HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

ANNE'E MDCCLV.

A BERLIN,
CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.
MDCCLVII.

Permis d'imprimer.

P. L. Moreau de Maupertuis,
Président.

CLASSE de Mathématique.

Principes généraux *de l'état de l'équilibre des fluides*, *par* M. EULER. 217

Principes généraux *du mouvement des fluides*, *par* M. EULER. 274

Continuation des Recherches *sur la théorie du mouvement des fluides*, *par* M. EULER. 316

Nouvelles Equations *pour la perfection de la théorie des Satellites de Jupiter, & pour la correction des longitudes terrestres, déterminée par les Observations des mêmes Satellites*, *par* M. *de* BARROS. 362

De la *Figure des supports d'une Voûte*, *par* M. AEPINUS. 386

Problême *sur la chûte des Corps*, *par* M. *de* KURDWANOWSKI. 394

Méthode *de trouver les logarithmes de chaque nombre positif, négatif, ou même impossible*, *par* Dom WALMESLEY. 397

Extrait *d'une Lettre de* M. d'ALEMBERT *à* M. FORMEY. 401

CLASSE de Philosophie Spéculative.

Mémoire *sur les premiers Principes de la Métaphysique*, *par* M. BEGUELIN. 405

Second Mémoire *sur les Principes de la Métaphysique*, *par* M. BEGUELIN. 424

Réflexions *sur les Allégories Philosophiques*, *par* M. FORMEY. 448

Sur *l'Identité Numérique*, *par* M. MERIAN. 461

La *Théologie de l'Etre, ou Chaine d'Idées de l'Etre jusqu'à Dieu*, *par* M. *de* PREMONTVAL. 476

PRINCIPES GÉNÉRAUX
DU MOUVEMENT DES FLUIDES.
PAR M. EULER.

I.

Ayant établi dans mon Mémoire précedent les principes de l'équilibre des fluides le plus généralement, tant à l'égard de la diverſe qualité des fluides, que des forces qui y puiſſent agir ; je me propoſe de traiter ſur le même pied le mouvement des fluides, & de rechercher les principes géneraux, ſur lesquels toute la ſcience du mouvement des fluides eſt fondée. On comprend aiſément que cette matiere eſt beaucoup plus difficile, & qu'elle renferme des recherches incomparablement plus profondes : cependant j'eſpère d'en venir auſſi heureuſement à bout, de ſorte que s'il y reſte des difficultés, ce ne ſera pas du côté du méchanique, mais uniquement du côté de l'analytique: cette ſcience n'étant pas encore portée à ce degré de perfection, qui ſeroit néceſſaire pour déveloper les formules analytiques, qui renferment les principes du mouvement des fluides.

II. Il s'agit donc de découvrir les principes, par lesquels on puiſſe déterminer le mouvement d'un fluide, en quelque état qu'il ſe trouve, & par quelques forces qu'il ſoit ſollicité. Pour cet effet examinons en détail tous les articles, qui conſtituent le ſujet de nos recherches, & qui renferment les quantités tant connues qu'inconnues. Et d'abord la nature du fluide eſt ſuppoſée connue, dont il faut conſidérer les diverſes eſpeces : le fluide eſt donc, ou incompreſſible, ou compreſſible. S'il n'eſt pas ſusceptible de compreſſion, il faut diſtinguer deux cas, l'un où toute la maſſe eſt compoſée de parties homogenes, dont la denſité eſt partout & demeure toujours la même, l'autre

tre où elle est composée de parties héterogenes ; & ici on doit savoir la densité de chaque espece, & la proportion du mêlange. Si le fluide est compressible, & que sa densité soit variable, il faut connoitre la loi, selon laquelle son élasticité dépend de la densité ; si c'est uniquement de la densité, que l'élasticité depend, ou encore d'une autre qualité, comme de la chaleur, qui est propre à chaque particule du fluide, au moins pour chaque instant du tems.

III. On doit aussi supposer, que l'état du fluide dans un certain tems soit connu, & que je nommerai l'état primitif du fluide : cet état étant quasi arbitraire, il faut premièrement connoitre la disposition des particules, dont le fluide est composé, & le mouvement qui leur aura été imprimé, à moins que dans l'état primitif le fluide n'ait été en repos. Cependant le mouvement primitif n'est pas entièrement arbitraire, tant la continuité que l'impénétrabilité du fluide y mettent une certaine limitation, que je rechercherai dans la suite. Mais souvent on ne connoit rien d'un état primitif; comme lorsqu'il s'agit de déterminer le mouvement d'une riviere ; & alors les recherches se bornent pour l'ordinaire à trouver l'état permanent, auquel le fluide parviendra enfin sans subir de nouveaux changemens. Or, ni cette circonstance, ni l'état primitif, ne changent rien dans les recherches qu'on aura à entreprendre, & le calcul demeurera toujours le même : ce n'est que dans les intégrations, où il y faut avoir égard pour déterminer les constantes, que chaque integration amene.

IV. En troisième lieu, il faut compter parmi les données les forces externes, à la sollicitation desquelles le fluide est assujetti : je nomme ici ces forces externes, pour les distinguer des forces intestines, dont les particules du fluide agissent les unes sur les autres, vû que celles-cy sont le principal objet des recherches à faire ensuite. On peut donc supposer, que le fluide ne soit sollicité par aucune force externe, ou seulement par la gravité naturelle, qu'on regarde partout comme de la même quantité, & même direction. Or, pour rendre les recherches plus

 géné-

générales, je considérerai le fluide sollicité par des forces quelconques, soit qu'elles soient dirigées vers un ou plusieurs centres, soit qu'elles suivent, tant par rapport à leur quantité qu'à leur direction, une autre loi quelconque. De ces forces on ne connoit immédiatement que leurs actions accélératrices, sans avoir égard aux masses sur lesquelles elles agissent. Je n'introduirai donc dans le calcul que les forces accélératrices, d'où il sera aisé de tirer les véritables forces motrices, en multipliant celles-là en chaque cas par les masses, qui en reçoivent la sollicitation.

V. Passons maintenant aux articles, qui contiennent ce qui est inconnu. Or, pour connoitre bien le mouvement, dont le fluide sera porté, il faut déterminer pour chaque instant & pour chaque lieu, tant le mouvement que la pression du fluide qui s'y trouve : & si le fluide est compressible, il en faut outre cela definir la densité, en connoissant la-dite autre qualité, qui avec la densité concourt à déterminer l'élasticité ; laquelle étant contrebalancée par la pression du fluide, lui doit être estimée égale, tout comme dans le cas d'équilibre, où j'ai dévelopé plus soigneusement ces idées. On voit donc que le nombre des quantités, qui entrent dans la recherche du mouvement, est beaucoup plus grand, que dans le cas d'équilibre, puisqu'il faut introduire des lettres, qui marquent le mouvement de chaque particule, & que toutes ces quantités peuvent varier avec le tems. Donc, outre les lettres qui déterminent la situation de chaque point, qu'on peut concevoir dans la masse fluide, on doit aussi en faire entrer une, qui marque le tems déjà écoulé, & qui par sa variabilité puisse être appliquée à chaque tems proposé.

Fig 1. VI. Soit donc écoulé après un état primitif le tems $= t$, & que maintenant le fluide se trouve dans un état & mouvement, qu'il faut chercher. Quel que soit l'espace que le fluide occupe à présent, je commence par considérer un point quelconque Z, qui se trouve dans la masse fluide ; & pour faire entrer dans le calcul la situation de ce point Z, je le rapporte à trois axes fixes, OA, OB, & OC, perpendicudiculaires entr'eux au point O, & donnés de position. Que les deux axes OA & OB se trouvent dans le plan, que la Planche représente, & le troisième OC y soit perpendiculaire. Qu'on tire donc du point Z au plan AOB la perpendiculaire ZY, & du point Y à l'axe OA la normale YX pour avoir les trois coordonnées: OX $= x$, XY $= y$, & YZ $= z$, paralleles à nos trois axes. Pour chaque point conçu dans la masse fluide, ces trois coordonnèes x, y, & z, auront des valeurs déterminées, & en donnant à ces trois coordonnées successivement toutes les valeurs possibles, tant positives que négatives, on parcourra tous les points de l'espace infini, & partant aussi ceux, qui se trouvent dans l'epace, que le fluide occupe à chaque instant.

VII. En second lieu, je considére les forces accélératrices, qui agissent dans l'instant présent sur la particule du fluide, qui se trouve en Z; or, quelles que soient ces forces, on les peut toujours réduire à trois, qui agissent suivant les trois directions ZP, ZQ, & ZR, paralleles à nos trois axes OA, OB, & OC. En prenant donc l'unité pour marquer la force accélératrice de la gravité naturelle, soient P, Q, & R, les forces accélératrices, qui agissent sur le point Z suivant les directions ZP, ZQ, & ZR; & ces lettres P, Q, & R, marqueront des nombres absolus. S'il y a toujours les mêmes forces, qui agissent dans le même point de l'espace Z, les quantités P, Q, & R, seront exprimées par des certaines fonctions des trois coordonnées x, y & z; mais en cas que les forces variassent aussi avec le tems t, elles renfermeront encore le tems t. Or je suppose ces fonctions connuës, puisqu'on doit compter les forces sollicitantes parmi les quantités connuës, soit qu'elles dépendent uniquement des variables x, y, z, ou encore du tems t.

VIII. Que r exprime maintenant la chaleur au point Z, ou cette autre qualité, qui outre la densité influë sur l'élasticité, au cas que le fluide soit compressible, & r doit aussi être considérée comme une fonction des trois variables x, y, z, & du tems t, puisqu'il pour-

 roit

roit arriver, qu'elle changeât avec le tems dans le même point Z de l'eſpace ; on pourra donc regarder cette fonction comme connuë. Soit enſuite pour le tems préſent la denſité de la particule du fluide, qui ſe trouve en Z, $= q$, marquant par l'uuité la denſité d'une certaine matiere homogene, dont je me ſervirai pour meſurer les preſſions par des hauteurs, comme je l'ai expliqué plus amplement dans mon Mémoire ſur l'équilibre des fluides. Soit donc auſſi pour le tems préſent la preſſion du fluide au point Z exprimée par la hauteur $= p$, qui marquera donc auſſi l'élaſticité ; & puiſque la nature du fluide eſt ſuppoſée connuë, on ſaura le rapport, que la hauteur p tient aux quantités q & r. Or p & q ſeront de même des fonctions des quatre variables x, y, z, & t, mais inconnuës; mais quand le fluide n'eſt pas incompreſſible, la preſſion p eſt indépendante de la denſité q, & l'autre qualité r n'entre point du tout en conſidération.

