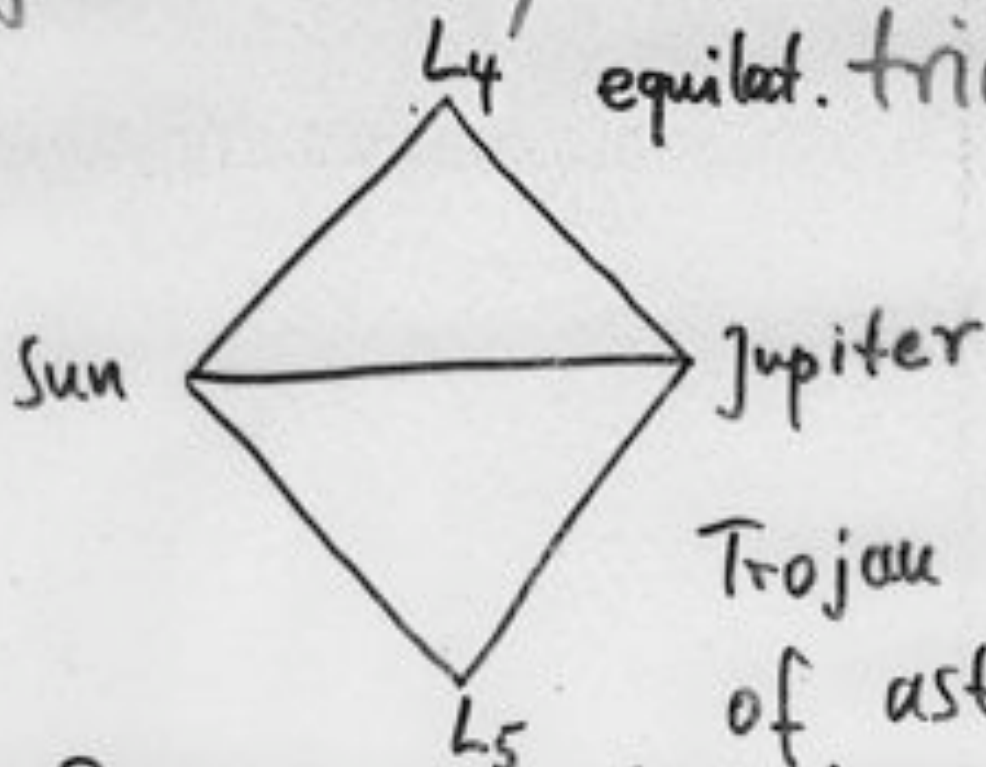
coll.  
configur.

triang.  
config.

coll.  
config.

triang.  
config.

angular velocity  $\rightarrow$  size of  
equilat. triangle



Trojan group  
of asteroids

Achilles, Patrocles, Hector, Nestor

## Creative innovator

- New methods: Basel problem
- New ideas: divergent series
- New theories: theory of music
- New inquiries: lunar motion

# Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la lune

1772 (1777)

- Où l'on détermine toutes les inégalités auxquelles il est assujetti
- Vergil, Aeneid 3, 714f.
- Hic labor extremus longarum haec meta viarum,
- Hinc iam digressi, vestris appellimus oris.



## Eduard Fueter 1941

- For where mathematical reason did not suffice, for Euler began the kingdom of God.