EQUATIONS DE FERMETURE
DANS LES PLASMAS SANS COLLISION

- Approche cinétique / Approche fluide
- Equations fluides et le problème de la fermeture
- La loi "double adiabatique" CGL / Loi isotherme ?
- Loi unique pour les larges échelles spatio-temporelles

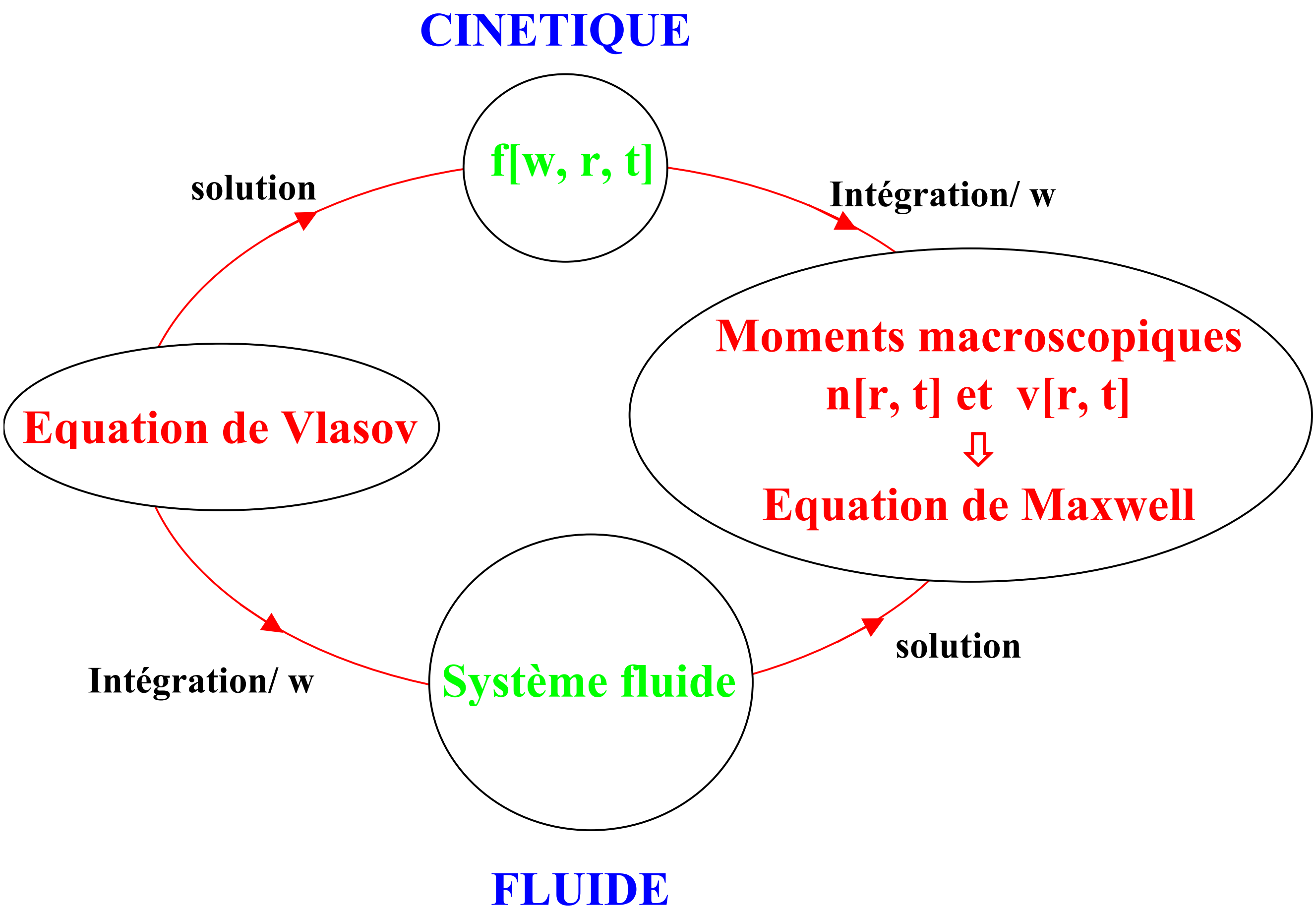
Thomas Chust et Gérard Belmont

(CETP/CNRS-UVSQ, Vélizy)