IX. Enfin, quel que ſoit le mouvement, qui convient à l'inſtant préſent à l'élément du fluide, qui ſe trouve en Z, il pourra auſſi être décompoſé ſuivant les directions ZP, ZQ, & ZR, paralleles à nos trois axes. Soient donc u, v, & w les viteſſes de ce mouvement décompoſé ſelon les trois directions ZP, ZQ, & ZR, & il eſt clair que ces trois quantités doivent auſſi être conſidérées comme des fonctions des quatre variables x, y, z, & t. Car ayant trouvé la nature de ces fonctions, ſi l'on met le tems t conſtant, on connoitra par la variabilité des coordonnées x, y, & z, les trois viteſſes u, v, & w, & partant le vrai mouvement dont chaque élément du fluide eſt porté dans l'inſtant préſent ; & ſi l'on met conſtantes les coordonnées x, y, & z, & qu'on conſidére le ſeul tems t comme variable, on trouvera le mouvement, non d'un certain élément du fluide, mais de tous les élémens, qui paſſeront ſucceſſivement par le même point Z, ou on en connoitra à chaque tems le mouvement de cet élément du fluide, qui ſe trouvera alors dans le point Z.

X. Mais voyons auſſi quel chemin décrira l'élément du fluide, qui eſt à préſent en Z, pendant le tems infiniment petit dt ; ou à quel point

point il ſe trouvera un inſtant après. Or, ſi nous exprimons l'eſpace par le produit de la viteſſe & du tems, l'élément du fluide, qui eſt à préſent en Z, ſera porté dans la direction ZP par l'eſpace $= udt$, dans la direction ZQ par l'eſpace $= vdt$, & dans la direction ZR par l'eſpace $= wdt$. Donc, ſi nous poſons :

$$ZP = udt, \quad ZQ = vdt, \quad \& \quad ZR = wdt,$$

& qu'on acheve de ces trois côtés le parallelepipede, l'angle oppoſé à Z marquera le point, où l'élément du fluide en queſtion ſe trouvera après le tems dt, & la diagonale de ce parallelepipede, qui eſt $= dt\sqrt{(uu+vv+ww)}$, donnera le vrai chemin décrit, & partant la viteſſe de ce vrai mouvement ſera $= \sqrt{(uu+vv+ww)}$; & la direction ſe déterminera aiſément par les cotés de ce parallelipipede; car elle ſera inclinée au plan AOB d'un angle dont le ſinus $= \frac{w}{\sqrt{(uu+vv+ww)}}$, au plan AOC d'un angle dont le ſinus $= \frac{v}{\sqrt{(uu+vv+ww)}}$, & enfin au plan BOC d'un angle dont le ſinus eſt $= \frac{u}{\sqrt{(uu+vv+ww)}}$.

XI. Ayant déterminé le mouvement du fluide, qui ſe trouve à l'inſtant préſent au point Z, examinons auſſi celui d'un autre élément quelconque infiniment proche, qui ſoit en z, auquel point répondent les coordonnées $x+dx$, $y+dy$, & $z+dz$. Les trois viteſſes de cet élément ſelon les directions des trois axes ſeront donc exprimées par les quantités u, v, w, aprés qu'on y aura ſubſtitué $x+dx$, $y+dy$, & $z+dz$; ou après qu'on y aura ajouté leurs différentiels en poſant le tems t conſtant. Or entant qu'on met $x+dx$ au lieu de x, les incrémens de u, v, & w, ſont :

$$dx\left(\frac{du}{dx}\right); \quad dx\left(\frac{dv}{dx}\right); \quad \& \quad dx\left(\frac{dw}{dx}\right);$$

&

& entant qu'on met $y+dy$ au lieu de y les incrémens font :

$$dy\left(\frac{du}{dy}\right);\quad dy\left(\frac{dv}{dy}\right);\quad \&\quad dy\left(\frac{dw}{dy}\right);$$

& il en eſt de même à l'égard de la variabilité de z. Donc les trois viteſſes de l'élément du fluide, qui ſe trouve à préſent en z, feront

ſuivant la direction OA $= u + dx\left(\frac{du}{dx}\right) + dy\left(\frac{du}{dy}\right) + dz\left(\frac{du}{dz}\right)$

ſuivant la direction OB $= v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right) + dy\left(\frac{dv}{dy}\right) + dz\left(\frac{dv}{dz}\right)$

ſuivant la direction OC $= w + dx\left(\frac{dw}{dx}\right) + dy\left(\frac{dw}{dy}\right) + dz\left(\frac{dw}{dz}\right)$

XII. Ce ſont les viteſſes, qui conviennent à un élément du fluide en z, qui eſt infiniment proche du point Z, & dont le lieu eſt déterminé par les trois coordonnées $x+dx$, $y+dy$, & $z+dz$.
Fig. 2. Donc ſi nous prenons le point z en ſorte, que la ſeule x y ſoit changée de dx, les deux autres coordonnées y & z demeurant les mêmes que pour le point Z, les trois viteſſes de l'élément du fluide qui ſe trouve en ce point z, feront :

$$u+dx\left(\frac{du}{dx}\right);\quad v+dx\left(\frac{dv}{dx}\right);\quad w+dx\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

par leſquelles cet élément ſera transporté pendant le tems dt dans un autre point z', dont il s'agit de définir le lieu par rapport au point Z′, qui ſoit celui, auquel l'élément du fluide, qui étoit en Z eſt transporté pendant le même tems dt; & dont le lieu a été déterminé ci-deſſus (§. 10.). Pour connoitre ce point z', je remarque, que ſi les viteſſes de z étoient parfaitement les mêmes que celles de Z, le point z' tomberoit en p, de ſorte que la diſtance Z′p feroit égale & parallele à la diſtance Zz. Et puiſque par l'hypotheſe Zz eſt parallele à l'axe OA, & égale à dx, la ligne Z′p ſera auſſi $= dx$, & parallele à l'axe OA.

XIII.

XIII. Maintenant, puisque la viteſſe ſelon OA n'eſt pas u, mais $u + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$, par cette différence l'élément en queſtion ſera transporté de p & q, ſur la direction $Z'p$, de ſorte que $pq = dt\,dx\left(\frac{du}{dx}\right)$: il ſeroit donc en q, ſi les deux autres viteſſes étoient v & w. Mais puisque la viteſſe ſelon l'axe OB eſt $v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$, cette différence transportera notre élément de q & r, par l'eſpace $qr = dt\,dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$, & parallele à l'axe OB. Enfin l'incrément $dx\left(\frac{dw}{dx}\right)$ de la viteſſe w transportera l'élément de r en z', par la particule $rz' = dt\,dx\left(\frac{dw}{dx}\right)$, & parallele au troiſième axe OC. D'où je conclus que l'élément du fluide, qui occupoit la petite ligne droite Zz, ſera dans le tems dt transporté ſur la ligne $Z'z'$, qui ſera infiniment peu inclinée à l'axe OA, & dont la longueur à cauſe de $Z'q = dx\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right)$ ſera

$$dx\sqrt{\left(\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right)^2 + dt^2\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + dt^2\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)}.$$

Donc, en négligeant les termes, qui renferment le quarré de dt, la longueur de Zz' ne différera pas de $Z'q$, & on aura: $Z'z' = dx\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right)$, pour l'inclinaiſon de cette ligne à l'axe OA il ſuffit de remarquer, qu'elle eſt infiniment petite du premier degré, ou exprimée en ſorte $\alpha\,dt$.

XIV. Si la petite ligne Zz avoit été priſe $= dy$, & parallele à l'axe OB, par le même raiſonnement on trouveroit, que le fluide qui occupoit cette ligne fût transporté ſur une autre

$Z'z' = dy\left(1 + dt\left(\frac{dv}{dy}\right)\right)$, & dont l'inclinaiſon à l'axe OB fut auſſi infiniment petite. Et ſi l'on prenoit la ligne $Zz = dz$, & parallele au troiſième axe OC, le fluide qui l'occupoit ſeroit transporté ſur une autre ligne $Z'z' = dz\left(1 + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$, & qui ſeroit infiniment peu incliné à l'axe OC. Donc, ſi nous conſidérons un parallelepipede rectangle $ZPQRzpqr$ formé des trois côtés $ZP = dx$, $ZQ = dy$, & $ZR = dz$, le fluide qui occupoit cet eſpace ſera transporté pendant le tems dt à remplir l'eſpace $Z'P'Q'R'z'p'q'r'$, infiniment peu différent d'un parallelepipede rectangle, dont les trois côtés ſeront :

Fig. 3.

$$Z'P' = dx\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right)\ ;\ Z'Q' = dy\left(1 + dt\left(\frac{dv}{dy}\right)\right)\ ;\ Z'R' = dz\left(1 + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$$

Car les côtés ZP, ZQ, ZR, étant transportés en Z'P', Z'Q', Z'R', on ne ſauroit douter que le fluide contenu dans le premier eſpace ne ſoit transporté dans l'autre eſpace pendant le tems dt.

XV. A' préſent on pourra juger ſi le volume du fluide, qui a occupé le parallelepipede Zz, eſt devenu plus grand ou plus petit après le tems dt : on n'a qu'à chercher le volume ou la capacité de l'un & de l'autre de ces deux ſolides. Or le premier étant un parallelepipede rectangle formé des côtés dx, dy, dz, ſon volume eſt $= dx\,dy\,dz$; mais pour l'autre, dont les angles plans différent infiniment peu du droit, je remarque que ſon volume ſe trouve également en multipliant ces trois côtés ; car l'erreur qui réſulte de l'obliquité infiniment petite ſera contenuë en des termes, où l'élément du tems dt monteroit à deux dimenſions, qu'il eſt permis par conſéquent de négliger. Ce volume $Z'z'$ ſera donc exprimé en ſorte :

$$dx\,dy\,dz\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dy}\right) + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right).$$

Si

Si l'on avoit encore quelque doute ſur la juſteſſe de cette concluſion, on n'auroit qu'à lire ma Piece latine: *Principia motus fluidorum:* où j'ai calculé ce volume ſans rien négliger.

XVI. Donc, ſi le fluide n'eſt pas ſuſceptible de compreſſion, ces deux volumes doivent être égaux entr'eux, puiſque la maſſe, qui occupoit l'eſpace Zz, ne ſauroit être réduite, ni dans un plus grand, ni dans un plus petit eſpace. Mais, puiſque je me propoſe de traiter cette matiere dans toute la généralité poſſible, & que j'ai nommé la denſité en $Z = q$, conſidérant q comme une fonction des trois coordonnées & du tems, je remarque, que pour trouver la denſité en Z', il faut premièrement augmenter le tems t de ſon différentiel dt, enſuite le lieu Z' étant différent de Z, les quantités x, y, z, doivent être augmentées des petits eſpaces $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$; d'où la denſité en Z' ſera:

$$q + dt\left(\frac{dq}{dt}\right) + u\,dt\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\,dt\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\,dt\left(\frac{dq}{dz}\right),$$

& de là, puiſque la denſité eſt réciproquement proportionnelle au volume, cette quantité ſera à q, comme $dx\,dy\,dz$ à

$$dx\,dy\,dz\left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dy}\right) + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right).$$

Par conſéquent, en diviſant par dt, nous aurons cette équation, que la conſidération de la denſité fournit:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + u\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\left(\frac{dq}{dz}\right) + q\left(\frac{du}{dx}\right) + q\left(\frac{dv}{dy}\right) + q\left(\frac{dw}{dz}\right) = 0.$$

XVII. Voilà donc une condition bien remarquable, qui établit déjà un certain rapport entre les trois viteſſes x, y, & z, à l'égard de la denſité du fluide q. Or cette équation peut être réduite à une plus grande ſimplicité: car $u\left(\frac{dq}{dx}\right)$ ne differe pas de $\left(\frac{u\,dq}{dx}\right)$, puiſque

par

par cette maniere d'exprimer il faut entendre, que dans la différentiation de q la seule quantité x est prise pour variable ; il est donc de même $q\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{q\,du}{dx}\right)$: d'où il est évident que

$$q\left(\frac{du}{dx}\right) + u\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{u\,dq + q\,du}{dx}\right) = \left(\frac{dqu}{dx}\right),$$

prenant le différentiel du produit qu en sorte, qu'on regarde la seule quantité x comme variable. C'est pourquoi notre équation trouvée se réduit à celle-cy :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d\,qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0.$$

Si le fluide n'étoit pas compressible, la densité q seroit la même en Z, & en Z', & pour ce cas on auroit cette équation :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0.$$

qui est aussi celle sur laquelle j'ai établi mon Mémoire latin allégué ci-dessus.

XVIII. Cette formule ayant été fournie par la considération de la continuité du fluide, renferme déjà un certain rapport qui doit régner entre les quantités u, v, w, & q. Les autres déterminations doivent être tirées de la considération des forces, auxquelles chaque particule du fluide est assujettie : or, outre les forces accélératrices P, Q, R, qui agissent sur le fluide en Z, il est aussi sollicité par la pression qui agit de toutes parts sur l'élément du fluide contenu en Z. De la combinaison de ces doubles forces on tirera trois forces accélératrices selon la direction des trois axes ; & puisqu'on peut assigner les accélérations mêmes par la considération des vitesses u, v, & w, nous tirerons de là trois équations, qui jointes à celle que nous venons de trouver, renfermeront tout ce qui regarde le mouvement des fluides, de sorte que nous aurons alors des principes généraux & complets de toute la science du mouvement des fluides.

XIX.

XIX. Pour trouver les accélérations que l'élément du fluide en Z ſubit, nous n'avons qu'à comparer les viteſſes u, v, w, qui répondent à préſent au point Z, avec celles qui répondent après le tems dt au point Z'. Il arrive donc un double changement, & à l'égard des coordonnées x, y, z, qui reçoivent les incrémens udt, vdt, wdt, & à celui du tems qui augmente de dt. D'où les trois viteſſes qui conviennent au point Z' ſont :

ſelon la direction OA $= u + dt\left(\frac{du}{dt}\right) + udt\left(\frac{du}{dx}\right) + vdt\left(\frac{du}{dy}\right) + wdt\left(\frac{du}{dz}\right)$

ſelon la direction OB $= v + dt\left(\frac{dv}{dt}\right) + udt\left(\frac{dv}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dv}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dv}{dz}\right)$

ſelon la direction OC $= w + dt\left(\frac{dw}{dt}\right) + udt\left(\frac{dw}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dw}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dw}{dz}\right)$

Et partant les accélérations, étant exprimées par les incrémens des viteſſes diviſés par l'élément du tems dt, ſeront :

ſelon la direction OA $= \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)$

ſelon la direction OB $= \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)$

ſelon la direction OC $= \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$

XX. Cherchons maintenant les forces accélératrices ſelon ces mêmes directions, qui réſultent des preſſions du fluide ſur le parallelepipede Zz, dont le volume eſt $= dx\,dy\,dz$, & partant la maſſe du fluide qui l'occupe $= q\,dx\,dy\,dz$. Or la preſſion au point Z étant exprimée par la hauteur p, la force motrice, qu'en reçoit la face ZQRp eſt $= p\,dy\,dz$; & pour la face oppoſée zqrP $= dy\,dz$, la hauteur p eſt augmentée de ſon différentiel $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, qui réſulte

 en

en ſuppoſant la ſeule x variable. Donc cette maſſe fluide Zz eſt repouſſée dans la direction AO par la force motrice $dx\,dy\,dz\left(\frac{dp}{dx}\right)$, ou bien par la force accélératrice $= \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$. De même maniere on verra que la maſſe fluide Zz eſt ſollicitée dans la direction BO par la force accélératrice $= \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right)$, & dans la direction CO par la force accélératrice $= \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right)$. Ajoutons à ces forces les données P, Q, R, & les forces accélératrices entieres feront :

ſelon la direction $OA = P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$

ſelon la direction $OB = Q - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right)$

ſelon la direction $OC = R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right)$.

XXI. Nous n'avons donc qu'à égaler ces forces accélératrices avec les accélerations actuelles que nous venons de trouver, & nous obtiendrons les trois équations ſuivantes :

$$P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$Q - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

Si nous ajoutons à ces trois équations premiérement celle, que nous a fournie la conſidération de la continuité du fluide :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0;$$

& ensuite celle que donne le rapport entre l'élasticité p, la densité q, & l'autre qualité r, qui influë sur l'élasticité p, outre la densité q, nous aurons cinq équations qui renferment toute la Théorie du mouvement des fluides.

XXII. De quelque nature que soient les forces P, Q, R, pourvû qu'elles soient réelles, il faut remarquer que $Pdx + Qdy + Rdz$ est toujours un différentiel réel d'une certaine quantité finie & déterminée, en supposant les trois coordonnées x, y, & z, variables; de sorte qu'il y aura toujours:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right);\ \left(\frac{dP}{dz}\right)=\left(\frac{dR}{dx}\right);\ \left(\frac{dQ}{dz}\right)=\left(\frac{dR}{dy}\right),$$

& si nous posons cette quantité finie $= S$, en sorte qu'il y ait:

$$dS = Pdx + Qdy + Rdz$$

en supposant le tems t constant, en cas que les forces P, Q, R, changent aussi avec le tems aux mêmes endroits; cette quantité S exprime ce que je nomme l'effort des forces sollicitantes, & qui est la somme des intégrales de chaque force multipliée par l'élément de sa direction, ou par le petit espace, par lequel elle traineroit un corps qui obeïroit à son action. Cette idée de l'effort est de la derniere importance dans toute la Théorie, tant de l'équilibre que du mouvement, ayant fait voir, que la somme de tous les efforts est toujours un *maximum* ou *minimum*. Cette belle propriété convient admirablement avec le beau principe de la moindre action; dont nous devons la découverte à notre Illustre Président, M. de *Maupertuis*.

XXIII. Comme les équations que nous venons de trouver, renferment quatre variables x, y, z, & t, qui sont absolument indépendantes entr'elles, vû que la variabilité des trois premières s'étend sur

tous

tous les élémens du fluide, & de la derniere à tous les tems, il faut que les autres variables u, v, w, p, & q, en ſoient de certaines fonctions, pour que les équations puiſſent ſubſiſter. Car, bien qu'nne équation differentielle entre deux variables ſoit toujours poſſible, on ſait qu'une équation differentielle, qui renferme trois ou pluſieurs variables, n'eſt poſſible que ſous certaines conditions, en vertu desquelles les termes de l'équation doivent tenir un certain rapport entr'eux. Il s'agit donc de ſavoir de quelle nature doivent être les fonctions de x, y, z, & t, qui expriment les valeurs de u, v, w, p, & q, afin-que les équations ſoient poſſibles, avant qu'on puiſſe entreprendre la réſolution de ces mêmes équations.

XXIV. Multiplions donc, des trois équations trouvées en dernier lieu, la premiere par dx, la ſeconde par dy, & la troiſième par dz, & puisque $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)+dy\left(\frac{dp}{dy}\right)+dz\left(\frac{dp}{dz}\right)$, marque le differentiel de p en ne ſuppoſant que le tems t conſtant, nous obtiendrons :

$$dS-\frac{dp}{q}=\begin{cases} +dz\left(\frac{du}{dt}\right)+u\,dx\left(\frac{du}{dx}\right)+v\,dx\left(\frac{du}{dy}\right)+w\,dx\left(\frac{du}{dz}\right) \\ +dy\left(\frac{dv}{dt}\right)+u\,dy\left(\frac{dv}{dx}\right)+v\,dy\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\,dy\left(\frac{dv}{dz}\right) \\ +dz\left(\frac{dw}{dt}\right)+u\,dz\left(\frac{dw}{dx}\right)+v\,dz\left(\frac{dw}{dy}\right)+w\,dz\left(\frac{dw}{dz}\right) \end{cases}$$

Voilà donc une équation differentielle, où le tems eſt pris conſtant, & dont il s'agit de trouver l'intégrale. Or il faut remarquer que cette ſeule équation renferme tellement les trois dont elle compoſée, que, dès qu'on aura ſatisfait à celle-cy, les conditions de toutes les trois feront remplies. Car, ſi $dS-\frac{dp}{q}$ eſt égal aux trois lignes, en prenant x, y & z variables, la partie de $dS-\frac{dp}{q}$ qui réſulte de la variabiriabilité de la ſeule x, qui eſt $Pdx - \frac{dx}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$, doit néceſſairement être égale à la premiere ligne, & ainſi des deux autres. Les membres $\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, & $\left(\frac{dw}{dt}\right)$, qui ont été trouvés de la variabilité du tems t, puisqu'ils marquent des fonctions finies, n'empêchent pas, que le tems t ne puiſſe à préſent être pris pour conſtant.

XXV. Concevons que cette équation ſont déjà réſoluë, & on aura trouvé de certaines fonctions finies de x, y, z, & t pour les valeurs des quantités u, v, w, q, & p; qui étant ſubſtituées dans l'équation différentielle, en ſuppoſant le tems t conſtant, produiſent une équation identique. Or, puisque après cette ſubſtitution nous aurons trois ſortes de termes, les uns affectés par dx, les autres par dy, & les troiſièmes par dz, l'identification nous conduit à trois équations; d'où il eſt clair, que quoique nous ne conſidérions qu'une équation différentielle, elle a en effet la force de trois, & qu'elle nous détermine trois de nos inconnuës. Ce qui eſt auſſi clair de là, qu'une équation différentielle à trois variables, comme $Ldx + Mdy + Ndz = 0$ n'eſt poſſible, à moins qu'un certain rapport entre les quantités L, M, & N, n'ait lieu. Mais, comme on n'a encore que fort peu travaillé ſur la réſolution de telles équations differentielles à trois variables, nous ne ſaurions eſperer une ſolution complette de notre équation, avant que les bornes de l'Analyſe ne ſoient étenduës conſidérablement plus loin.