Atelier "Simulations numériques de la dynamique des milieux non-collisionnels"
4-5 décembre 2002, Observatoire de Paris

APPROCHE CINETIQUE / APPROCHE FLUIDE

du système Vlasov-Maxwell



$\Rightarrow$

Deux approches différentes pour résoudre
le même problème à partir de la même équation

(En théorie, équivalentes mais en pratique …)

SOLUTION DE L'EQUATION DE VLASOV

Equation de Vlasov pour une population (ions ou électrons) :

$$\partial_t(f) + \mathbf{w}.\nabla(f) + \frac{q}{m}(\mathbf{E}+\mathbf{w}\times\mathbf{B}).\nabla_w(f) = 0$$

Solution :

$$\boxed{\begin{array}{c} f(t,\mathbf{r},\mathbf{w}) = f(t_0,\mathbf{r}_0,\mathbf{w}_0) \\ \\ \textbf{où } (t_0,\mathbf{r}_0,\mathbf{w}_0) \textbf{ et } (t,\mathbf{r},\mathbf{w}) \textbf{ sont reliés par une trajectoire} \end{array}}$$

$$\Rightarrow$$

1) **Solution qui dépend de l'histoire spatio-temporelle des champs E et B**

2) **Forme de f quelconque ≡ degré de liberté infini**

<u>En pratique des simplifications sont nécessaires</u>:

linéarisation, hypothèse 1 ou 2-D,
évolution quasi-statique …

EQUATIONS FLUIDES

Intégration de Vlasov / $\mathbf{w}$ $\Rightarrow$ équations exactes

$$
\begin{cases}
\textit{densité} & \partial_t(n) + \nabla\cdot(n\mathbf{v}) & = & 0 \\
\textit{impulsion} & \partial_t(nm\mathbf{v}) + \nabla\cdot(nm\mathbf{v}\mathbf{v} + \overline{\overline{\mathbf{p}}}) - nq(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) & = & 0 \\
\textit{pression} & \partial_t(\overline{\overline{\mathbf{p}}}) + \nabla\cdot(\mathbf{v}\overline{\overline{\mathbf{p}}} + \overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}}) + \left\{\overline{\overline{\mathbf{p}}}\cdot\nabla(\mathbf{v}) + \mathbf{\Omega}_c\times\overline{\overline{\mathbf{p}}}\right\}^{sym} & = & 0 \\
\textit{heat flux} & \ldots & & \ldots \\
\ldots & \ldots & & \ldots
\end{cases}
$$

avec $\left\{\overline{\overline{\mathbf{T}}}\right\}^{sym} =$ tenseur + transposé

$\Rightarrow$

1) Solution qui dépend de l'histoire spatio-temporelle des champs E et B

2) Système infini $\equiv$ forme quelconque de f

<u>En pratique il faut tronquer le système</u>:

une *équation de fermeture* est nécessaire (généralement à l'ordre $\overline{\overline{\mathbf{p}}}$ ou $\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}}$)

CONDITIONS POUR UNE FERMETURE

Collisionnel **:**

Forme maxwellienne de f justifiée par la dynamique locale des particules *elles-mêmes* (opérateur de collision dans l'équation de Boltzmann)

Degré de liberté fini

Relation locale entre n, $\overline{\overline{\mathbf{p}}}$ et $\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}}$ possible

($\boxed{d_t \ll \nu_{collision}}$ **et** $\boxed{\partial_r \ll 1/l_{collision}}$ **)**

Non-collisionnel **:**

Forme de f *elle-même* n'est pas contrainte

Seul moyen d'avoir une relation finie entre les premiers moments de f est d'avoir une évolution du plasma qui *elle-même* n'implique pas tous les *degrés de liberté* du plasma.