XXVI. Le meilleur parti à prendre ſera donc de bien peſer les ſolutions particuliéres, que nous ſommes en état de donner de notre équation différentielle; car de là nous pourrons juger de la route, qu'il faut prendre pour arriver à une ſolution complette. Or j'ai déjà remarqué que dans le cas, où la denſité q eſt ſuppoſée conſtante, on peut donner une fort belle ſolution, lorsque les viteſſes u, v, & w, ſont telles, que la formule différentielle $udx + vdy + wdz$ admet l'intél'intégration. Suppoſons donc que W ſoit cette intégrale, étant une fonction quelconque de x, y, z, & du tems t, & qu'en la différentiant, ſi l'on prend auſſi t pour variable, on ait :

$$dW = u\,dx + v\,dy + w\,dz + \Pi\,dt.$$

Cela poſé, les quantités u, v, w, & Π, auront tels rapports entr'elles qu'il ſera :

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=\left(\frac{dv}{dx}\right)\;;\;\left(\frac{du}{dz}\right)=\left(\frac{dw}{dx}\right)\;;\;\left(\frac{du}{dt}\right)=\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)=\left(\frac{dw}{dy}\right)\;;\;\left(\frac{dv}{dt}\right)=\left(\frac{d\Pi}{dy}\right)\;;\;\left(\frac{dw}{dt}\right)=\left(\frac{d\Pi}{dz}\right).$$

XXVII. Par ces égalités notre équation différentielle pourra être réduite à la forme ſuivante :

$$dS-\frac{dp}{q}=\begin{cases} +dx\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)+u\,dx\left(\frac{du}{dx}\right)+v\,dx\left(\frac{dv}{dx}\right)+w\,dx\left(\frac{dw}{dx}\right)\\ +dy\left(\frac{d\Pi}{dy}\right)+u\,dy\left(\frac{du}{dy}\right)+v\,dy\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\,dy\left(\frac{dw}{dy}\right)\\ +dz\left(\frac{d\Pi}{dz}\right)+u\,dz\left(\frac{du}{dz}\right)+v\,dz\left(\frac{dv}{dz}\right)+w\,dz\left(\frac{dw}{dz}\right)\end{cases}$$

Or puiſque ici le tems t eſt ſuppoſé conſtant, nous aurons pour cette même hypotheſe :

$$dx\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)+dy\left(\frac{d\Pi}{dy}\right)+dz\left(\frac{d\Pi}{dz}\right)=d\Pi$$

$$dx\left(\frac{du}{dx}\right)+dy\left(\frac{du}{dy}\right)+dz\left(\frac{du}{dz}\right)=du$$

&c.

donc

donc notre équation ſe changera en celle-cy :

$$dS - \frac{dp}{q} = d\Pi + udu + vdv + wdw,$$

ou $dp = q\,(dS - d\Pi - udu - vdv - wdw)$.

Et partant, ſi la denſité du fluide étoit partout la même, ou $q = g$ on auroit en intégrant :

$$p = g\,(C + S - \Pi - \tfrac{1}{2}uu - \tfrac{1}{2}vv - \tfrac{1}{2}ww).$$

XXVIII. Poſons pour abréger :

$$C + S - \Pi - \tfrac{1}{2}uu - \tfrac{1}{2}vv - \tfrac{1}{2}ww = V,$$

où il faut remarquer que la conſtante C peut bien renfermer le tems t, vû qu'il eſt regardé comme conſtant dans cette intégration, & ayant $dp = q\,dV$, il eſt clair que l'hypotheſe :

$$dW = udx + vdy + wdz + \Pi\,dt,$$

rend auſſi notre équation différentielle poſſible, lorsque l'élaſticité p dépend d'une maniere quelconque de la ſeule denſité q, ou que q eſt une fonction quelconque de p. Elle devient encore poſſible, quand le fluide n'eſt pas compreſſible, mais la denſité q tellement variable qu'elle eſt une fonction quelconque de la quantité V. Et en général, ſi l'élaſticité p dépend en partie de la denſité q, & d'une autre qualité compriſe dans la lettre r, cette hypotheſe peut auſſi ſatisfaire, pourvû que r ſoit une fonction de V. Or dans tous ces cas, pour que le mouvement puiſſe ſubſiſter avec cette hypotheſe, il faut outre cela que cette condition ait lieu :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0.$$

XXIX. Cette hypotheſe eſt ſi générale, qu'il paroit, qu'il n'y ait aucun cas, qui n'y ſoit compris, & partant que la for-

 mule

mule $\partial p = q\,d\mathrm{V}$, jointe aux autres équations, qui n'ont presque aucune difficulté, renferme généralement tous les fondemens de la Théorie du mouvement des fluides. Auſſi me ſuis-je uniquement attaché à ce cas dans mon Mémoire latin ſur les principes du mouvement des fluides, où j'ai uniquement conſidéré les fluides incompreſſibles ; & j'ai fait voir que tous les cas, qu'on a traités jusqu'ici, où le fluide ſe meut par des tuyaux quelconques, ſont renfermés dans cette ſuppoſition, & que les viteſſes u, v, & w, y ſont toujours telles, que la formule différentielle $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ dévient intégrable. Cependant j'ai remarqué depuis, qu'il y a auſſi des cas, même lorsque le fluide eſt incompreſſible & homogéne partout, où cette condition n'a point lieu; ce qui ſuffit pour nous convaincre que la ſolution, que je viens de donner, n'eſt que particuliere.

XXX. Pour donner un exemple d'un mouvement réel, qui ſoit parfaitement d'accord avec toutes les formules, que les principes de Mécanique ont fournies, ſans cependant, que la formule $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ ſoit intégable ; ſoit le fluide incompreſſible, & homogene partout, ou q une quantité conſtante $= g$, & qu'il n'y ait point de forces qui y agiſſent, de ſorte que $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{Q} = 0$, & $\mathrm{R} = 0$. Enſuite ſoit $w = 0$, $v = \mathrm{Z}x$, & $u = -\mathrm{Z}y$, où Z marque une fonction quelconque de $\sqrt{(xx + yy)}$, & il eſt évident que la formule $u\,dx + v\,dy + w\,dz$, qui ſe change en $-\mathrm{Z}y\,dx + \mathrm{Z}x\,dy$, n'eſt intégrable qu'au cas $\mathrm{Z} = \frac{1}{xx + yy}$. Cependant ces valeurs ſatisfont à toutes nos formules, de ſorte qu'on ne ſauroit révoquer en doute la poſſibilité d'un tel mouvement. Puisque Z eſt fonction de $\sqrt{(xx + yy)}$, ſon différentiel aura telle forme $d\mathrm{Z} = \mathrm{L}x\,dx + \mathrm{L}y\,dy$, où L ſera encore une certaine fonction de $\sqrt{(xx + yy)}$.

XXXI. De ces valeurs de u, v, & w nous tirons :

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = 0;\ \left(\frac{du}{dx}\right) = -Lxy;\ \left(\frac{du}{dy}\right) = -Z-Lyy;\ \left(\frac{du}{dz}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0;\ \left(\frac{dv}{dx}\right) = Z + Lxx;\ \left(\frac{dv}{dy}\right) = + Lxy;\ \left(\frac{dv}{dz}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) = 0;\ \left(\frac{dw}{dx}\right) = 0\ ;\ \left(\frac{dw}{dy}\right) = 0\ ;\ \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$$

& à cause de $dS = 0$, nous aurons cette équation différentielle en posant le tems t constant :

$$-\frac{dp}{g} = \begin{Bmatrix} +LZxyydx - ZZxdx - LZxyydx \\ -ZZydy - LZxxydy + LZxxydy \end{Bmatrix} = -ZZ(xdx+ydy).$$

Ayant donc $dp = gZZ(xdx + ydy)$, puisque Z est supposée fonction de $\sqrt{(xx + yy)}$, cette équation sera sans doute possible, & donnera pour intégrale $p = g\int ZZ(xdx + ydy)$. On voit que l'équation différentielle seroit devenuë possible, quand même le fluide auroit été sollicité par des forces quelconques P, Q, R, pourvû que $Pdx + Qdy + Rdz$, soit un différentiel possible $= dS$, car alors on auroit $p = gS + g\int ZZ(xdx + ydy)$.

XXXII. Comme ces valeurs $u = -Zy$, $v = Zx$, & $w = 0$, satisfont à notre équation différentielle, on verra qu'elles remplissent aussi la condition contenuë dans la formule :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0.$$

Car, à cause de $q = g$, elle sera changée en celle-cy :

$$-gLxy + gLxy = 0$$

qui étant identique satisfait aux conditions requises. Donc il est bien possible, qu'un fluide ait un tel mouvement, que les vitesses de chacun de ses élémens soient : $u = -Zy$, $v = Zx$, & $w = 0$,

 quoi-

quoiqu'il ne ſoit pas $udx + vdy + wdz$ une formule différentielle poſſible; d'où l'on eſt aſſuré, qu'il y a des cas, où le mouvement d'un fluide eſt poſſible, ſans que cette condition, qui paroiſſoit générale, ait lieu. Ainſi la ſuppoſition de la poſſibilité de la formule différentielle $udx + vdy + wdz$, ne fournit qu'une ſolution particuliere des formules que nous avons trouvées.

XXXIII. Il eſt évident, que le mouvement renfermé dans ce cas ſe réduit à un mouvement de rotation autour de l'axe OC; &, puiſque ce, qui eſt dit de l'axe OC, ſe peut appliquer à tout autre axe fixe, nous concluons qu'il eſt poſſible, qu'un fluide ſollicité par des forces quelconques, dont l'effort eſt $= S$, ait un tel mouvement autour d'un axe fixe, que les viteſſes de rotation ſoient proportionnelles à une fonction quelconque de la diſtance à cet axe. Ainſi poſant s la diſtance de cet axe, & la viteſſe de rotation à cette diſtance $= \mathfrak{v}$, à cauſe de $xx + yy = ss$, & $ZZss = \mathfrak{v}\mathfrak{v}$, la preſſion y ſera exprimée par la hauteur $p = gS + g\int \frac{\mathfrak{v}\mathfrak{v}\,ds}{s}$. Un tel mouvement, qui repréſente celui d'un tourbillon, eſt donc également poſſible, que ceux qui ſont contenus dans la formule $udx + vdy + wdz$ entant qu'elle eſt intégrable. Sans doute y a-t-il encore une infinité d'autres mouvemens, qui ſatisfaiſant à nos formules, ſont auſſi également poſſibles.

XXXIV. Retournons à nos formules générales, & puiſqu'elles ſont un peu trop compliquées, poſons pour abreger:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) = X$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) = Y$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) = Z$$

&

& de quelque nature que ſoient les trois forces accélératrices P, Q, & R, à cauſe de $dS = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, il faut que cette équation différentielle, où le tems t eſt ſuppoſé conſtant, ſoit poſſible:

$$\frac{dp}{q} = (P-X)\,dx + (Q-Y)\,dy + (R-Z)\,dz,$$

& outre cela la continuité du fluide exige, qu'il ſoit:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.dw}{dz}\right) = 0$$

De quelque maniere qu'on ſatisfaſſe à ces deux équations, on aura toujours un mouvement, qui pourra actuellement avoir lieu dans le fluide.

XXXV. Lorsque le fluide n'eſt pas compreſſible & homogene partout, ou la denſité q conſtante $= g$, il eſt évident, que l'équation différentielle ne ſauroit avoir lieu, à moins que le différentiel:

$$(P-X)\,dx + (Q-Y)\,dy + (R-Z)\,dz,$$

ne ſoit poſſible ou complet, c'eſt à dire, à moins qu'il ne réſulte par la différentiation actuelle de quelque fonction finie des variables x, y, & z, laquelle peut bien renfermer le tems t, quoiqu'il ſoit ſuppoſé conſtant dans la différentiation. Il eſt de même évident, que cette formule différentielle doit être poſſible ou complette, lorsque le fluide eſt compreſſible, & que la denſité q eſt exprimée par une fonction quelconque de l'élaſticité p. Dans l'un & l'autre cas, ſi nous poſons V pour la quantité finie, dont le différentiel ſoit:

$$dV = (P-X)\,dx + (Q-Y)\,dy + (R-Z)\,dz,$$

notre équation différentielle fournira, ou $\frac{p}{g} = V$, ou $\int \frac{dp}{q} = V$.

Or, pour que le mouvement ſoit poſſible, il faut outre cela que l'autre condition tirée de la continuité, ſoit remplie.

XXXVI. Si le fluide n'eſt pas compreſſible, mais que ſa denſité q ſoit variable, & exprimée par une fonction quelconque du lieu,

ou

ou des trois coordonnées x, y, z, & du tems t, il ne suffit pas que la formule :

$$(P-X)dx + (Q-Y)dy + (R-Z)dz = dV$$

soit intégrable, mais il faut outre cela que l'intégrale V soit une fonction de q ; car ayant $\frac{dp}{q} = dV$, ou $dp = q\,dV$, il est clair que la pression p ne sauroit avoir une valeur déterminée, à moins que la formule $q\,dV$ ne soit intégrable. Mais je remarque de plus, qu'il n'est pas nécessaire dans ce cas, que la formule :

$$(P-X)\,dx + (Q-Y)\,dy + (R-Z)\,dz$$

soit intégrable, pourvû qu'elle soit telle, qu'étant multipliée par une certaine fonction U, elle devienne intégrable. Soit donc

$$U(P-X)dx + U(Q-Y)dy + U(R-Z)dz = dW,$$

& puisque nous avons $\frac{dp}{q} = \frac{dW}{U}$, ou $dp = \frac{q\,dW}{U}$, il suffit pour la possibilité de cette équation, que W soit une fonction de $\frac{q}{U}$, ou que W soit une fonction de nulle dimension des quantités q & U.

XXXVII. Mais, en général de quelque maniere que l'élasticité p dépende tant de la densité q, que d'une autre qualité exprimée par r, fonction quelconque des coordonnées x, y, z, qui pourroit encore renfermer le tems t, il est clair de notre équation $q = \frac{dp}{dV}$, que le différentiel dp doit toujours être divisible par dV, où dV marque non tant un différentiel réel, que cette formule :

$$(P-X)\,dx + (Q-Y)\,dy + (R-Z)\,dz,$$

& cela tellement, que par la division les différentiels dx, dy, & dz sortent entièrement du calcul : car tant p que q doivent toujours être exprimés par des fonctions finies de x, y, & z, sans que leurs diffé-

différentiels y entrent. Or cela ne sauroit arriver, à moins qu'il n'y eut une fonction U, par laquelle la formule dV étant multipliée devienne intégrable: car posant cette intégrale $\int U dV = W$, il est clair que p doit être une fonction de W, pour que la formule $\frac{dp}{dV}$ obtienne une valeur déterminée, telle qu'il convient à la densité q.

XXXVIII. Puisque $U dV = dW$, nous aurons $q = \frac{U dp}{dW}$; donc, si nous prenons pour W une fonction quelconque des coordonnées x, y, & z, renfermant le tems t parmi les quantités constantes, & que nous posions p égale à une fonction quelconque de W, savoir $p = \Phi, W$, & $dp = dW . \Phi', W$, nous aurons $q = U . \Phi', W$; donc $U = \frac{q}{\Phi', W}$. Et partant, de quelque maniere que la densité q soit donnée par l'élasticité p, & quelqu'autre fonction r des coordonnées x, y, & z, nous en tirerons la valeur de $U = \frac{q}{\Phi', W}$, & par conséquent celle de $dV = \frac{dW . \Phi', W}{q}$, qui nous fournit ensuite cette équation :

$$(P - X) dx + (Q - Y) dy + (R - Z) dz = \frac{dW . \Phi', W}{q} = \frac{dp}{q},$$

d'où l'on obtiendra les valeurs X, Y, Z, desquelles enfin il faut chercher les valeur des vitesses u, v, & w: & quand celles-cy satisfont outre cela à la condition de la continuité, on aura un cas d'un mouvement possible du fluide.

XXXIX. Voilà donc à quoi se réduit la quéstion sur la nature de la formule :

$$(P - X) dx + (Q - Y) dy + (R - Z) dz.$$

 Pp Lors-

Lorsque la densité q est constante, où qu'elle dépend uniquement de l'élasticité p, il faut que cette formule sont absolument intégrable, & pour cet effet il s'agit de déterminer des valeurs convenables pour les trois vitesses u, v, & w. Or, lorsque la densité q dépend d'une fonction donnée du lieu & du tems, la formule doit être telle, qu'étant multipliée par une certaine fonction donnée U, elle devienne intégrable. Dans l'un & l'autre cas donc les vitesses u, v, & w, doivent être telles que cette équation :

$$(P - X)\,dx + (Q - Y)\,dy + (R - Z)\,dz = 0$$

devienne possible : or on sait les conditions, sous lesquelles une équation différentielle entre trois variables devient possible ; & ayant satisfait à cette condition, il faut encore satisfaire à celle que la continuité exige.

XL. Ce sont les conditions, par lesquelles doivent être limitées les fonctions qui expriment les trois vitesses u, v, & w, & toute la recherche sur le mouvement des fluides revient à ce qu'on détermine en général la nature de ces fonctions, par lesquelles les conditions de notre équation différentielle, & de la continuité soient remplies. Or puisque les quantités X, Y, & Z, dépendent non seulement des vitesses u, v, & w mêmes, mais aussi de leur variabilité par rapport à chacune des coordonnées, x, y, & z, & encore du tems t, cette recherche paroit la plus profonde, qui se puisse trouver dans l'Analyse : & s'il ne nous est pas permis de pénétrer à une connoissance complette sur le mouvement des fluides, ce n'est pas à la Mécanique, & à l'insuffisance des principes connus du mouvement, qu'il en faut attribuer la cause ; mais l'Analyse même nous abandonne ici, attendu que toute la theorie du mouvement des fluides vient d'être réduite à la résolution des formules analytiques.

XLI. Comme une solution générale doit être jugée impossible par le défaut de l'Analyse, nous devons nous contenter de la connoissance de quelques cas particuliers, & cela d'autant plus, puisque le déve-

dévelopement de plusieurs cas semble l'unique moyen de nous conduire enfin à une plus parfaite connoissance. Or le cas le plus simple qu'on puisse imaginer, est sans doute lorsqu'on met les trois vitesses u, v, & w égales à zero, ce qui est le cas, où le fluide demeure dans un parfait repos & que j'ai traité dans mon Mémoire précédent. Or nos formules trouvées pour le mouvement en général renferment aussi le cas d'équilibre: car puisque $X = 0$, $Y = 0$, & $Z = 0$, nous aurons : $\frac{dp}{q} = P dx + Q dy + R dz$, & $\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$, d'où nous voyons d'abord que la densité q ne sauroit dépendre du tems t, ou qu'elle doit demeurer toujours la même au même endroit. Ensuite les forces P, Q, R, doivent être telles que la formule différentielle $P dx + Q dy + R dz$ devienne, ou intégrable, lorsque q est constante, ou dépendante uniquement de l'élasticité p; ou telle qu'étant multipliée par une certaine fonction elle devienne intégrable.

XLII. Dans mon Mémoire sur l'équilibre des fluides, je n'avois consideré que les cas des forces sollicitantes P, Q, R, où la formule différentielle $P dx + Q dy + R dz$ devient intégrable, puisque ce cas paroissoit le seul qui pût avoir lieu dans la Nature. En effet si la densité q est, ou constante, ou qu'elle dépende uniquement de la pression p, le fluide ne sauroit jamais être en équilibre, à moins que cette condition des forces sollicitantes n'ait lieu. Mais, en cas qu'il fut possible que les forces sollicitantes tinssent une autre loi, il pourroit y avoir un équilibre, pourvû qu'elles fussent telles, qu'il y eut une fonction U, qui étant multipliée par la formule $P dx + Q dy + R dz$ la rende intégrable, ou bien que l'équation différentielle $P dx + Q dy + R dz = 0$ devienne possible; car alors, si la densité q est exprimée par cette fonction U, ou par un produit de cette fonction U par une fonction quelconque de l'élasticité p, l'équilibre pourra également avoir lieu. Or, comme tels cas ne sont peut-être pas possibles, je ne m'arrête pas à les déveloper plus amplement.

 XLIII.

XLIII. Après le cas d'équilibre l'état le plus ſimple, qui ſauroit ſubſiſter dans le fluide, eſt celui où le fluide tout entier eſt porté d'un mouvement uniforme ſuivant la même direction. Voyons donc comment cet état eſt contenu dans nos deux formules. Or dans ce cas les trois viteſſes étant conſtantes, poſons: $u = a$; $v = b$; & $w = c$; & nous aurons: $X = 0$; $Y = 0$; & $Z = 0$; d'où nos deux équations ſe changeront dans les ſuivantes:

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

$$\& \qquad \left(\frac{dq}{dt}\right) + a\left(\frac{dq}{dx}\right) + b\left(\frac{dq}{dy}\right) + c\left(\frac{dq}{dz}\right) = 0,$$

où il eſt clair que, ſi la denſité q étoit conſtante, la condition de la derniere équation ſeroit remplie; mais que la premiere ne ſauroit ſubſiſter, à moins que la formule $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ n'admit l'intégration, tout comme ſi le fluide étoit en repos: & il eſt naturel qu'un tel mouvement ne ſauroit rien changer dans la preſſion.

XLIV. Mais ſi la denſité q n'eſt pas conſtante, voyons d'abord quelle fonction de x, y, z, & t elle doit être, pour que la ſeconde équation ſoit ſatisfaite. Voilà donc une queſtion analytique bien curieuſe, par laquelle on demande quelle fonction de x, y, z, & t, doive être priſe pour q, afin qu'il devienne:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + a\left(\frac{dq}{dx}\right) + b\left(\frac{dq}{dy}\right) + c\left(\frac{dq}{dz}\right) = 0,$$

& la ſolution de cette queſtion paroit bien difficile étant priſe dans toute ſon étenduë poſſible. Mais, puiſque dans le cas de $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, la quantité q ſeroit une fonction quelconque de x, y, & z, ſans renfermer le tems t, ſi nous ramenons ce cas à celui de repos en imprimant à l'eſpace un mouvement égal & contraire, il eſt évident qu'après le tems t les coordonnés x, y, & z, ſeront transformées par le changement en $x - at$, $y - bt$, $z - ct$, d'où nous concluons qu'on ſatisfera à notre équation en prenant pour q une fonction quel-

con-

conque des trois quantités $x-at$; $y-bt$; $z-ct$. Et en effet on s'assure aisément, qu'une telle fonction satisfait, puisqu'il y aura:

$$dq = L(dx-adt) + M(dy-bdt) + N(dz-cdt),$$

& partant:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) = -aL-bM-cN;\ \left(\frac{dq}{dx}\right) = L;\ \left(\frac{dq}{dy}\right) = M;\ \&\ \left(\frac{dq}{dz}\right) = N.$$

XLV. Or, pour satisfaire à la premiere équation, il faut, comme j'ai déjà remarqué, que la formule différentielle $Pdx + Qdy + Rdz$ soit telle, qu'étant múltipliée par une certaine fonction U elle devienne intégrable. Soit donc $\int U(Pdx + Qdy + Rdz = W$, où la constante qui entre par l'intégration renferme aussi d'une maniere quelconque le tems t, & il est clair que la formule $Pdx + Qdy + Rdz$ admettra aussi l'intégration, étant multipliée par Uf, W, où U & W sont des fonctions connuës, puisque les forces sollicitantes sont supposées connuës. Donc, si q ne dépend point de p, il faut qu'il y ait $q = Uf, W$, d'où l'on doit déterminer la fonction des trois quantités $x-at$; $y-bt$; & $z-ct$; afin qu'elle soit reductible à la forme Uf, W. Or si q dépend uniquement de p, il faut que la formule $Pdx + Qdy + Rdz$, soit absolument intégrable, ou bien $U = 1$, & alors, puisque p sera trouvée égale à une fonction de W, la densite q en sera aussi fonction; qui devant aussi être fonction des quantités $x-at$; $y-bt$; $z-ct$; on en déduira la nature de cette fonction.