Existence de modes "fluides"

LARGES ECHELLES SPATIO-TEMPORELLES

$\Rightarrow$ **Simplification au niveau de la forme de** f
A l'ordre 0, fonction f **gyrotrope**

$$\Rightarrow \quad \overline{\overline{\mathbf{p}}} = \begin{pmatrix} p_\perp & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & p_\| \end{pmatrix} \qquad \textbf{et}$$

$$\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}} = \mathbf{q}_\| \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z + \mathbf{q}_\perp (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}_t p_\| &= -p_\| \nabla\cdot(\mathbf{v}) - 2p_\| \nabla_\| \cdot(\mathbf{v}) - \nabla\cdot(q_\| \mathbf{e}_z) + 2q_\perp \nabla\cdot(\mathbf{e}_z) \\ \mathrm{d}_t p_\perp &= -2p_\perp \nabla\cdot(\mathbf{v}) + p_\perp \nabla_\| \cdot(\mathbf{v}) - \nabla\cdot(q_\perp \mathbf{e}_z) - q_\perp \nabla\cdot(\mathbf{e}_z) \end{aligned}}$$

Hypothèses intuitives :

Pas d'effets de *fréquence* fini: $\boxed{\mathrm{d}_t \ll \Omega_c}$

Pas d'effets de *rayon de Larmor* fini: $\boxed{\partial_\perp \ll \Omega_c / v_{th\perp}}$

Pas de *résonance cyclotron*: $\boxed{v_{th\|} \partial_\| \ll \Omega_c}$

FERMETURE "DOUBLE ADIABATIQUE" (CGL)

Si $\boxed{v_{th\parallel}\partial_\parallel << \mathrm{d}_t}$

$\Rightarrow$
$$\boxed{\begin{array}{lcl} \mathrm{d}_t p_\parallel & = & -p_\parallel \nabla\cdot(\mathbf{v}) - 2p_\parallel \nabla_\parallel \cdot(\mathbf{v}) \\ \mathrm{d}_t p_\perp & = & -2p_\perp \nabla\cdot(\mathbf{v}) + p_\perp \nabla_\parallel \cdot(\mathbf{v}) \end{array}}$$

Loi d'Ohm idéale

$\Rightarrow$
$$\boxed{\mathrm{d}_t\left[\frac{p_\perp}{nB}\right]=0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_t\left[\frac{B^2 p_\parallel}{n^3}\right]=0}$$

Si $\boxed{v_{th\parallel}\partial_\parallel >> \mathrm{d}_t}$

$\Rightarrow$ **Termes de flux de chaleur non négligeagles …**

$\Rightarrow$ **Cas statique montre une infinité de formes possibles …**

(dans le cas maxwellien, $p_\perp \propto n^2$ **et** $p_\parallel \propto n$**)**

CONDITIONS DE GIROTROPIE (1)

A quelles conditions a t-on :

$$p_{xy}\,,\ p_{yy}-p_{xx} \quad \leq \quad \varepsilon\, p_{xx} \approx \varepsilon\, p_{yy} = \varepsilon\, p_{\perp}$$

$$p_{xz}\,,\ p_{yz} \quad \leq \quad \varepsilon\, p_{\perp} \ \text{ ou } \ \varepsilon\, p_{\parallel}$$

Transport de la pression :

$$\begin{bmatrix} 2p_{xy} & p_{yy}-p_{xx} & p_{yz} \\ p_{yy}-p_{xx} & -2p_{xy} & -p_{xz} \\ p_{yz} & -p_{xz} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}_t(\overline{\overline{\mathbf{p}}}) - \dfrac{\mathrm{d}_t(n)}{n}\overline{\overline{\mathbf{p}}} + \{\overline{\overline{\mathbf{p}}}\cdot\nabla(\mathbf{v})\}^{sym} + \nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})}{\Omega_c}$$

Termes de pression $\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{d}_t \ll \Omega_c}$ **et** $\boxed{|\partial_r(\mathbf{v})| \ll \Omega_c}$

Termes de flux de chaleur "*paires*" ($q_{xxz}\,,\ q_{yyz}\,,\ q_{\parallel}$ **)** $\Rightarrow$ $\boxed{\partial_r \ll \Omega_c / v_{th\parallel}}$