XLVI. Mais on voit qu'en général la pression p doit toujours être une fonction de W, puisque d'ailleurs la densité q, ne sauroit être une fonction finie. Soit donc $p = f, W$, & $dp = dW.f', W$, d'où à cause de $Pdx + Qdy + Rdz = \frac{dW}{U}$, on aura $q = Uf', W$. Ce cas ne sauroit donc subsister, à moins que la densité q ne soit proportionnelle au produit de la quantité U par une fonction de la pression p, ou bien au produit d'une telle quantité $U\phi, W$, par une

 fonc-

fonction quelconque de p, prenant Φ, W, pour marquer une fonction donnée de W. Soit par exemple $q = pp\,U\,\Phi, W$, & on aura $f', W = \frac{d(f, W)}{dW} = (f, W)^2 \Phi, W$, d'où l'on trouvera que la fonction inconnuë f, W est composée de W: car dans cet exemple on aura $\frac{1}{f, W} = -\int dW, \Phi W = \frac{1}{p}$: & de là on exprimera p par W, & partant aussi la valeur de q sera connuë. Laquelle, quand elle sera réductible à la forme d'une fonction des quantités $x - at$, $y - bt$, $z - ct$, l'état supposé du fluide sera possible, & on en connoitra la pression & la densité pour tout tems & à chaque endroit.

XLVII. Un exemple éclaircira mieux ces opérations, lesquelles, puisque nous n'y sommes pas encore assés accoutumés, pourroient paroitre trop obscures. Soit donc $P = y$, $Q = -x$, & $R = 0$, & ayant $\frac{dp}{q} = y\,dx - x\,dy$, nous aurons $U = \frac{1}{yy}$, & $W = \frac{x}{y} + T$, où T marque une fonction quelconque du tems t. Soit de plus $q = \frac{pp}{yy}$, & puisque $\frac{dp}{pp} = \frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$, nous obtiendrons $\frac{1}{p} = \Theta - \frac{x}{y}$, & $p = \frac{y}{\Theta y - x}$, où la constante Θ renferme aussi le tems t. Nous aurons donc $q = \frac{1}{(\Theta y - x)^2}$, qui devant être fonction de $x - at$, & $y - bt$, puisque z n'y entre pas, cela ne sauroit arriver autrement, que prenant $\Theta = \frac{a}{b}$; & alors nous aurons $q = \frac{bb}{(ay - bx)^2}$, & $p = \frac{by}{ay - bx}$. Donc, ni la pression, ni la densité, ne dépendent point du tems, & seront au même endroit constamment les mêmes. Cet exemple fait voir, comment en d'autres cas qu'on voudra imaginer, le calcul doit être manié.

XLVIII. Ayant expédié ce cas, où les trois viteſſes ſont conſtantes, ſuppoſons maintenant, que deux viteſſes v & w évanouiſſent, ce qui donnera le cas, où toutes les particules du fluide ſe meuvent ſuivant la direction de l'axe OA, de ſorte que le chemin décrit par chacune ſoit une ligne droite parallele à l'axe OA; ce cas diffère du précédent, puiſque nous conſidérons la viteſſe u, comme variable, tant par rapport au lieu qu'au tems. Ayant donc

$$X = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right); \quad Y = 0; \quad Z = 0;$$

nos deux équations ſeront :

$$\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz - dx\left(\frac{du}{dt}\right) - udx\left(\frac{du}{dx}\right),$$

$$\& \qquad \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) = 0.$$

Cette derniere équation nous donne d'abord à connoitre, que cette formule $qdx - qudt$ doit être intégrable : or, par rapport à cette intégration les quantités y & z, ſont regardées comme conſtantes : il faut donc que q multiplié par $dx - udt$ devienne une formule différentielle complette, ou intégrable.

XLIX. Si la denſité du fluide eſt partout & toujours la même ou q une quantité conſtante $= g$, puiſqu'alors $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, il eſt clair que la viteſſe u, doit être indépendante de la variable x. Soit donc u une fonction quelconque des deux autres coordonnées y, z, & du tems t, & notre équation différentielle ſera :

$$\frac{dp}{q} = Pdx + Qdy + Rdz - dx\left(\frac{du}{dt}\right),$$

où le tems t eſt ſuppoſé conſtant : il faut donc que cette formule ſoit intégrable. Donc, ſi la formule tirée des forces ſollicitantes $Pdx + Qdy + Rdz$ eſt intégrable d'elle même, il faut que

dx

$dx\left(\frac{du}{dt}\right)$ le foit auffi. Or puisque $\left(\frac{du}{dt}\right)$ ne renferme pas x, s'il y avoit des y, & z, la formule $dx\left(\frac{du}{dt}\right)$ ne fauroit être intégrable : il faut donc que $\left(\frac{du}{dt}\right)$ ne renferme point y & z. Que Z foit une fonction quelconque de y & z, & T une du feul tems t, & la valeur $u = Z + T$ fatisfera à cette condition, d'où l'on tirera à caufe de $Pdx + Qdy + Rdz = dV$ & $\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{dT}{dt}\right)$, cette équation intégrale $\frac{p}{q} = V - x\left(\frac{dT}{dt}\right) + \text{Conft.}$

L. Pour déveloper mieux ce cas, il faut remarquer que chaque particule du fluide Z, n'a d'autre mouvement que felon la direction ZP parallele à l'axe ZA, & partant chaque élément du fluide décrira par fon mouvement une ligne droite parallele à cet axe, de forte que pour le même élément les deux coordonnées y & z ne changent point de valeur. Donc, ou le mouvement de chaque particule fera uniforme, ou changera avec le tems d'une telle maniere, que toutes les particules fubiffent à chaque inftant des changemens égaux dans leurs mouvemens, ce qui eft évident par la formule $u = Z + T$. Or pour l'état de preffion ayant cette formule $p = gV - gx\left(\frac{dT}{dt}\right) + \text{Conft.}$ où la conftante peut renfermer le tems t d'une maniere quelconque, elle dépend, outre de l'effort des forces V, encore de ce changement de viteffe, que chaque élément du fluide fubit ; & outre cela elle peut varier avec le tems d'une maniere quelconque.

LI. Ce cas me fournit l'occafion d'éclaircir quelques doutes, qui doivent fe préfenter naturellement, & dont l'explication fera très importante dans la théorie, tant de l'équilibre que du mouvement des flui-

fluides. D'abord on ſera ſurpris, qu'un changement dans la viteſſe du fluide puiſſe avoir lieu, ſans que les forces ſollicitantes P, Q, R, concourent à le produire; puiſqu'on voit que ce changement ſuppoſé pourroit ſubſiſter, quand même les forces ſollicitantes évanouïroient, & on demandera avec raiſon par quelle cauſe ce changement eſt produit. Enſuite il ſemble auſſi paradoxe, que la preſſion puiſſe varier à chaque inſtant d'une maniére quelconque, & cela indépendamment du dit changement, auquel le mouvement eſt aſſujetti. Cette derniere difficulté ſubſiſte même dans l'état d'équilibre: car en faiſant évanouïr les trois viteſſes u, v, w, on a pour les fluides incompreſſibles cette équation intégrale $\frac{p}{g} = V + \text{Conſt.}$ où la conſtante peut renfermer le tems t d'une maniere quelconque.

LII. Pour mieux comprendre cela, on n'a qu'à concevoir une maſſe déterminée, & renfermée dans un vaiſſeau; & il eſt clair que l'état de preſſion ne dépend pas ſeulement des forces ſollicitantes, mais auſſi des forces étrangeres, qui peuvent agir ſur le vaiſſeau. Car, quand même il n'y auroit point de forces ſollicitantes, par le moyen d'un piſton dont on agiroit ſur le fluide, on pourroit produire ſucceſſivement tous les états poſſibles de preſſion ſans que l'équilibre en fût troublé: or c'eſt ce que notre formule, qui devient dans ce cas, $\frac{p}{g} =$ fonction du tems t, nous donne à connoitre; d'où nous voyons, que l'état de preſſion peut varier à chaque inſtant, & cela indépendamment de l'équilibre. Mais, connoiſſant pour chaque inſtant la preſſion à un endroit quelconque, les preſſions en tous les autres endroits en ſeroit déterminées; & puisqu'il pourroit arriver, que le piſton fut pouſſé tantôt avec plus, tantôt avec moins de forces, il faut que le calcul montre tous ces changemens poſſibles: & la même variabilité doit auſſi avoir lieu, quand le fluide eſt ſollicité par des forces accélératrices quelconques, de ſorte qu'à chaque inſtant l'état de preſſion eſt indéterminé, & dépend de la force qui agit alors ſur le piſton.

 LIII.

LIII. Voilà donc une différence très eſſentielle entre les forces accélératrices, qui agiſſent ſur tous les élémens du fluide, & entre la force d'un piſton, dont le fluide eſt pouſſé: ce ne ſont que les forces accélératrices, qui entrent dans notre équation différentielle, & la force du piſton n'entre dans le culcul, qu'après qu'on aura intégré, & n'affecte que la conſtante, que l'intégration entraine ; qu'il faut par conſéquent en chaque cas déterminer en ſorte, qu'à l'endroit du piſton la preſſion devienne préciſément égale à la force, dont le piſton eſt pouſſé à chaque moment : & c'eſt à cauſe de cela, que ladite conſtante renferme le tems, pour qu'on la puiſſe varier avec le tems à volonté, ſelon que les circonſtances l'exigent. Cette variabilité peut toujours être repréſentée par l'action d'un piſton ; car de quelque nature que puiſſe être un cas propoſé, pour qu'il ſoit déterminé, il faut toujours ſuppoſer, que du moins à un endroit du fluide la preſſion ſoit connuë à chaque inſtant : & c'eſt de cette circonſtance, qu'il faut tirer la détermination de la conſtante introduite dans le calcul par l'intégration de notre équation différentielle.

LIV. Mais pour notre cas du mouvement expliqué §. 49. ſuppoſons auſſi les forces accélératrices évanouïſſantes, ou $V = o$, & pour rendre le cas tout à fait déterminé, ſuppoſons $u = a + \alpha y + \beta t$, & nous aurons pour ce cas cette équation qui détermine la preſſion $\frac{p}{g} = \text{Conſt.} - \beta x$. Suppoſons de plus cette conſtante $= \gamma + \delta t$, de ſorte que $\frac{p}{g} = \gamma + \delta t - \beta x$, & voyons ſous quelles conditions ce mouvement puiſſe avoir lieu. Puisque chaque élément du fluide ſe meut ſelon la direction de l'axe OA, ce mouvement ne ſauroit avoir lieu, que dans un tuyau cylindrique couché ſelon la même direction.
Fig. 4. Soit ABIO ce tuyau, & qu'au commencement, où $t = o$, le fluide en ait rempli la portion ABCD, terminée par les ſections AB, & CD, perpendiculaires au tuyau. Comptons les abſciſſes x depuis le point A, ſur la droite AI, & ſur la baſe AB la preſſion étoit partout

$p =$

$p = \gamma g$: & fur l'autre bafe $CD = g\gamma - \beta g . AC$; mais au dedans du fluide, à un endroit quelconque Z, pofant $AP = x$; $PZ = y$; la preffion étoit $= \gamma g - \beta g x$. On ne fauroit donc concevoir le fluide dans le tuyau plus étendu que jusqu'en CD, prenant $AC = \frac{\gamma}{\beta}$, afin que la preffion en CD ne devienne négative.

LV. Pofons pour cette maffe déterminée de fluide la longueur $AC = b$, la largeur $AB = CD = c$, la hauteur n'entrant pas en confidération, puisque, ni les viteffes, ni les preffions, ne dépendent point de la troifième coordonnée z, & prenant $\gamma = \beta b$, dans l'état initial ABCD, la preffion fur la bafe AB étoit $= \beta b g$, fur la bafe $CD = 0$, & à un point quelconque $Z = \beta g(b - x) = \beta g . CP$. Or dans cet état nous fuppofons, que le fluide ait un tel mouvement felon la direction du tuyau, que la viteffe fur la ligne AC foit $= a$, fur la ligne $BD = a + \alpha c$, & fur une ligne quelconque QR parallele à la direction du tuyau $= a + \alpha y$, pofant $AQ = CR = y$. Nous concevons donc, que par une caufe quelconque ait été imprimé au fluide ce mouvement, & qu'il foit pouffé au premier inftant fur la furface AB par le moyen d'un pifton, par la force indiquée $\beta b g$, l'autre bafe CD n'étant affujettie à aucune preffion. Mais dans les inftans fuivans les forces qui agiffent fur les faces extrèmes pourroient varier à volonté: or cette variabilité eft déterminée par les hypothéfes, que nous venons d'établir; voyons donc comment en vertu de ces hypothefes le mouvement du fluide fera continué.

LVI. Après un tems écoulé $= t$, tous les élémens du fluide, qui fe trouvent fur la ligne QR, auront une viteffe felon cette même direction $= a + \alpha y + \beta t$, par laquelle ils parcourront dans l'instant dt l'efpace $(a + \alpha y + \beta t) dt$; ils auront donc parcouru depuis le commencement l'efpace $= at + \alpha y t + \frac{1}{2} \beta t t$; & partant la filée du fluide qui étoit au commencement en QR, fe trouvera à préfent avancée en qr, ayant parcouru l'efpace $Qq = at + \alpha y t + \frac{1}{2} \beta t t$.

Qq 2 Donc

Donc le fil A C fera parvenu en ac, ayant parcouru l'efpace $Aa = at + \frac{1}{2}\beta tt$, & le fil BD en bd, ayant parcouru l'efpace $Bb = at + \alpha ct + \frac{1}{2}\beta tt$; de forte que la maffe fluide fera maintenant terminée par les faces ab & cd, droites, mais obliques à la direction du tuyau. Or il faut qu'à préfent la preffion fur la face ab en q foit $= g(\beta + \delta t - \beta.Qq) = g(\beta b + \delta t - \beta at - \alpha\beta yt - \frac{1}{2}\beta\beta tt)$, & fur la face cd en

$$r = g(\beta b + \delta t - \beta.Qr) = g(\delta t - \beta at - \alpha\beta yt - \tfrac{1}{2}\beta\beta tt).$$

Il faut donc concevoir des piftons, qui agiffent avec ces forces fur les deux extrémités ab & cd, & puisque ces preffions ne font pas les mêmes par toute l'étenduë de ces faces, il faut concevoir des piftons flexibles & pliables, par le moyen desquels ces preffions puiffent être exécutées.

LVII. Ce mouvement demeureroit le même, fi dans l'intégration de la preffion p, nous euffions pris au lieu de δt une fonction quelconque de t; mais alors l'état de preffion dans la maffe fluide deviendroit différent à chaque inftant, fans que le mouvement fuppofé même du fluide en fouffrit quelque altération. Pofons donc $\delta t = \beta at + \alpha\beta ct + \frac{1}{2}\beta\beta tt$, & après le tems t la preffion à un point quelconque q de la face ab, fera $= g[\beta b + \alpha\beta(c-y)t]$, & dans un point quelconque z, fur la ligne qr, la preffion fera $g[\beta b + \alpha\beta(c-y)t - \beta.qz]$, d'où la preffion à l'autre extrémité r fera $= \alpha\beta g(c-y)t$. Donc, fur la face ab, la preffion fera en $a = \beta g(b + \alpha ct)$; & en $b = \beta gb$: mais fur l'autre face cd, la preffion fera en $c = \alpha\beta gct$, & en $d = 0$. Au refte chaque fil QR fe mouvra felon fa propre direction d'un mouvement uniformement accéléré, ou recevra en tems égaux des accroiffemens égaux de viteffe. Le dévelopement de ce cas particulier peut fervir pour éclaircir le calcul qu'on aura à faire pour tous les autres cas.

LVIII. Arrêtons-nous encore au cas propofé (§. 48.), & fuppofons la denfité q conftante $= g$: mais prenons les forces P, Q, R, telles,

telles, que le fluide ne fauroit jamais être à l'équilibre. Soit pour cet effet $P = 0$, $Q = -\frac{x}{a}$, & $R = -\frac{x}{a}$, & posons $u = b + \frac{(y+z)t}{a}$, pour avoir $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, & $\frac{dp}{g} = -\frac{x\,dy - x\,dz}{a} - \frac{y\,dx - z\,dx}{a}$, d'où nous tirons en intégrant $\frac{p}{g} = \text{Const.} - \frac{xy - xz}{a}$, où la constante peut renfermer le tems d'une maniere quelconque. Il n'est donc pas possible, que toute la masse du fluide demeure jamais en repos; car, quoique nous posions $b = 0$, pour avoir le fluide en repos au commencement $t = 0$, aussi-tôt après le premier instant il sera agité, & il n'y aura que les élémens, où $y = 0$, ou $z = 0$, ou $y + z = 0$, qui demeureront en repos: tous les autres recevront un mouvement, ou en avant, ou en arrière, selon que $y + z$, aura une valeur positive, ou négative. On déterminera aussi aisément les pressions réquises pour maintenir ce mouvement supposé.

LIX. Mais que la densité ne soit plus constante, mais variable, ou le fluide compressible, & pour que $q\,dx - qu\,dt$ devienne une différentiel complet, on peut prendre pour u une fonction quelconque des variables x, y, z, & t; car puisque ici on ne regarde que les deux x & t comme variables, & les deux autres y & z comme constantes, on pourra toujours assigner une quantité s, telle que $s(dx - u\,dt)$ devienne intégrable. Soit S cette intégrale, & cette condition sera remplie, lorsqu'on prend $q = sf:S$, supposant $S = \int s(dx - u\,dt)$. Maintenant il faut de plus, que cette équation différentielle soit intégrable :

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz - dx\left(\frac{du}{dt}\right) - u\,dx\left(\frac{du}{dx}\right),$$

où je remarque que si les forces P, Q, R, étoient évanouïssantes, la pression p deviendroit fonction de x & de t, & partant cette

 quan-

quantité $q\left(\left(\frac{du}{dt}\right)+u\left(\frac{du}{dx}\right)\right)$, ne devroit renfermer que les deux variables x & t, d'où la nature de la fonction u, entant qu'elle peut renfermer y & z, doit être déterminée.

LX. Quoique j'aye supposé ici $v=0$ & $w=0$, ces formules renferment tous les cas, où le mouvement de toutes les particules du fluide suit toujours la même direction; car on n'aura qu'à prendre l'axe OA sur cette même direction. Or de là nous pourrons réciproquement résoudre nos formules, lorsque la direction du mouvement est oblique à la position des trois axes, ce qui ne manquera pas de nous fournir quelques éclaircissemens dans cette Analyse. Pour cet effet considérons la vitesse vraye d'une particule quelconque Z du fluide qui soit $=\mathfrak{v}$, & puisque sa direction est donnée à l'égard des trois axes, les vitesses dérivées y tiennent des rapports donnés. Soit donc: $u=\alpha\mathfrak{v}$; $v=\beta\mathfrak{v}$; & $w=\gamma\mathfrak{v}$;
& posant $d\mathfrak{v}=\mathrm{K}dt+\mathrm{L}dx+\mathrm{M}dy+\mathrm{N}dz$, nous aurons:

$$\mathrm{X}=\alpha\mathrm{K}+\alpha\alpha\mathrm{L}+\alpha\beta\mathrm{M}+\alpha\gamma\mathrm{N}$$
$$\mathrm{Y}=\beta\mathrm{K}+\alpha\beta\mathrm{L}+\beta\beta\mathrm{M}+\beta\gamma\mathrm{N}$$
$$\mathrm{Z}=\gamma\mathrm{K}+\alpha\gamma\mathrm{L}+\beta\gamma\mathrm{M}+\gamma\gamma\mathrm{N}.$$

Donc, si nous posons pour abréger $\mathrm{K}+\alpha\mathrm{L}+\beta\mathrm{M}+\gamma\mathrm{N}=\mathrm{O}$, ayant $\mathrm{X}=\alpha\mathrm{O}$, $\mathrm{Y}=\beta\mathrm{O}$, $\mathrm{Z}=\gamma\mathrm{O}$, nos équations seront:

$$\frac{dp}{q}=\mathrm{P}dx+\mathrm{Q}dy+\mathrm{R}dz-\mathrm{O}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz).$$

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\alpha\left(\frac{d.q\mathfrak{v}}{dx}\right)+\beta\left(\frac{d.q\mathfrak{v}}{dy}\right)+\gamma\left(\frac{d.q\mathfrak{v}}{dz}\right)=0.$$