Hypothèse : $q_{xxz}\,,\ q_{yyz} \leq v_{th\parallel}\, p_{\perp}$ et $q_{\parallel} \leq v_{th\parallel}\, p_{\parallel}$

Termes de flux de chaleur "*impaires*" $\Leftarrow$ $\boxed{\partial_r \ll \Omega_c / v_{th\perp}}$

Hypothèse : $q_{\alpha\beta\gamma} \leq Mn \times v_{th,\alpha}\, v_{th,\beta}\, v_{th,\gamma}$

CONDITIONS DE GIROTROPIE (2)

A quelles conditions a t-on :

$$q_{xyz}\,,\;\; q_{xxz}-q_{yyz} \;\leq\; \varepsilon\, q_{xxz} \approx \varepsilon\, q_{yyz} = \varepsilon\, q_{\perp}$$

$$q_{xxx}\,,\;\; q_{yyy}\,,\;\; q_{xxy}\,,\;\; q_{yyx} \;\leq\; \varepsilon\, v_{th\perp}\, p_{\perp}$$

$$q_{zzx}\,,\;\; q_{zzy} \;\leq\; \varepsilon\, v_{th\perp}\, p_{\parallel}$$

Transport du flux de chaleur :

$$\boxed{\begin{aligned}&\partial_t(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}}) + \nabla\cdot(\mathbf{v}\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{\mathbf{R}}}}}) - \left(\nabla\cdot(\overline{\overline{\mathbf{p}}})\overline{\overline{\mathbf{p}}} + \overline{\overline{\mathbf{p}}}\nabla\cdot(\overline{\overline{\mathbf{p}}}) + \overline{\overline{\mathbf{p}}}_{\alpha\gamma}\nabla\cdot(\overline{\overline{\mathbf{p}}})_{\beta}\right)\frac{1}{nM}\\ &+\left(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}}_{\alpha} + \overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}}_{\beta} + \overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}}_{\gamma}\right)\cdot\nabla(\mathbf{v}) \;+\; \mathbf{\Omega}_c\times\left(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}}_{\alpha} + \overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}}_{\beta} + \overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}}_{\gamma}\right) \;=\; 0\end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}_t \;<<\; \Omega_c}\,, \quad \boxed{\left|\partial_r(\mathbf{v})\right| \;<<\; \Omega_c} \quad \text{et} \quad \boxed{\partial_r \;<<\; \Omega_c / v_{th}}$$

Hypothèse : $\quad r_{\alpha\beta\gamma\chi} \leq Mn \times v_{th,\alpha}\, v_{th,\beta}\, v_{th,\gamma}\, v_{th,\chi}$

CONDITIONS DE GIROTROPIE (3)

A quelles conditions ces termes de flux de chaleur "impaires" (*__nulles à l'ordre 0__*) sont-ils négligeables ?

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\frac{v_{th}^2}{\Omega_c^2}\frac{\partial^2}{\partial_{r^2}} << \frac{1}{\Omega_c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\Omega_c}\left|\partial_r(\mathbf{v})\right|}$$

$\Rightarrow$ **Condition plus restrictive**

(A REVOIR ...)

LOI UNIQUE

Dans ces conditions :

$$\mathrm{d}_t p_\parallel = -p_\parallel \nabla \cdot (\mathbf{v}) - 2p_\parallel \nabla_\parallel \cdot (\mathbf{v}) - \nabla \cdot (q_\parallel \mathbf{e}_z) + 2q_\perp \nabla \cdot (\mathbf{e}_z)$$