LXI. Soit d'abord la densité $q=g$, & pour satisfaire à cette égalité $\alpha\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dx}\right)+\beta\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dy}\right)+\gamma\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dz}\right)=0$, nous avons vû dans le §. 44. que la quantité $\mathfrak{v}$ doit être une fonction quelconque des quantités

tités $\alpha y - \beta x$ & $\alpha z - \gamma x$, ou $\beta z - \gamma y$, & qui puiſſe outre cela renfermer le tems t d'une maniere quelconque. Soit donc u une fonction quelconque des quantités $\alpha y - \beta x$, $\alpha z - \gamma x$, & t, puisque la formule $\beta z - \gamma y$ eſt déjà formée des deux autres, & on comprend aiſément de là, que dans chaque inſtant la viteſſe des particules qui ſe trouvent dans une même ligne droite, parallele à la direction du mouvement, eſt par tout la même, tout comme la nature de l'hypotheſe exige. Donc le différentiel de u aura une telle forme:

$$du = \mathrm{F}dt + \mathrm{G}(\alpha dy - \beta dx) + \mathrm{H}(\alpha dz - \gamma dx),$$

de ſorte que:

$$\mathrm{K} = \mathrm{F}\,;\ \mathrm{L} = -\beta\mathrm{G} - \gamma\mathrm{H}\,;\ \mathrm{M} = \alpha\mathrm{G}\,;\ \&\ \mathrm{N} = \alpha\mathrm{H}\,;$$

& partant $\mathrm{O} = \mathrm{F}$ fonction de $\alpha y - \beta x$, $\alpha z - \gamma x$, & de t: d'où l'équation différentielle qui reſte à réſoudre, ſera:

$$\frac{dp}{q} = \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz - \mathrm{F}(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz).$$

LXII. Le tems t étant ici ſuppoſé conſtant, ſi la formule $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz = d\mathrm{V}$, & intégrable d'elle-même, il faut que l'autre partie $\mathrm{F}(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$ le ſoit auſſi; ce qui ne ſauroit arriver, à moins que F ne ſoit une fonction de $\alpha x + \beta y + \gamma z$, & du tems t. Mais il faut de plus que F ſoit auſſi une fonction des quantités $\alpha y - \beta x$, $\alpha z - \gamma x$, & du tems t: donc puisque la formule $\alpha x + \beta y + \gamma z$, n'eſt pas compoſée des formules $\alpha y - \beta x$, & $\alpha z - \gamma x$, il eſt évident que la quantité F doit être fonction du ſeul tems t. Par conſéquent la viteſſe u ſera en ſorte $u = \mathrm{Z} + \mathrm{T}$, où Z marque une fonction quelconque des deux quantités $\alpha y - \beta x$, & $\alpha z - \gamma x$, ſans renfermer le tems t, & T eſt une fonction quelconque du ſeul tems t, de ſorte que $d\mathrm{T} = \mathrm{F}dt$. D'où l'intégrale de notre équation différentielle ſera $\frac{p}{g} = \mathrm{V} - \mathrm{F}(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \text{Conſt.}$ où la conſtante peut renfermer le tems t d'une maniere quelconque. Cette équation intégrale jointe à $u = \mathrm{Z} + \mathrm{T}$ contient tout ce qui regarde le mouvement du cas propoſé.

LXIII. Mais si la densité q n'est pas constante, il sera important de decouvrir la résolution de cette formule :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\alpha\left(\frac{d.q\mathfrak{u}}{dx}\right)+\beta\left(\frac{d.q\mathfrak{u}}{dy}\right)+\gamma\left(\frac{d.q\mathfrak{u}}{dz}\right)=0.$$

Or, quelque difficile que cela puisse paroitre, la reduction au cas précédent nous montre, que la vitesse $\mathfrak{u}$ peut être une fonction quelconque des quatre variables x, y, z, & t, mais que la valeur de q doit être déterminée de la maniere suivante. Qu'on considére en général une telle formule :

$$s(l\,dx+m\,dy+n\,dz-\mathfrak{u}\,dt)=dS,$$

qui étant par s multipliée est devenuë intégrable, & soit $q=sf:S$; donc posant $d.f:S=dS.f':S$, notre formule deviendra:

$$f:S\left(\frac{ds}{dt}\right)-sf':S.s\mathfrak{u}+\alpha sf:S\left(\frac{d\mathfrak{u}}{dx}\right)+\alpha\mathfrak{u}f:S\left(\frac{ds}{dx}\right)+\alpha\mathfrak{u}sf':S.ls$$
$$+\beta sf:S\left(\frac{d\mathfrak{u}}{dy}\right)+\beta\mathfrak{u}f:S\left(\frac{ds}{dy}\right)+\beta\mathfrak{u}sf':S.ms$$
$$+\gamma sf:S\left(\frac{d\mathfrak{u}}{dz}\right)+\gamma\mathfrak{u}f:S\left(\frac{ds}{dz}\right)+\gamma\mathfrak{u}f':S.ns$$

qui doit être égale à zero :

LXIV. Faisons d'abord évanouïr les termes affectés par $f':S$, & nous en obtiendrons $1=\alpha l+\beta m+\gamma n$, & le reste étant divisé par $f:S$ donne :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)+\alpha\left(\frac{d.s\mathfrak{u}}{dx}\right)+\beta\left(\frac{d.s\mathfrak{u}}{dy}\right)+\gamma\left(\frac{d.s\mathfrak{u}}{dz}\right)=0,$$

qui est bien semblable à la proposée, mais il faut remarquer que l'intégrabilité de la valeur dS renferme ces conditions:

$$\left(\frac{d.s\mathfrak{u}}{dx}\right)=-\left(\frac{d.ls}{dt}\right);\ \left(\frac{d.s\mathfrak{u}}{dy}\right)=-\left(\frac{d.ms}{dt}\right);\ \left(\frac{d.s\mathfrak{u}}{dz}\right)=-\left(\frac{d.ns}{dt}\right);$$

d'où

d'où nous tirons : $\left(\frac{ds}{dt}\right)(1 - \alpha l - \beta m - \gamma n)$; ce qui eſt d'accord avec la condition précédente. Donc, pourvû qu'il ſoit $\alpha l + \beta m + \gamma n = 1$, & s une telle fonction qui rende $s(ldx + mdy + ndz - \aleph dt) = dS$, ou intégrable, on ſatisfera à notre formule, lorsqu'on prend $q = sf:S$, ou $\frac{q}{s}$ égal à une fonction quelconque de S. Il n'eſt pas néceſſaire que les quantités l, m, & n, ſoient conſtantes, mais alors il faut qu'il ſoit

$$\alpha\left(\frac{dl}{dt}\right) + \beta\left(\frac{dm}{dt}\right) + \gamma\left(\frac{dn}{dt}\right) = 0,$$

or cette condition eſt déjà renfermée dans l'équation $1 = \alpha l + \beta m + \gamma n$.

LXV. Or il faut de plus que l, m, & n, ſoient de telles fonctions, que l'équation différentielle $ldx + mdy + ndy - \aleph dt = 0$ devienne poſſible ; car ſans cette condition il ſeroit impoſſible de trouver un multiplicateur s, qui rendit cette formule intégrable. Or, ayant pris à volonté une valeur pour l, celles de m & n en ſeront déjà déterminées, & nous nous pourrons diſpenſer de les chercher, en poſant $\alpha l = 1$ où $l = \frac{1}{\alpha}$, car alors il faut qu'il ſoit $\beta m + \gamma n = 0$; & on n'aura qu'à chercher un tel facteur s, que cette formule $s\left(\frac{dx}{\alpha} - \aleph dt\right)$ devienne intégrable, où l'on regardera les deux quantités y & z comme conſtantes. Soit donc $S = \int s\left(\frac{dx}{\alpha} - \aleph dt\right)$, de ſorte que S renferme y & z comme des conſtantes, & on pourra prendre $q = sf:S$: ce qui nous fournit la même ſolution, que ſi nous euſſions tellement changé la poſition des trois axes, que l'un convint avec la direction du mouvement de tous les élémens du fluide. D'où nous voyons que cette reſtriction apparente n'affoiblit point la généralité de la ſolution.

LXVI.

LXVI. De la même maniere on pourroit déveloper plusieurs autres cas particuliers, qui auront, tantôt une plus grande, tantôt une plus petite étendue ; mais on n'en trouvera point, qui soit plus général que celui, où les trois vitesses u, v, & w, sont telles, que la formule $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ devienne intégrable. Soit S l'intégrale, qui contenant encore le tems t soit son différentiel complet : $dS = u\,dx + v\,dy + w\,dz + \Pi\,dt$, & puisque

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dx}\right) ; \left(\frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) ; \left(\frac{dw}{dt}\right) = \left(\frac{d\Pi}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) ; \left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right) ; \left(\frac{dv}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dy}\right),$$

nous aurons :

$$X = \left(\frac{d\Pi}{dx}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dx}\right) + w\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

$$Y = \left(\frac{d\Pi}{dy}\right) + u\left(\frac{du}{dy}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

$$Z = \left(\frac{d\Pi}{dz}\right) + u\left(\frac{du}{dz}\right) + v\left(\frac{dv}{dz}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

& notre équation différentielle deviendra :

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz - d\Pi - u\,du - v\,dv - w\,dw$$

(dont le dernier membre est absolument intégrable),

& l'autre équation demeure :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0.$$

LXVII. Tout se réduit donc à trouver des valeurs convenables pour les trois vitesses u, v, & w, qui satisfassent à nos deux équations, qui renferment tout ce qui regarde notre connoissance sur le mouvement des fluides. Car ayant ces trois vitesses, on pourra déterterminer le chemin, que chaque élément du fluide parcourt par son mouvement. Considérons la particule qui se trouve à présent en Z, & pour trouver le chemin, qu'elle a déjà parcouru, & qu'elle parcourra encore, puisque ses trois vitesses u, v, & w, sont supposées connues, nous aurons pour son lieu à l'instant suivant, $dx = u\,dt$; $dy = v\,dt$ & $dz = w\,dt$. Qu'on élimine de ces trois égalités le tems t, & on aura encore deux équations entre les trois coordonnées x, y & z, qui détermineront le chemin cherché de l'élément du fluide, qui se trouve actuellement en Z, & en général on en connoitra la route, que chaque particule a décrite, & décrira encore.

LXVIII. La détermination de ces routes est de la derniere importance, & doit servir pour appliquer la Théorie à chaque cas proposé. Car si la figure du vaisseau, dans lequel le fluide se meut, est donnée, les particules du fluide, qui touchent à la surface du vaisseau, en doivent suivre nécessairement la direction: & partant les vitesses u, v, & w, doivent être telles, que les routes qui en seront déduites, tombent dans la surface même. Or nous voyons par là suffisamment, combien nous sommes encore éloignés de la connoissance complette du mouvement des fluides, & que ce que je viens d'expliquer, n'en contient qu'un foible commencement. Cependant tout ce que la Théorie des fluides renferme, est contenu dans les deux équations rapportées cy-dessus (§. XXXIV.), de sorte que ce ne sont pas les principes de Méchanique qui nous manquent dans la poursuite de ces recherches, mais uniquement l'Analyse, qui n'est pas encore assés cultivée, pour ce dessein: & partant on voit clairement, quelles découvertes nous restent encore à faire dans cette Science, avant que nous puissions arriver à une Théorie plus parfaite du mouvement des fluides.