$$\mathrm{d}_t p_\perp = -2p_\perp \nabla \cdot (\mathbf{v}) + p_\perp \nabla_\parallel \cdot (\mathbf{v}) - \nabla \cdot (q_\perp \mathbf{e}_z) - q_\perp \nabla \cdot (\mathbf{e}_z)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_t q_\parallel = & -q_\parallel \nabla \cdot (\mathbf{v}) - 3q_\parallel \nabla_\parallel \cdot (\mathbf{v}) + 3\frac{p_\parallel}{nM}\left([p_\parallel - p_\perp]\nabla \cdot (\mathbf{e}_z) + \partial_\parallel p_\parallel\right) \\ & -\nabla \cdot (r_\parallel \mathbf{e}_z) + 3r_{\perp\parallel} \nabla \cdot (\mathbf{e}_z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_t q_\perp = & -2q_\perp \nabla \cdot (\mathbf{v}) + \frac{p_\perp}{nM}\left([p_\parallel - p_\perp]\nabla \cdot (\mathbf{e}_z) + \partial_\parallel p_\parallel\right) \\ & -\nabla \cdot (r_{\perp\parallel} \mathbf{e}_z) - (r_{\perp\parallel} - \frac{r_\perp + r_{\perp\perp}}{2})\nabla \cdot (\mathbf{e}_z)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} r_\parallel = n < v_z^4 > \approx 3p_\parallel^2 / n \\ r_\perp = n < v_x^4 > \approx 3p_\perp^2 / n \\ r_{\perp\parallel} = n < v_x^2 v_z^2 > \approx p_\perp p_\parallel / n \\ r_{\perp\perp} = n < v_x^2 v_y^2 > \approx p_\perp^2 / n \end{cases}$$

CONCLUSION

Fermeture semble possible même lorsqu'une infinité de "modes" semblent coexistés.

La participation d'une'infinité de "modes" semble pouvoir se résumer au comportement de seulement un nombre fini de "modes"

Fermer signifie extraire l'essentiel et l'essentiel est généralement fini

Même dans des cas fortement cinétiques la notion de mode a encore un sens !

Fermeture possible avec effets de fréquence fini ?

$$p_{xy} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}_t \cdot -\mathrm{d}_t(n)/n + 2\partial_x(\mathbf{v})\cdot\mathbf{e}_x}{2\Omega_c} p_{xx} + \dfrac{[\partial_z(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_z)]\cdot\mathbf{e}_x}{\Omega_c} p_{xz} + \dfrac{\nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})_{xx}}{2\Omega_c}}{1 - \dfrac{[\partial_y(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_y)]\cdot\mathbf{e}_x}{\Omega_c}}$$

$$p_{xy} = \frac{\dfrac{-\mathrm{d}_t \cdot +\mathrm{d}_t(n)/n - 2\partial_y(\mathbf{v})\cdot\mathbf{e}_y}{2\Omega_c} p_{yy} - \dfrac{[\partial_z(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_z)]\cdot\mathbf{e}_y}{\Omega_c} p_{yz} - \dfrac{\nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})_{yy}}{2\Omega_c}}{1 - \dfrac{[\partial_x(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_x)]\cdot\mathbf{e}_y}{\Omega_c}}$$

$$\begin{aligned} p_{xz} = \quad & -\left(\frac{[\partial_z(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_z)]\cdot\mathbf{e}_y}{\Omega_c} p_{zz} + \frac{[\partial_y(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_y)]\cdot\mathbf{e}_z}{\Omega_c} p_{yy} + \frac{\nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})_{yz}}{\Omega_c} \right. \\ & \left. + \frac{\mathrm{d}_t \cdot -2\mathrm{d}_t(n)/n - \partial_x(\mathbf{v})\cdot\mathbf{e}_x}{\Omega_c} p_{yz} + \frac{[\partial_x(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_x)]\cdot\mathbf{e}_z}{\Omega_c} p_{xy} \right) \\ & / \left(1 + \frac{[\partial_x(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_x)]\cdot\mathbf{e}_y}{\Omega_c} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{yz} = \quad & \left(\frac{[\partial_z(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_z)]\cdot\mathbf{e}_x}{\Omega_c} p_{zz} + \frac{[\partial_x(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_x)]\cdot\mathbf{e}_z}{\Omega_c} p_{xx} + \frac{\nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})_{xz}}{\Omega_c} \right. \\ & \left. + \frac{\mathrm{d}_t \cdot -2\mathrm{d}_t(n)/n - \partial_y(\mathbf{v})\cdot\mathbf{e}_y}{\Omega_c} p_{xz} + \frac{[\partial_y(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_y)]\cdot\mathbf{e}_z}{\Omega_c} p_{xy} \right) \\ & / \left(1 - \frac{[\partial_y(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_y)]\cdot\mathbf{e}_x}{\Omega_c} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{yy} - p_{xx} = \quad & \frac{[\partial_x(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_x)]\cdot\mathbf{e}_y}{\Omega_c} p_{xx} + \frac{[\partial_y(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_y)]\cdot\mathbf{e}_x}{\Omega_c} p_{yy} \\ & + \frac{\mathrm{d}_t \cdot -2\mathrm{d}_t(n)/n - \partial_z(\mathbf{v})\cdot\mathbf{e}_z}{\Omega_c} p_{xy} + \frac{\nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})_{xy}}{\Omega_c} \\ & + \frac{[\partial_z(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_z)]\cdot\mathbf{e}_x}{\Omega_c} p_{yz} + \frac{[\partial_z(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_z)]\cdot\mathbf{e}_y}{\Omega_c} p_{xz} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2p_{xy} & p_{yy}-p_{xx} & p_{yz} \\ p_{yy}-p_{xx} & -2p_{xy} & -p_{xz} \\ p_{yz} & -p_{xz} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}_t(\overline{\overline{\mathbf{p}}}) - \frac{\mathrm{d}_t(n)}{n}\overline{\overline{\mathbf{p}}} + \{\overline{\overline{\mathbf{p}}}\cdot\nabla(\mathbf{v})\}^{sym} + \nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})}{\Omega_c}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})_{xx} &= \nabla\cdot(q_{kxx}\mathbf{e}_k) + 2[q_{kxy}\partial_k(\mathbf{e}_y) + q_{kxz}\partial_k(\mathbf{e}_z)]\cdot\mathbf{e}_x \\
\nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})_{yy} &= \nabla\cdot(q_{kyy}\mathbf{e}_k) + 2[q_{kyx}\partial_k(\mathbf{e}_x) + q_{kyz}\partial_k(\mathbf{e}_z)]\cdot\mathbf{e}_y \\
\nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})_{zz} &= \nabla\cdot(q_{kzz}\mathbf{e}_k) + 2[q_{kzx}\partial_k(\mathbf{e}_x) + q_{kzy}\partial_k(\mathbf{e}_y)]\cdot\mathbf{e}_z \\
\nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})_{xy} &= \nabla\cdot(q_{kxy}\mathbf{e}_k) + [q_{kyy}\partial_k(\mathbf{e}_y) + q_{kzy}\partial_k(\mathbf{e}_z)]\cdot\mathbf{e}_x + [q_{kxx}\partial_k(\mathbf{e}_x) + q_{kxz}\partial_k(\mathbf{e}_z)]\cdot\mathbf{e}_y \\
\nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})_{xz} &= \nabla\cdot(q_{kxz}\mathbf{e}_k) + [q_{kyz}\partial_k(\mathbf{e}_y) + q_{kzz}\partial_k(\mathbf{e}_z)]\cdot\mathbf{e}_x + [q_{kxx}\partial_k(\mathbf{e}_x) + q_{kxy}\partial_k(\mathbf{e}_y)]\cdot\mathbf{e}_z \\
\nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})_{yz} &= \nabla\cdot(q_{kyz}\mathbf{e}_k) + [q_{kxz}\partial_k(\mathbf{e}_x) + q_{kzz}\partial_k(\mathbf{e}_z)]\cdot\mathbf{e}_y + [q_{kyx}\partial_k(\mathbf{e}_x) + q_{kyy}\partial_k(\mathbf{e}_y)]\cdot\mathbf{e}_z
\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathrm{d}_t p_{zz} \quad = \quad & -p_{zz}[\nabla\cdot(\mathbf{v}) + 2\nabla_{\|}\cdot(\mathbf{v})] - \nabla\cdot(\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}})_{zz} \\
& -2p_{zx}[\partial_x(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_x)]\cdot\mathbf{e}_z - 2p_{zy}[\partial_y(\mathbf{v}) + \mathrm{d}_t(\mathbf{e}_y)]\cdot\mathbf{e}_z
\end{aligned}}$$